

GUIDO HAUCK

VORLESUNGEN
ÜBER
DARSTELLENDE GEOMETRIE

I


SIGILLVM · VNIVERSITATIS · CALIFORNIENSIS
FIAT LVX
MDCCCLXVIII
EX LIBRIS

DR. GUIDO HAUCK
WEILAND GEHEIMER REGIERUNGSRAT
PROF. DER DARSTELLENDEN GEOMETRIE UND DER GRAPHISCHEN
STATIK AN DER KGL. TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU BERLIN

VORLESUNGEN ÜBER DARSTELLENDE GEOMETRIE

UNTER BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG DER BEDÜRFNISSE DER TECHNIK

HERAUSGEGEBEN VON

ALFRED HAUCK
DIREKTOR DER KGL. REALSCHULE
IN SCHÖNLANKE

IN ZWEI BÄNDEN

ERSTER BAND
MIT 650 TEXTFIGUREN



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1912

VORWORT.

Die an der Technischen Hochschule zu Berlin gehaltenen „Vorlesungen über darstellende Geometrie“ bilden einen großen Teil der pädagogischen Lebensarbeit meines verstorbenen Vaters, der als Meister der Pädagogik sich stets großer Anerkennung erfreuen durfte, und dessen geometrische Arbeiten von der königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin noch nach seinem Tode mit dem Steiner-Preise ausgezeichnet wurden.

Es war mir vergönnt, diese Vorlesungen in geeigneter Weise zusammenzustellen, und ich darf sie heute zu meiner Freude der Öffentlichkeit in Buchform übergeben. Das vorliegende Werk erhebt nicht den Anspruch, ein Kompendium der darstellenden Geometrie zu bieten, vielmehr sucht es aus dem gewaltigen Stoffe dieser Disziplin dasjenige auszuwählen und systematisch wie pädagogisch zu ordnen, was allgemein wissenswert, was für das Verständnis der verschiedenen Methoden und ihrer Anwendungen in der Praxis, namentlich in der Technik, notwendig ist. Dabei sind die Grenzen so weit als möglich gezogen, und ich habe geglaubt, manches aufnehmen zu sollen, was mein Vater in seinen Vorlesungen nicht vorzutragen pflegte.

Das Buch unterscheidet sich von anderen größeren Lehrbüchern der darstellenden Geometrie schon in der äußeren Darstellungsweise. So habe ich im Text und in den Figuren fast vollständig auf die Buchstaben verzichtet. Der Anfänger, besonders der Techniker, der nicht Fach-Mathematiker ist, wird erfahrungsgemäß von dem Studium eines Buches abgeschreckt, wenn er sich an der Hand des Textes durch eine mit Buchstaben durchsetzte Figur hindurcharbeiten soll; abgesehen davon gehen auch die Schönheit und Eleganz der deskriptiven Methoden in solchen Figuren leicht verloren. Außerdem ergibt sich noch der große Vorteil für den Studierenden, daß er durch die Unmöglichkeit, sich mit Hilfe der Buchstaben mechanisch an der Figur zurechtzutasten, zum räumlichen Denken in hervorragender Weise gezwungen wird. Sein

Vorstellungsvermögen wird also auf das lebhafteste gefördert. Dies ist mir auch von seiten meiner Hörer, als ich während der letzten Krankheit meines Vaters ihn in seinen Vorlesungen an der Technischen Hochschule zu Berlin vertreten durfte, bestätigt worden.

Durch das Wegfallen der Buchstaben entstanden für den Text insofern Schwierigkeiten, als die Gefahr der Schwerfälligkeit auftrat. Ich hoffe jedoch, mich überall klar ausgedrückt zu haben, und habe den Text prinzipiell da, wo die Methode entwickelt wird, breit und ausführlich gestaltet, während die Lösung von Aufgaben vielfach nur knapp — aber doch stets präzis — angedeutet wurde. Es bleibt also dem Leser noch ein gut Stück eigener Tätigkeit bei den Konstruktionen übrig; es dürfte aber gerade dieser Umstand dem Buche zum Vorteil gereichen, da ein produktives Arbeiten mehr Freude und Befriedigung bringt, als ein rezeptives —, als ein mechanisches Nachkonstruieren.

Ferner habe ich beim Zeichnen der Figuren dieses Lehrbuches mich auf das äußerste bemüht, allen Ballast von Konstruktionslinien zu vermeiden, und die Figuren so einfach und klar wie irgendmöglich zu gestalten. Dem Vorstellungsvermögen bin ich dann häufig durch kleine perspektivische Skizzen zu Hilfe gekommen. Mit wenigen Ausnahmen habe ich alle Figuren neu gezeichnet; vielfach waren Skizzen vorhanden.

In dem vorliegenden ersten Bande sind die Grund- und Aufrißmethode, die axonometrische Methode mit malerischer Parallelperspektive, die geometrischen Verwandtschaften, krumme Linien und Flächen behandelt. Aus der projektiven Geometrie ist nur das Rüstzeug zur Behandlung der Kegelschnitte und der Flächen zweiter Ordnung aufgenommen. Im zweiten Bande sollen die Anwendungen der besprochenen Methoden auf Zentralperspektive und Schattenkonstruktionen, die im ersten Bande grundsätzlich weggelassen sind, im Zusammenhange vorgetragen werden.

Der Verlagsbuchhandlung, welche die erste Anregung zur Herausgabe der Vorlesungen meines Vaters gegeben hat, spreche ich meinen besonderen Dank dafür aus, daß sie weder Kosten noch Mühe gescheut hat, um das vorliegende Buch würdig auszugestalten und um die Figuren in sauberer, schöner Ausführung dem Texte beizugeben.

Ich war mir von Anfang an bewußt, daß es mir nie gelingen werde, das Werk in eine so vollendete Form zu gießen, wie sie einst durch meinen Vater in Rede und Zeichnung geschaffen wurde. Unvergeßlich

wird uns, seinen Schülern, der lebendige, geistvolle Vortrag des Lehrers, die Schönheit seiner Sprache und die wahrhaft künstlerische Art seiner Zeichnung bleiben. Trotzdem glaube ich keine undankbare Arbeit verrichtet zu haben.

Möchte das Lehrbuch dazu beitragen, das Andenken an den geistigen Urheber auch in die Zukunft hinein treu zu bewahren. Möchte es vielen Jüngern der darstellenden Geometrie eine Hilfe und ein Wegweiser, sowie auch dem in der Praxis stehenden Techniker stets ein brauchbarer und verläßlicher Berater werden.

Schönlanke, den 26. Dezember 1911.

ALFRED HAUCK.

INHALTSVERZEICHNIS.

I. Teil.

Die Grund- und Aufrißmethode und ihre Anwendung auf ebenflächige Gebilde.

I. Kapitel. **Darstellung von Punkten, Geraden und Ebenen durch Projektion.**

II. Kapitel. **Darstellung von Geraden und Ebenen durch Spuren.**

V. Kapitel. **Diskussion von Polyedern.**

VI. Kapitel. **Ebene Schnitte und Durchdringungen von Polyedern.**

II. Teil.

Die axonometrische Methode.

VII. Kapitel. **Orthogonale Projektion.**

VIII. Kapitel. **Schiefe Projektion.**

III. Teil.

Geometrische Verwandtschaften.

IX. Kapitel. Geometrische Verwandtschaften.

IV. Teil.

Kurven.

X. Kapitel. Ebene Kurven.

XI. Kapitel. Kurven zweiter Ordnung.

XII. Kapitel. **Raumkurven.**

XIII. Kapitel. **Die Schraubenlinie.**

V. Teil.

Entwickelbare Flächen.

XIV. Kapitel. **Krumme Flächen im allgemeinen.**

XV. Kapitel. **Entwickelbare Flächen.**

VI. Teil.

Rückungsflächen.

XVI. Kapitel. **Nichtentwickelbare Flächen im allgemeinen.**

Seite

XVII. Kapitel. **Rotationsflächen.**

XVIII. Kapitel. **Die Flächen zweiter Ordnung als Rückungsflächen.**

XIX. Kapitel. **Topographische Flächen.**

VII. Teil.

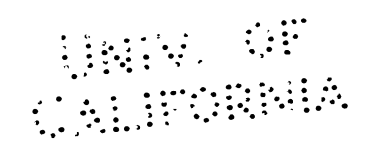
Windschiefe Regelflächen.

XX. Kapitel. **Windschiefe Regelflächen im allgemeinen.**

XXI. Kapitel. **Die windschiefen Regelflächen zweiter Ordnung.**

XXII. Kapitel. **Windschiefe Regelflächen höherer Ordnung.**

XXIII. Kapitel. **Windschiefe Schraubenflächen.**



I. Teil.

Die Grund- und Aufrißmethode und ihre Anwendung auf ebenflächige Gebilde.

I. Kapitel.

Darstellung von Punkten, Geraden und Ebenen durch Projektion.

1. Projektionsmethoden. Wenn man durch alle Punkte eines Körpers Strahlen in vorgeschriebener Richtung zieht und diese zum Schnitt mit einer Ebene — der Zeichenebene — bringt, so bestimmen die Treffpunkte aller dieser Strahlen mit der Zeichenebene eine Figur, die man eine *Projektion* des Körpers auf diese Ebene nennt, während jeder Punkt dieser Figur die Projektion desjenigen Körperpunktes heißt, durch den der betreffende Strahl gezogen ist.

Wird die Richtung der Projektionsstrahlen dadurch bestimmt, daß sie alle durch einen Punkt — das Projektionszentrum — gehen, so heißt die entstehende Projektion eine *Zentralprojektion*. Sind alle Projektionsstrahlen unter sich parallel, so heißt die Projektion *Parallelprojektion*, und zwar *schiefe*, wenn die Strahlen auf der Projektionsebene schief — *orthogonale*, wenn sie auf ihr senkrecht stehen.

Je nachdem es darauf ankommt, von einem Körper ein Bild zu erhalten, das denselben Eindruck auf das Auge hervorbringt wie der Körper selbst, oder darauf, in der Zeichnung möglichst die wahren Abmessungen des Körpers zu besitzen, wendet man bald die eine, bald die andere Methode an. So bevorzugt der *Techniker* die orthogonale Parallelprojektion, während der *Künstler* Zentralprojektionen konstruiert.

Wir beginnen damit, *die Methoden der orthogonalen Parallelprojektion* zu entwickeln.

2. Das Zweitafelsystem. Die Hauptausdehnungsrichtungen eines Körpers können im allgemeinen stets so gelegt werden, daß sie als

Breiten-, Tiefen- und Höhenrichtung bezeichnet werden können (Fig. 1). Da eine Parallelprojektion einer ebenen Figur auf eine zu ihr parallele Ebene als eine Parallelverschiebung der Figur aufgefaßt werden kann, so ist jede Parallelprojektion einer ebenen Figur auf eine zu ihr parallele Ebene kongruent mit dieser Figur. Daher erhält man bei einer orthogonalen Projektion eines Körpers, dessen Höhen vertikal stehen, auf eine horizontale Ebene die Breiten- und Tiefenlinien des Körpers in wahrer Gestalt; die Höhen dagegen projizieren sich alle je in einen Punkt, d. h. ihre wahre Länge ist aus der Projektionsfigur nicht ableitbar. Um den *Körper vollständig „darzustellen"*, ist es aber nötig, auch seine Höhen zu fixieren. Dieses wird am einfachsten erreicht, wenn man den Körper noch auf eine zweite Ebene projiziert, die so liegt, daß sich Höhen und Breiten — oder Höhen und Tiefen — in wahrer Größe projizieren, d. h. auf eine vertikale Ebene, die entweder parallel der Breitenrichtung oder parallel der Tiefenrichtung liegt.

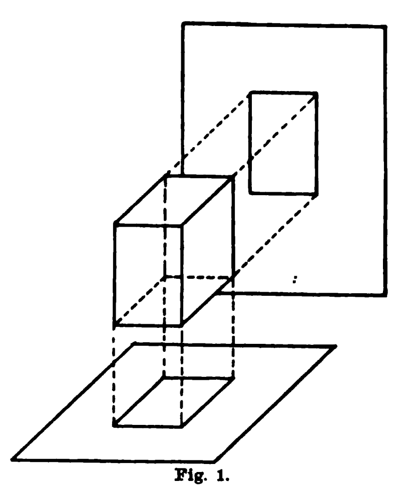


Fig. 1.

Wir wählen (Fig. 2) eine vertikale Ebene, die parallel der Höhen- und Breitenrichtung verläuft, und nennen sie kurzweg die *„Vertikalebene"*. Auf sie projizieren wir den Körper ebenso wie auf eine *„Horizontalebene"* orthogonal. Beide Ebenen stehen also aufeinander senkrecht und teilen den unendlichen Raum in vier Teile, da wir sie uns unbegrenzt vorstellen. Wir bezeichnen diese Räume als den vorderen oberen (I.), hinteren oberen (II.), vorderen unteren (III.) und hinteren unteren (IV.) Raum. *Wenn irgend möglich wollen wir den Körper, der darzustellen ist, stets in den I. Raum legen.*

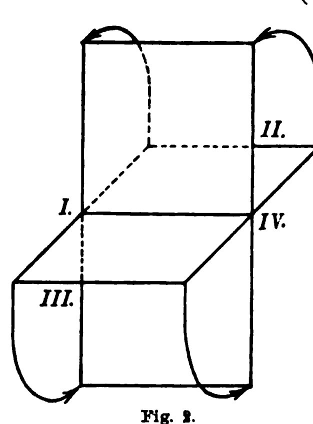


Fig. 2.

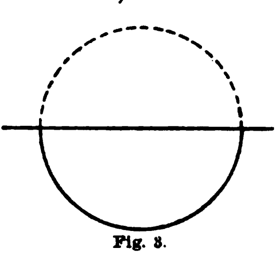
Die Schnittlinie der beiden Projektionsebenen nennen wir die *„Achse"* oder den *„Grundschnitt"*; die Horizontalebene wird auch *„Grundriß-"*, die Vertikalebene *„Aufrißebene"* genannt.

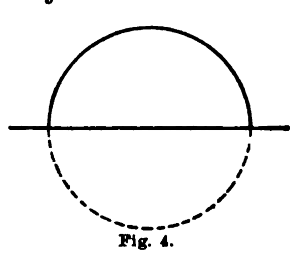
Eine Projektion in der Grundrißebene heißt *„Grundriß"*, eine solche in der Aufrißebene *„Aufriß"*.

Da zum Zeichnen nur eine einzige Ebene zur Verfügung steht, so dreht man eine der beiden Projektionsebenen um die Achse, bis sie mit

der anderen Projektionsebene zusammenfällt. Wir wollen etwa die Vertikalebene als Zeichenebene benutzen *und schlagen die vordere Horizontalebene nach unten,* also die hintere nach oben, bis sie gleichfalls in die Zeichenebene fällt.

Da wir uns den aufzunehmenden Körper wenn irgend möglich im I. Raume liegend denken wollten, so fallen seine Projektionen nur auf die nunmehr in der Zeichenebene oben liegende Vertikalebene bzw. Horizontalebene. Sollten je Teile der Zeichnung in die nunmehr unten liegende hintere Horizontalebene oder untere Vertikalebene fallen, so wollen wir diese Teile, um Mißverständnisse zu vermeiden, punktiert zeichnen. Fig. 3 zeigt z. B. einen Kreis, der in der Horizontalebene, und Fig. 4 einen Kreis, der in der Vertikalebene liegt. Beide Kreise schneiden die Achse.


Fig. 3.


Fig. 4.

3. Darstellung eines Punktes. Wir wählen einen beliebigen Punkt A (Fig. 5) und projizieren ihn einmal auf die vertikale Ebene — diese Projektion heiße a' — und dann auf die horizontale Ebene — diese Projektion heiße a. Endlich fällen wir noch von a' und a Lote auf die Projektionsachse; dann ist ohne weiteres ersichtlich, daß diese beiden Lote denselben Punkt der Achse treffen. Schlägt man nun die Horizontalebene wieder in die Zeichenebene herunter, so geht aus dem Gesagten hervor, daß die Vertikal- und die Horizontalprojektion eines und desselben Punktes auf einer Linie liegen müssen, die senkrecht zur Achse steht; wir wollen das Stück derselben von der Achse bis a' die *„Höhe“* von A und das Stück von der Achse bis a die *„Ordinate“* von A nennen.

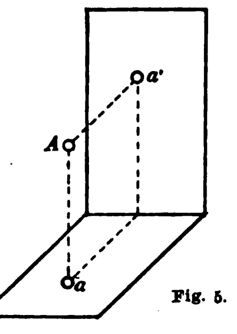
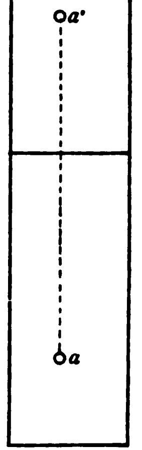


Fig. 5.



Grundriß und Aufriß eines Punktes liegen also auf einer Senkrechten zur Achse, oder kurz: sie liegen senkrecht unter- bzw. übereinander.

Beschränken wir uns auf den I. Raum, so stellt die Fig. 6a einen

Punkt in beliebiger Lage, Fig. 6b einen Punkt der Vertikalebene, Fig. 6c einen Punkt der Horizontalebene und Fig. 6d einen Punkt der Achse dar.

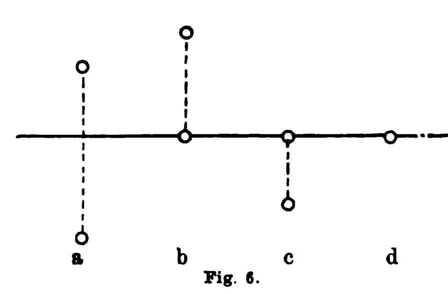
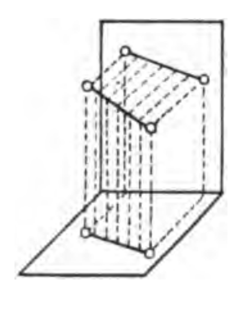


Fig. 6.

Ein Punkt ist dann bestimmt, wenn seine beiden Projektionen bestimmt sind; einen Punkt suchen, heißt also, seine Projektionen suchen.

4. Darstellung einer Geraden durch Projektion. Unter der Projektion einer Geraden versteht man die Gesamtheit der Projektionen aller ihrer Punkte (Fig. 7). Die Projektionslote der letzteren bilden eine Ebene — die *projizierende Ebene* —, deren Schnittlinie mit der Projektionsebene geradlinig ist; die Vertikal- und die Horizontalprojektion einer Geraden sind also geradlinig.


Fig. 7.

Damit eine Gerade bestimmt ist, müssen beide Projektionen bestimmt sein.

Fig. 8a zeigt eine Gerade in beliebiger Lage. Fig. 8b eine Parallele zur Horizontalebene; ihre Vertikalprojektion ist parallel zur Achse. Fig. 8c zeigt eine Parallele zur Vertikalebene, ihre Horizontalprojektion ist parallel zur Achse. Fig. 8d zeigt eine Parallele zur Achse; beide Projektionen sind parallel zu ihr. Fig. 8e zeigt eine Senkrechte zur Horizontalebene; ihre Vertikalprojektion steht senkrecht zur Achse, während sie sich auf die Horizontalebene in einen Punkt projiziert. Fig. 8f

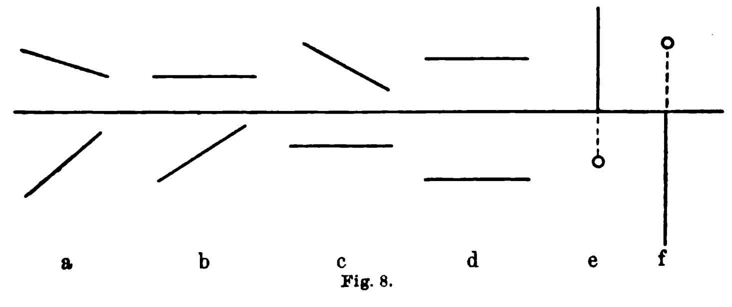


Fig. 8.

endlich stellt eine Senkrechte zur Vertikalebene dar; ihre Horizontalprojektion steht senkrecht zur Achse, während ihre Vertikalprojektion in einen Punkt ausartet.

5. Beziehungen zwischen Punkt und Gerade. Aus dem vorigen Paragraphen geht hervor, daß *ein Punkt dann und nur dann auf einer Geraden liegt, wenn seine Projektionen auf den gleichnamigen Projektionen der Geraden liegen.* Umgekehrt *geht eine Gerade dann und nur dann durch einen Punkt, wenn ihre Projektionen durch die gleichnamigen Projektionen des Punktes gehen.*

Hieraus folgt: *Die Schnittpunkte der gleichnamigen Projektionen zweier sich schneidender Geraden liegen senkrecht untereinander* (Fig. 9). Ist

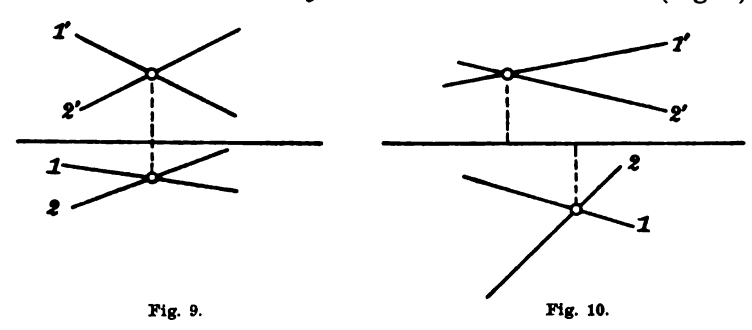


Fig. 9. Fig. 10.

dieses nicht der Fall, so stellen die Projektionen niemals zwei sich schneidende Gerade dar, sondern stets zwei *Windschiefe* (Fig. 10), d. h. zwei Gerade im Raume, die weder parallel sind noch sich schneiden, soweit man sie auch verlängern mag.

Bei zwei windschiefen Geraden ist es häufig von Wichtigkeit, in jeder der beiden Projektionsebenen festzustellen, *welche der beiden Geraden im Schnittpunkte ihrer gleichnamigen Projektionen von der anderen überdeckt wird.* Um ihre gegenseitige Lage in der Horizontalebene zu untersuchen, lote man den Schnittpunkt ihrer Horizontalprojektionen hinauf auf die beiden Vertikalprojektionen (Fig. 11). Die beiden dadurch erhaltenen Punkte seien a' und b'. Dann läuft im Schnittpunkte der beiden Horizontalprojektionen diejenige Gerade über der anderen her, deren Vertikalprojektion durch denjenigen der beiden Punkte a' und b' geht, der höher liegt, also von der Achse weiter entfernt ist; in der Figur ist es der Punkt b'; somit läuft in der Horizontalprojektion die Gerade 2 über der Geraden 1 her.

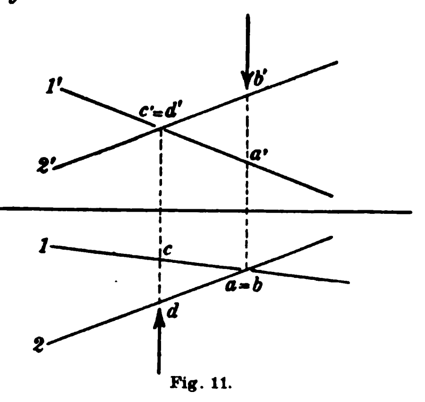


Fig. 11.

Genau so stellt man die gegenseitige Lage der Geraden 1 und 2 für den Schnittpunkt ihrer Vertikalprojektionen fest. Zu diesem Zwecke

lotet man diesen Punkt herunter auf die beiden Horizontalprojektionen; man erhält dadurch die beiden Punkte *c* und *d*. Im Schnittpunkte der Vertikalprojektionen läuft dann diejenige Gerade vor der andern her, deren Horizontalprojektion durch den vorderen der Punkte *c* und *d* geht, d. h. durch denjenigen, der den größeren Abstand von der Achse hat. In der Figur ist das der Punkt *d*; es läuft also im betrachteten Punkte die Gerade 2′ vor der andern her.

Da die projizierenden Ebenen zweier paralleler Geraden parallel sind, und parallele Ebenen von einer dritten Ebene — der Projektionsebene — in parallelen Linien geschnitten werden, so *sind die gleichnamigen Projektionen zweier paralleler Geraden gleichfalls parallel*, und umgekehrt, wenn sowohl die Horizontalprojektionen als auch die Vertikalprojektionen zweier Geraden unter sich parallel sind — aber auch nur dann — so sind die zugehörigen Geraden gleichfalls parallel (Fig. 12). Damit ist auch sofort die *Aufgabe* gelöst, durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden eine Parallele zu ziehen (Fig. 13).

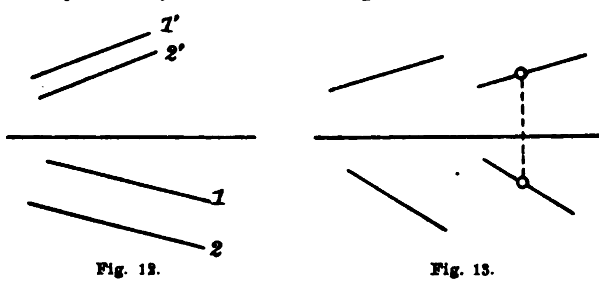
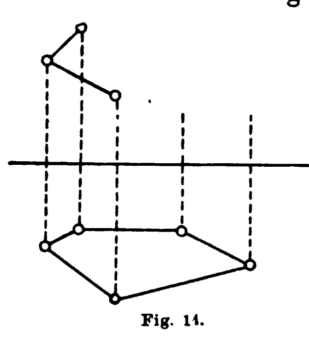
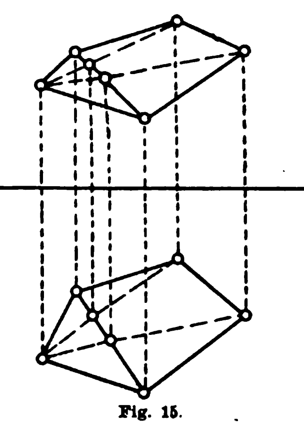


Fig. 12. Fig. 13.

6. Darstellung einer Ebene durch Polygonprojektion. Da eine Ebene in ihrer Lage bereits durch drei Punkte bestimmt ist, jeder weitere Punkt also einer bestimmten Bedingung genügen muß, um gleichfalls in der Ebene der drei ersten Punkte zu liegen, *so dürfen auch nur von drei Ecken eines Polygons je beide Projektionen willkürlich gewählt werden, während für jede weitere Ecke nur je eine Projektion beliebig angenommen werden darf* (Fig. 14); die zweiten Projektionen dieser weiteren Punkte müssen einer bestimmten Bedingung genügen, damit die zugehörigen Ecken gleichfalls in der durch die drei ersten Ecken bestimmten Polygonebene liegen. Die einfachste Bedingung hierfür ergibt sich aus der Überlegung, daß *die Diagonalen des Polygons sich schneiden müssen*, nicht windschief sein dürfen.


Fig. 14.

Es seien also z. B. von einem Polygon drei Ecken je durch beide Projektionen gegeben, während von zwei weiteren Ecken nur die beiden Vertikalprojektionen festliegen, und es sollen die fehlenden beiden Horizontalprojektionen konstruiert werden (Fig. 15). Zu diesem Zwecke zeichne man die beiden Projektionen derjenigen Diagonale, die durch die drei festbestimmten Eckpunkte gezogen werden kann, und ziehe in der Horizontalprojektion durch den dritten festliegenden Punkt die beiden Diagonalen nach den beiden übrigen Ecken. Die dadurch in der Horizontalebene entstehenden beiden Diagonalenschnittpunkte lote man nunmehr herunter auf die Horizontalprojektion der erstgezeichneten Diagonalen und ziehe durch diese Punkte Strahlen von der dritten gegebenen Ecke aus. Die Schnittpunkte dieser Strahlen mit den entsprechenden Ordinaten, die zu den Vertikalprojektionen der vierten und fünften Ecke gehören, sind deren fehlenden Horizontalprojektionen.


Fig. 15.

Unter besonderen Umständen *artet eine Projektion eines Polygons in eine gerade Linie* aus. So zeigt Fig. 16a ein Dreieck, dessen Ebene auf der Vertikalebene senkrecht steht; hier liegen die Vertikalprojektionen der drei Ecken auf einer geraden Linie. Ist das Dreieck außerdem parallel

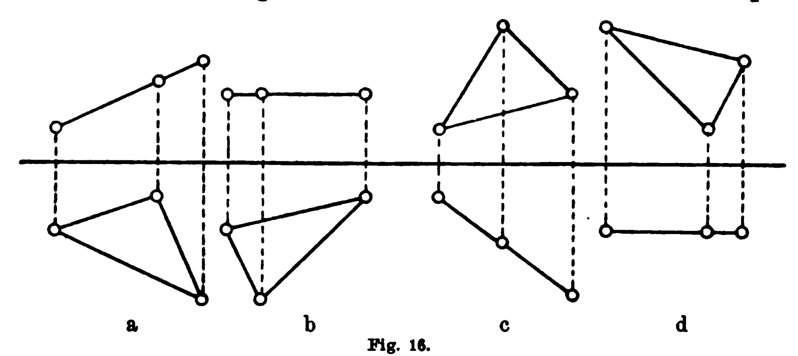
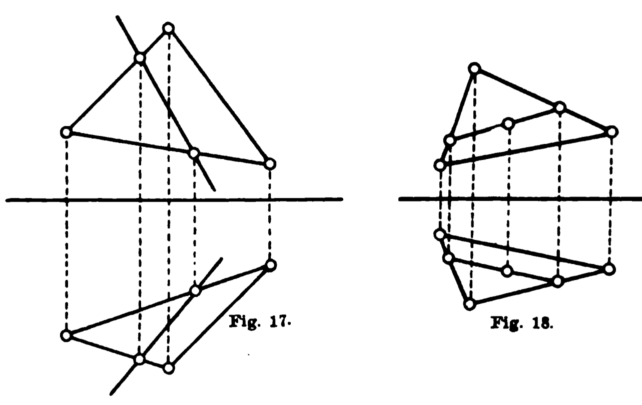


Fig. 16.

zur Horizontalebene (Fig. 16b), so wird diese Gerade parallel zur Achse. Fig. 16c zeigt ein Dreieck senkrecht zur Horizontalebene; seine Horizontalprojektion artet hier in eine gerade Linie aus, die wieder parallel zur Achse wird, wenn das Dreieck parallel zur Vertikalebene liegt (Fig. 16d).

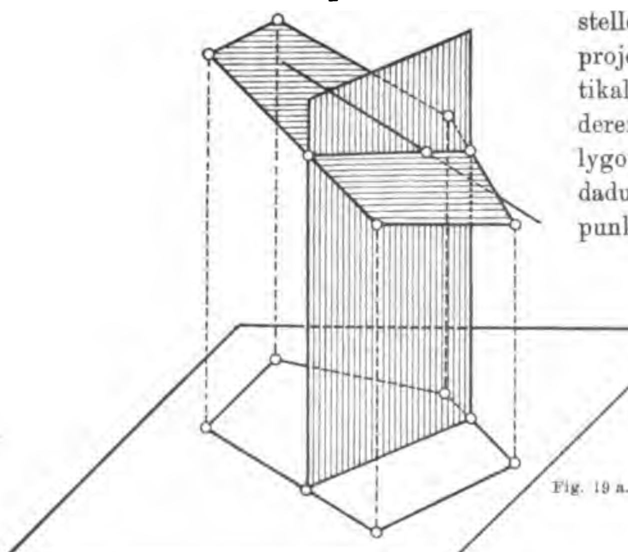
7. Beziehungen zwischen Punkt, Gerade und Ebene. Nach dem in Paragraph 5 Gesagten *liegt eine Gerade dann und nur dann in der Ebene*

eines Polygons, wenn ihre Schnittpunkte mit dem Umfange des Polygons in der Vertikalebene senkrecht über den entsprechenden Schnittpunkten der Horizontalprojektion liegen (Fig. 17). Ist dieses nicht der Fall, so wird die Polygonebene von der Geraden geschnitten.


Fig. 17. Fig. 18.

Damit ein Punkt in der Ebene eines Polygons liege, muß die eben ausgesprochene Bedingung für irgendeine durch den Punkt gehende und in der Ebene liegende Gerade erfüllt sein (Fig. 18). Es spielt hier *die gerade Linie eine vermittelnde Rolle zwischen Punkt und Ebene,* und es sei gleich hier bemerkt, daß diese Vermittlung durch die Gerade bei allen Beziehungen zwischen Punkt und Ebene ausgezeichnete Dienste leistet.

Um den *Schnittpunkt einer Geraden und eines Polygons* zu bestimmen, stelle man über der Horizontalprojektion der Geraden eine vertikale Ebene auf und bestimme deren Schnittlinie mit dem Polygon in der Vertikalprojektion dadurch, daß man die Schnittpunkte der Horizontalprojektion der Geraden mit der Horizontalprojektion des Polygons hinauflotet auf die Vertikalprojektion derselben Polygonseiten (Fig. 19). Die Verbindungslinie der dadurch erhaltenen beiden Punkte ist dann die Vertikalprojektion der Schnittlinie der Hilfsebene mit dem Polygon. Da in dieser Schnittlinie auch der gesuchte Schnittpunkt der Geraden und des Polygons liegen muß, so ist der Schnittpunkt der Vertikalprojektion der Schnitt-


Fig. 19 a.

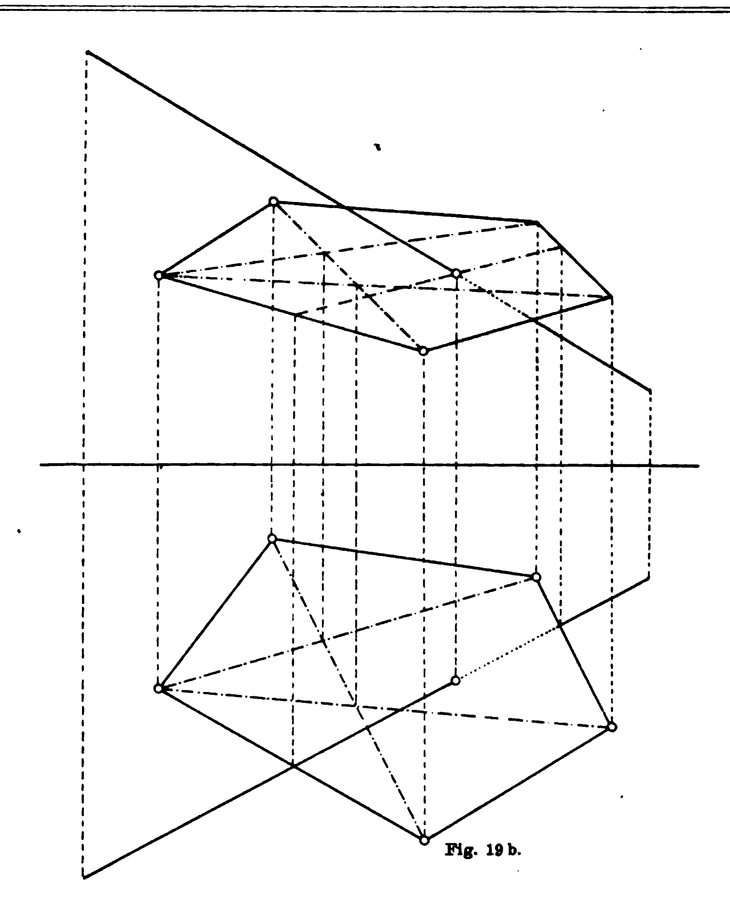


Fig. 19 b.

linie mit der Vertikalprojektion der Geraden die Vertikalprojektion des gesuchten Punktes. Seine Horizontalprojektion erhält man durch Herunterloten auf die Horizontalprojektion der Geraden. Die Ermittelung des Teiles der Geraden, der durch das Polygon verdeckt wird, geschieht nach Paragraph 5, Fig. 11.

Wenn *die Gerade senkrecht auf einer der beiden Projektionsebenen* steht, z. B. der Horizontalebene (Fig. 20), so hat man nur durch den Punkt, in den sich in der Horizontalprojektion die ganze Gerade projiziert, eine beliebige Hilfslinie in der Ebene des Polygons zu legen, deren Schnittpunkt mit der Vertikalprojektion der Geraden sofort den gesuchten Schnittpunkt ergibt.

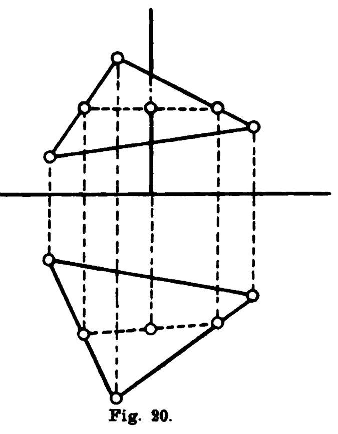


Fig. 20.

Die Lösung der eben besprochenen Aufgabe ist insofern von der größten Wichtigkeit, als sie bei allen *Durchdringungsaufgaben* fortgesetzt zur Anwendung kommt. Wenn z. B. *die Projektionen zweier sich schneidender Polygone gegeben sind, und es ist ihre Schnittlinie zu bestimmen* (Fig. 21), so kann das nur dadurch geschehen, daß man die Kanten des einen Polygons daraufhin untersucht, ob sie in die Ebene des anderen

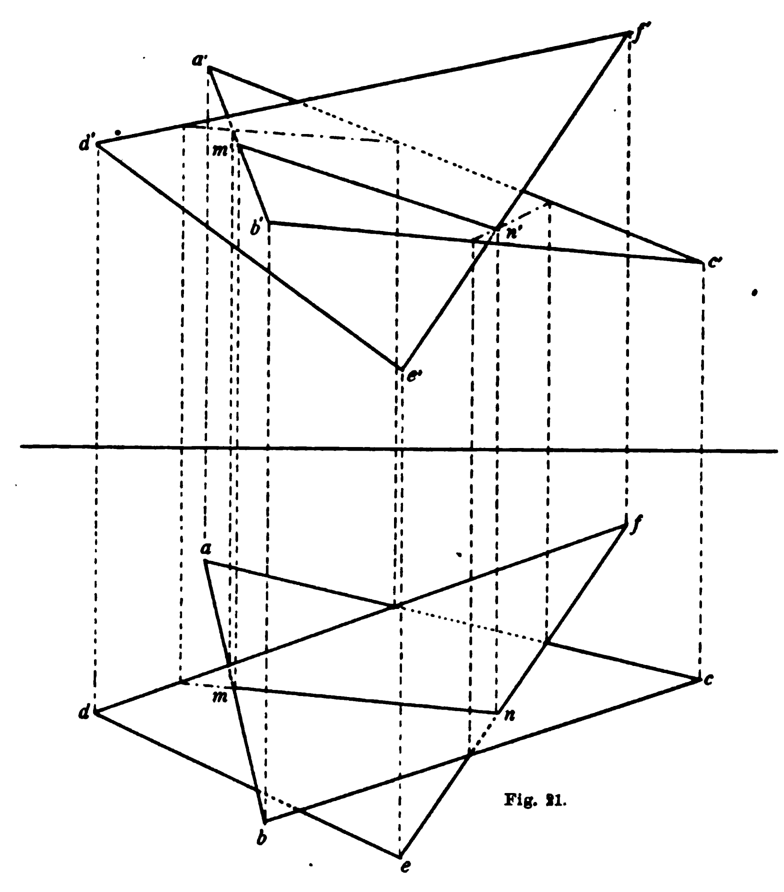


Fig. 21.

einstechen — d. h. sie durchdringen —, und hierauf dieselbe Untersuchung mit den Seiten des anderen Polygons in bezug auf die Ebene des ersten vornimmt. Hierdurch erhält man zwei Punkte, deren Verbindungslinie die gesuchte Schnittlinie ist. Zur vollständigen Lösung dieser Aufgabe gehört noch *die Bestimmung derjenigen Flächenstücke jedes Polygons, die von dem anderen verdeckt werden.* Es geschieht dadurch, daß man in einem Schnittpunkte der beiden Polygonumrisse in einer — etwa der Horizontalprojektion — nach Paragraph 5, Fig. 11 bestimmt,

welche von den beiden Linien über der andern herläuft. Wenn für einen solchen Punkt auf diese Weise der Zweifel über sichtbar und unsichtbar behoben ist, so ist, wenn man von hier aus längs der Peripherie eines Polygons bis zum nächsten Schnittpunkt bzw. bis zum nächsten Durchdringungspunkt herumläuft, auch für diese Punkte der Zweifel ohne weiteres beseitigt. Ebenso verfährt man in der Vertikalprojektion.

Erwähnt sei noch, daß man die Fundamentalkonstruktion zur Auffindung eines Durchdringungspunktes natürlich nicht für alle Seiten auszuführen hat. Liegt z. B. eine Projektion einer Polygonseite gänzlich außerhalb des andern Polygons, so kann auf dieser natürlich kein Schnittpunkt liegen. Außerdem beachte man, daß es entweder gar keinen oder zwei Punkte gibt. — Es sind *zwei Arten von Schnittlinien* möglich, entweder durchsticht das eine Polygon die Fläche des andern, dann liegt die Schnittlinie ganz innerhalb des letzteren und verbindet zwei Umfangspunkte des ersteren. Oder die beiden Polygone umklammern sich in ihrer Schnittlinie gegenseitig gabelförmig (Fig. 21), dann liegt auf jedem Polygonumfang ein Punkt.

8. Bestimmung der wahren Länge einer Strecke und wahren Gestalt eines Polygons. Um *die wahre Länge einer Strecke AB* (Fig. 22)

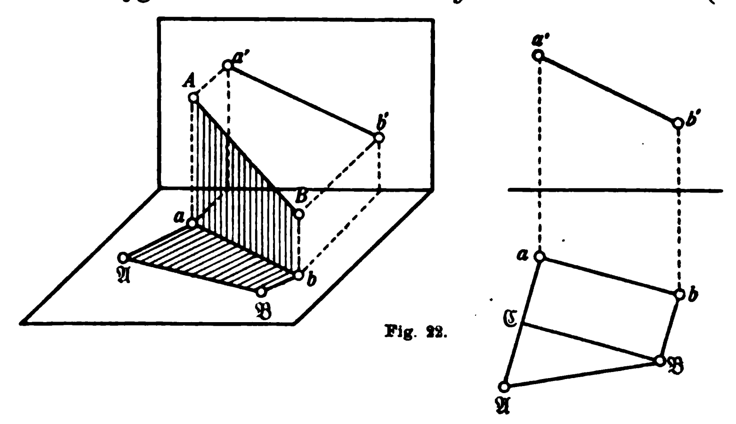


Fig. 22.

zu bestimmen, beachte man, daß sie mit ihrer Horizontalprojektion ab ein Trapez bildet, dessen parallele Seiten gleich den Höhen der beiden Punkte A und B sind. Man kann dasselbe dadurch in wahrer Gestalt erhalten, daß man es um ab in die Horizontalebene nach ab𝔄𝔅 umklappt, wobei a𝔄 und b𝔅 senkrecht auf ab stehen und a𝔄 gleich der Höhe von A und b𝔅 gleich der Höhe von B ist; 𝔄𝔅 ist dann die gesuchte wahre Länge von AB. Zieht man noch 𝔅ℭ parallel zu ab, so erhält man in 𝔄𝔅ℭ ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete gleich der Hori-

zontalprojektion der gegebenen Strecke und dessen andere Kathete gleich dem Höhenunterschied ihrer Endpunkte ist. Man erhält somit den höchst wichtigen *Satz: Die wahre Länge einer Strecke ist gleich der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten die Horizontalprojektion der Strecke und der Höhenunterschied ihrer Endpunkte sind* (Fig. 23).

Ist eine Strecke parallel der Vertikalebene (Fig. 24), *so hat man bereits in ihrer Vertikal-*

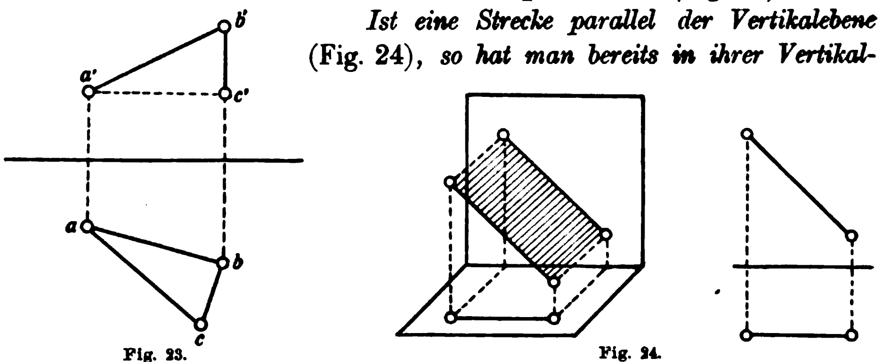


Fig. 23. Fig. 24.

projektion ihre wahre Länge. Ebenso ist die Horizontalprojektion einer Strecke, die parallel zur Horizontalebene ist, gleich der wahren Länge derselben (Fig. 25).

Wird eine Strecke AB durch einen Punkt C geteilt, so ist das Verhältnis der beiden Teilstrecken dasselbe wie dasjenige, in dem die Projek-

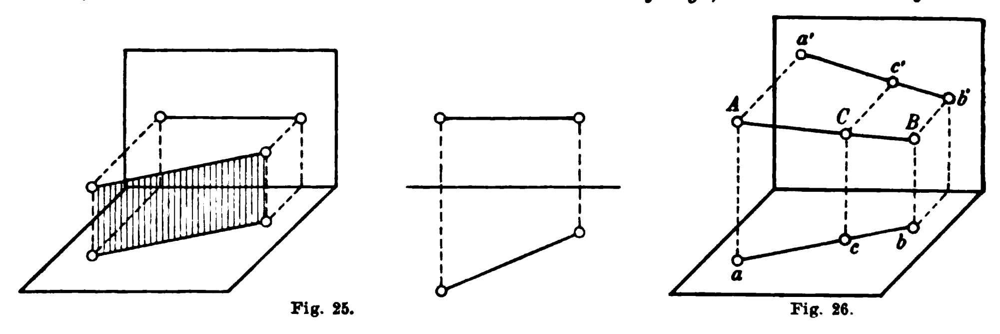


Fig. 25. Fig. 26.

tionen des Teilpunktes c' bzw. c die Strecke a'b' bzw. ab teilen (Fig. 26). Es folgt das daraus, daß die gleichnamigen Projektionsstrahlen unter sich parallel sind. Man kann hiervon dann mit Vorteil Gebrauch machen, wenn eine, z. B. die Horizontalprojektion einer Strecke, sehr steil zur Achse gerichtet ist und auf diese Projektion ein Teilpunkt von der zugehörigen Vertikalprojektion heruntergelotet werden soll; dieses Lot schneidet dann die Horizontalprojektion unter einem spitzen Winkel — einen solchen Schnittpunkt wollen wir einen *„langen Schnitt“* nennen —, so daß der Punkt in der Horizontalprojektion nicht scharf bestimmt werden kann; er

muß dann, wenn es nicht auf andere Weise noch einfacher geht, mit Hilfe der obigen Beziehung genau bestimmt werden (Fig. 27).

Fig. 27.

Soll auf einer Geraden von einem Punkte A aus, dessen beide Projektionen a und a' gegeben sind, *eine Strecke s abgetragen* werden (Fig. 28), die nur ihrer wahren Länge nach bekannt ist, so klappe man zunächst eine beliebige Strecke ab, $a'b'$ in derselben Weise wie zu Beginn dieses Paragraphen in die Horizontalebene nach 𝔄𝔅 um, trage von 𝔄 aus die gegebene Strecke s bis ℭ ab und klappe nunmehr durch Ziehen zweier Lote den Punkt ℭ wieder zurück nach c bzw. c'.

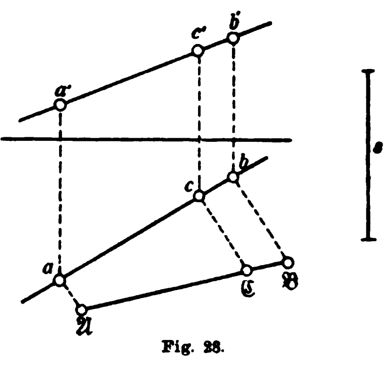
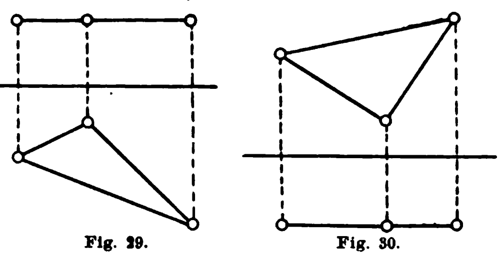


Fig. 28.

Um *die wahre Gestalt eines Polygons* aus seinen beiden Projektionen zu ermitteln, zerlege man dasselbe durch Ziehen der Diagonalen von einer Ecke aus in lauter Dreiecke und bestimme der Reihe nach deren wahre Gestalt dadurch, daß man die wahren Längen ihrer Seiten ermittelt. — Andere Methoden zur Bestimmung der wahren Gestalt eines Polygons werden wir noch in Paragraph 19, Aufgabe 2 durch Umklappen des Polygons in eine der beiden Projektionsebenen und in Paragraph 21 durch Drehen desselben in eine parallele Lage zu einer der beiden Projektionsebenen kennen lernen.

Liegt ein Polygon parallel zur Horizontalebene, projiziert es sich also in der Vertikalebene als gerade Linie parallel zur Achse, *so hat man in seiner Horizontalprojektion bereits seine wahre Gestalt* (Fig. 29). *Ebenso hat man bereits in der Vertikalprojektion eines Polygons seine wahre Gestalt, wenn es parallel zur Vertikalebene liegt,* seine Horizontalprojektion sich also als gerade Linie parallel zur Achse darstellt (Fig. 30).


Fig. 29. Fig. 30.

II. Kapitel.
Darstellung von Geraden und Ebenen durch Spuren.

9. Die Spuren einer Geraden. Verlängert man eine Gerade, bis sie die Projektionsebenen schneidet, so nennt man diese Durchstoßpunkte ihre *„Horizontal- bzw. Vertikalspur“* (Fig. 31).

Es ergibt sich sofort die Aufgabe, *die Spuren einer Geraden, deren Projektionen gegeben sind, zu bestimmen* (Fig. 32). Aus Fig. 31 erkennt

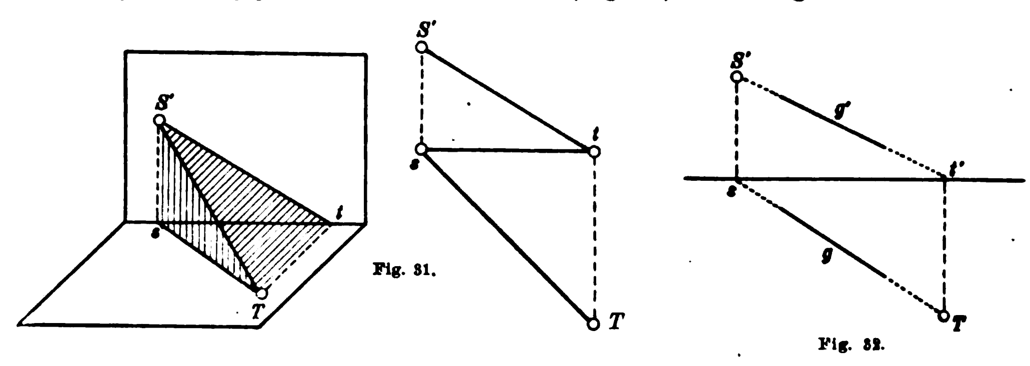


Fig. 31.

Fig. 32.

man, daß die Horizontalspur einer Geraden senkrecht unter dem Schnittpunkt ihrer Vertikalprojektion mit der Achse, und daß ihre Vertikalspur senkrecht über dem Schnittpunkt ihrer Horizontalprojektion mit der Achse liegt. Damit ist auch sofort die *umgekehrte Aufgabe* gelöst, die Projektion einer Geraden aus ihren Spuren zu bestimmen. Man hat nur ihre Spuren auf die Achse zu loten und die Fußpunkte dieser Lote je mit der anderen Spur zu verbinden.

Liegt eine *Gerade parallel der Horizontalebene*, so fällt ihre Horizontalspur ins Unendliche (Fig. 33). Ebenso fällt die Vertikalspur einer

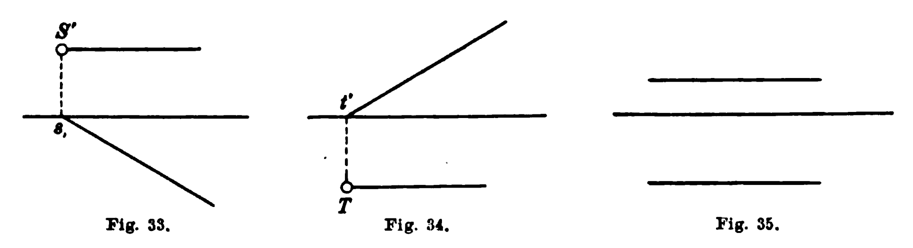


Fig. 33. Fig. 34. Fig. 35.

Geraden, die *parallel zur Vertikalebene* liegt, ins Unendliche (Fig. 34). Endlich liegen die Spuren einer *Geraden parallel zur Achse* beide im Unendlichen (Fig. 35).

10. Die Spuren einer Ebene. Die Durchschnittslinien einer Ebene mit den beiden Projektionsebenen heißen ihre *„Vertikal- bzw. ihre Horizontalspur“*. Sie schneiden sich in einem Punkt der Achse (Fig. 36).

Steht eine Ebene senkrecht auf der Horizontalebene (Fig. 37), *so steht ihre Vertikalspur senkrecht auf der Achse, ebenso steht die Horizontalspur einer Ebene, die senkrecht auf der Vertikalebene steht* (Fig. 38), *senkrecht zur Achse. Verläuft eine Ebene parallel zur Achse, so sind beide Spuren der Ebene parallel* (Fig. 39). *Geht eine Ebene durch die Achse selbst hindurch, so fallen beide Spuren in die Achse hinein* (Fig. 40); *um eine solche Ebene festzulegen, muß noch mindestens einer ihrer Punkte außerhalb der Achse durch seine Projektionen gegeben sein.*

Es sei gleich hier bemerkt, daß man *eine durch ihre Spuren ge-*

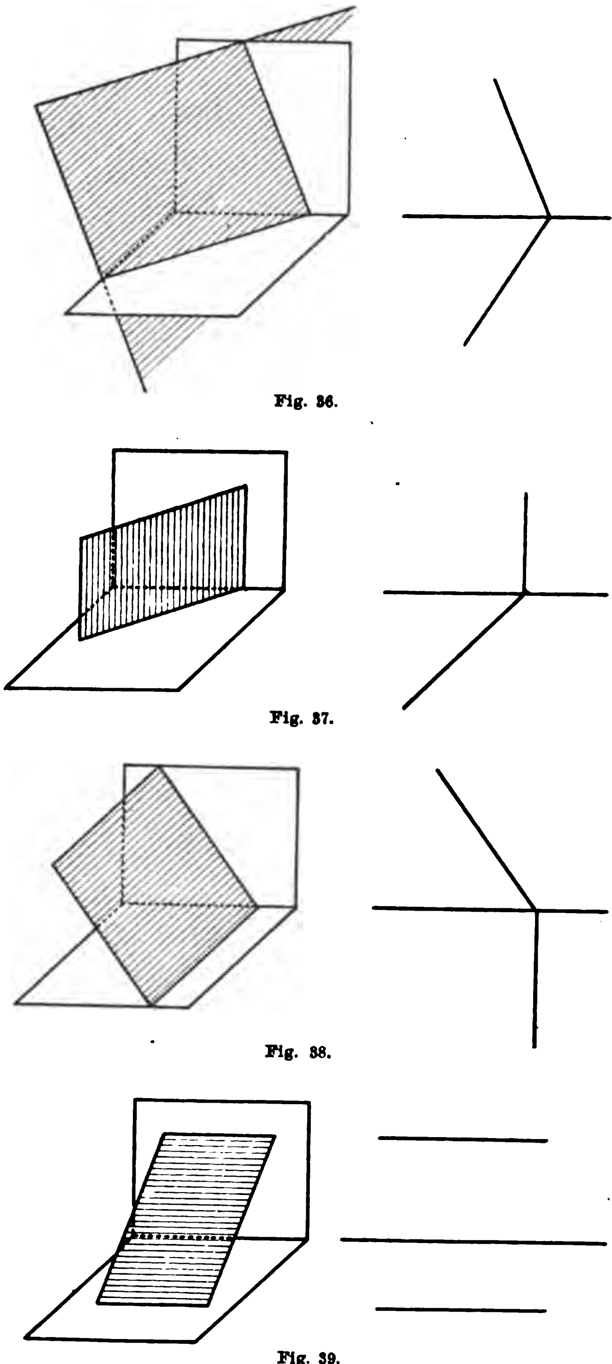

Fig. 36.

Fig. 37.

Fig. 38.

Fig. 39.

gebene Ebene auch auffassen kann als ein Polygon, von dem eine Seite — die Vertikalspur — in der Vertikalebene, eine anstoßende Seite — die Horizontalspur — in der Horizontalebene liegt, und dessen übrige Seiten als unwesentlich nicht gezeichnet sind. *Durch diese Auffassung kann man ohne weiteres die Konstruktionen, die für ein Polygon angegeben sind, auf eine durch ihre Spuren gegebene Ebene übertragen.* Je eine Projektion der beiden Polygonseiten — Spuren — liegt in der Achse.

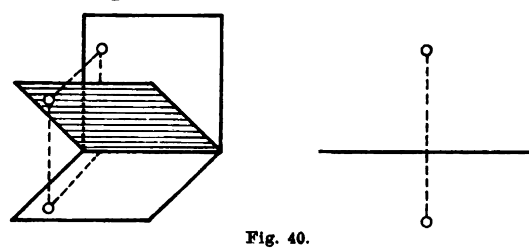


Fig. 40.

11. Beziehungen zwischen Gerade und Ebene. Aus der am Schlusse des vorigen Paragraphen angegebenen Auffassung einer durch ihre Spuren gegebenen Ebene als Polygonprojektion ergibt sich sofort, daß *eine Gerade dann und nur dann in einer Ebene liegt, wenn ihre Spuren auf den gleichnamigen Spuren der Ebene liegen,* und umgekehrt, *daß eine Ebene dann und nur dann durch eine Gerade hindurchgeht, wenn ihre Spuren durch die gleichnamigen Spuren der Geraden hindurchgehen* (Fig. 41).

Da die *Schnittlinie zweier Ebenen* diesen gemeinsam ist, so müssen die Spuren der Schnittgeraden gleichzeitig auf den gleichnamigen Spuren beider Ebenen liegen, d. h. *die Schnittpunkte der Spuren der Ebenen sind die Spuren ihrer Schnittlinien* (Fig. 42).

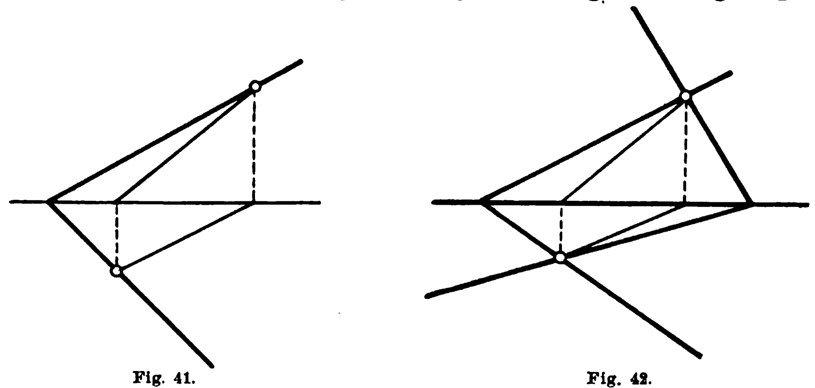


Fig. 41. Fig. 42.

Die gleichnamigen Spuren zweier paralleler Ebenen sind parallel (Fig. 43).

12. Beziehungen zwischen Punkt und Ebene. *Zwischen Punkt und Ebene ist auch hier die Gerade Vermittlerin.* Ein Punkt liegt also dann und nur dann in einer Ebene, wenn er auf einer Geraden innerhalb der Ebene liegt, und umgekehrt (Fig. 44). Liegt daher eine Ebene durch Spuren gezeichnet vor, so *darf man von einem ihrer Punkte nur*

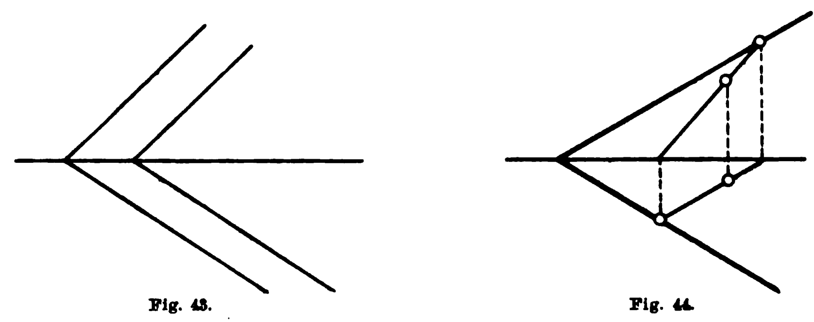


Fig. 43. Fig. 44.

eine Projektion willkürlich wählen, die andere Projektion ist dann durch die ausgesprochene Bedingung bestimmt. Dabei *vereinfacht* sich die Konstruktion dieser zweiten Projektion dadurch, daß man nicht eine beliebige Gerade, sondern eine *„Spurparallele"* benutzt, d. h. eine Gerade, die entweder der Horizontalspur (Fig. 45) oder der Vertikalspur (Fig. 46)

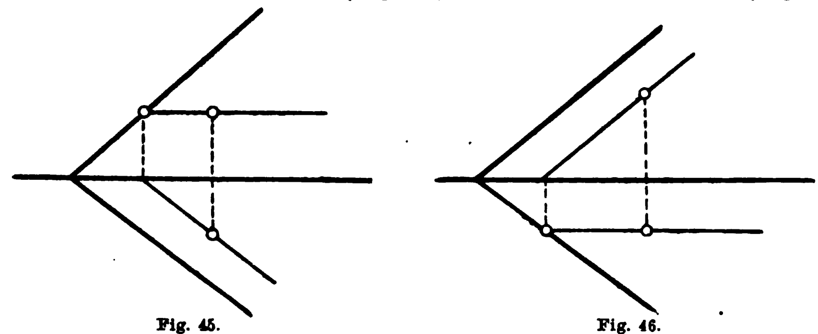


Fig. 45. Fig. 46.

der Ebene parallel ist; im ersten Falle ist die Horizontalprojektion der Geraden parallel der Horizizontalspur der Ebene und die Vertikalprojektion der Geraden parallel der Achse; eine Spurparallele zur Vertikalspur der Ebene projiziert sich dagegen so, daß ihre Vertikalprojektion parallel zur Vertikalspur der Ebene und ihre Horizontalprojektion parallel zur Achse ist.

13. Anwendungen.

1. Aufgabe: Es soll durch einen Punkt eine Ebene gelegt werden, die einer gegebenen Ebene parallel ist.

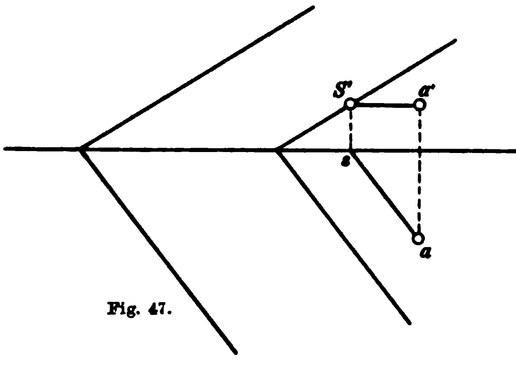
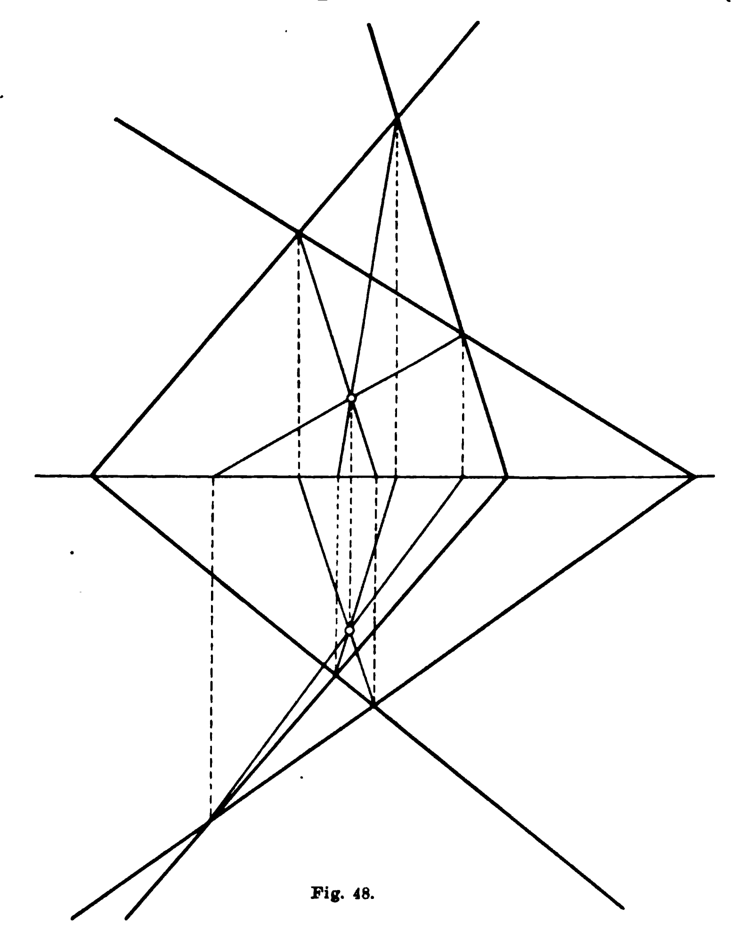


Fig. 47.

Lösung: Man lege in die gegebene Ebene eine beliebige Gerade, ziehe durch den Punkt eine Parallele dazu und durch die Spuren der letzteren die Spuren der gesuchten Ebene parallel zu den gleichnamigen der gegebenen. — Eine Vereinfachung kann man durch Benutzung einer Spurparallelen erzielen. Dabei erübrigt sich die Zeichnung derselben in der gegebenen Ebene (Fig. 47).

2. *Aufgabe: Es soll der Schnittpunkt dreier Ebenen bestimmt werden* (Fig. 48).


Fig. 48.

Lösung: Man bestimme die drei Schnittlinien je zweier Ebenen; ihr gemeinsamer Schnittpunkt ist der gesuchte Schnittpunkt der drei Ebenen.

Es genügt natürlich die Konstruktion nur zweier Schnittlinien; doch ist es empfehlenswert, als Genauigkeitsprobe auch die dritte zu zeichnen: sie muß durch den Schnittpunkt der beiden ersten hindurchgehen. Eine weitere Genauigkeitsprobe liefert die Bedingung, daß die beiden Projektionen des Schnittpunktes senkrecht untereinander liegen müssen.

3. *Aufgabe: Es soll eine Ebene durch drei Punkte gelegt werden* (Fig. 49).

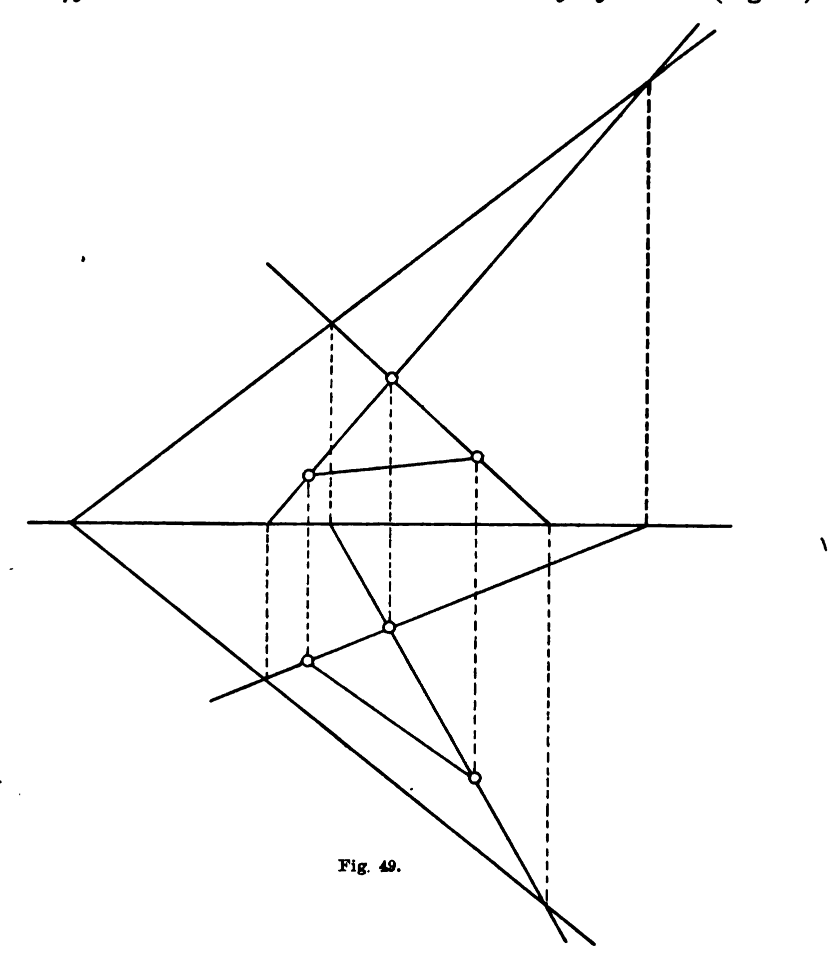
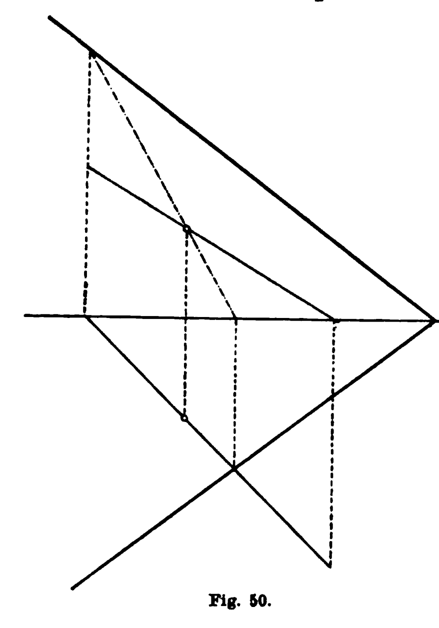


Fig. 49.

Lösung: Man ziehe die drei Verbindungslinien der Punkte und lege durch zwei der Linien eine Ebene; diese muß dann auch durch die dritte Linie gehen, was als Genauigkeitsprobe dienen kann.

4. *Aufgabe: Es soll der Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene bestimmt werden* (Fig. 50).

Lösung: Diese höchst wichtige Konstruktion ist genau dieselbe wie die für den Schnittpunkt eines Polygons und einer Geraden angegebene; man errichte also über der Horizontalprojektion der Geraden eine Vertikalebene; ihre Horizontalspur fällt mit der Horizontalprojektion der Geraden zusammen, während ihre Vertikalspur auf der Achse senkrecht steht. Letztere Spur bringe man zum Schnitt mit der Vertikalspur der gegebenen Ebene; der Schnittpunkt ist die Vertikalspur der Linie, in der sich die Hilfsebene und die gegebene Ebene schneiden. Die Horizontalspur derselben Schnittlinie ist der Schnittpunkt der Horizontalspuren beider Ebenen. Geht man von diesem senkrecht hoch bis zur Achse, und verbindet man den Fußpunkt dieses Lotes mit der Vertikalspur der Schnittgeraden, so erhält man die Vertikalprojektion der letzteren. Ihr Schnittpunkt mit der Vertikalprojektion der gegebenen Geraden ist die Vertikalprojektion des gesuchten Schnittpunktes. Seine Horizontalprojektion erhält man schließlich noch durch Herunterloten auf die Horizontalprojektion der Geraden.


Fig. 50.

Steht die Gerade senkrecht auf einer der Projektionsebenen, z. B. der Horizontalebene, so lege man durch die Gerade eine beliebige vertikale Ebene (Fig. 51).

Fig. 51.

14. Senkrechte Lage einer Geraden zu einer Ebene. Daraus, daß ein rechter Winkel, dessen einer Schenkel der Projektionsebene parallel ist, sich wieder als ein rechter Winkel projiziert (Fig. 52), folgt sofort, *daß die Projektion einer Geraden, die senkrecht auf einer Ebene steht, senkrecht auf der Spur der Ebene ist* (Fig. 53).

Ist daher von einem Punkte auf eine Ebene, die durch ihre Spuren gegeben ist, ein Lot zu fällen, so hat man nur von der Projektion des

Punktes Lote auf die gleichnamigen Spuren der Ebene zu fällen; die durch diese Lote dargestellte Gerade steht dann senkrecht auf der Ebene (Fig. 54).

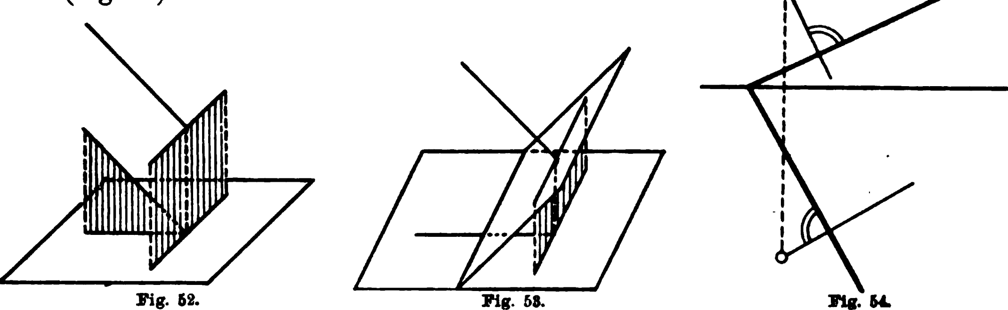


Fig. 52. Fig. 53. Fig. 54.

Ist die Ebene nicht durch ihre Spuren, sondern durch die *Projektion eines Polygons* gegeben, so ist es nicht nötig, seine Spuren zu be-

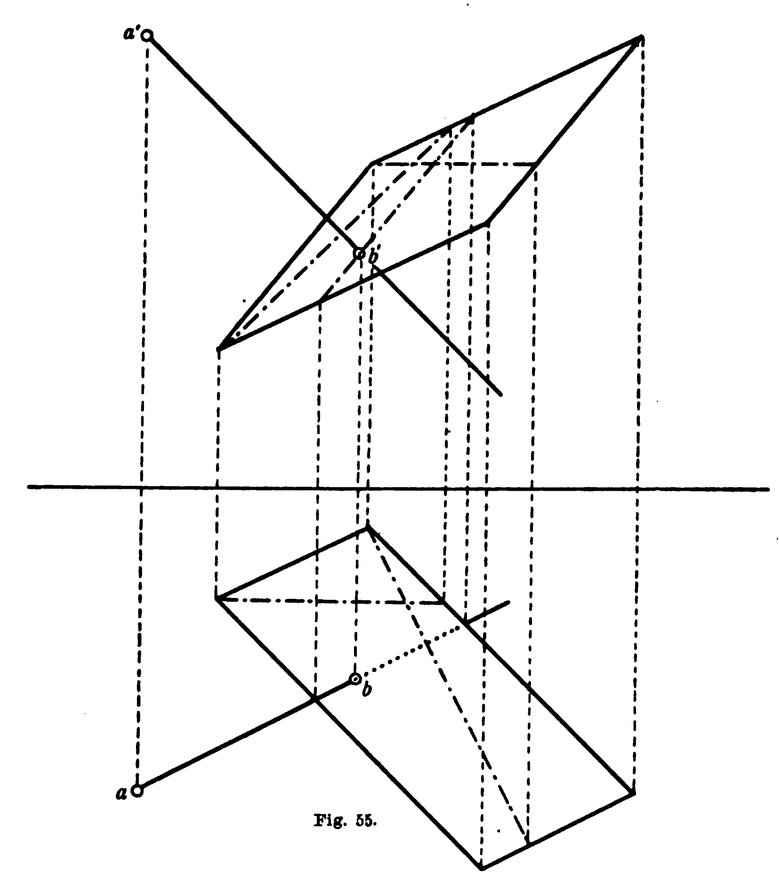


Fig. 55.

stimmen; *es genügt, zwei Spurparallelen dadurch zu ermitteln,* daß man das Polygon sowohl durch eine Ebene parallel zur Vertikalebene, als auch durch eine solche parallel zur Horizontalebene schneidet (Fig. 55); dabei legt man diese beiden Hilfsebenen zweckmäßig durch eine Ecke des Polygons.

15. Anwendungen.

1. Aufgabe: Es soll durch einen Punkt eine Ebene senkrecht zu einer Geraden gelegt werden (Fig. 56).

Lösung: Man lege durch den Punkt eine Spurparallele zu der Horizontalspur der gesuchten Ebene; die Horizontalprojektion dieser Spurparallelen steht dabei senkrecht zu der Horizontalprojektion der gegebenen Geraden. Durch die Vertikalspur der Hilfsgeraden geht dann die Vertikalspur

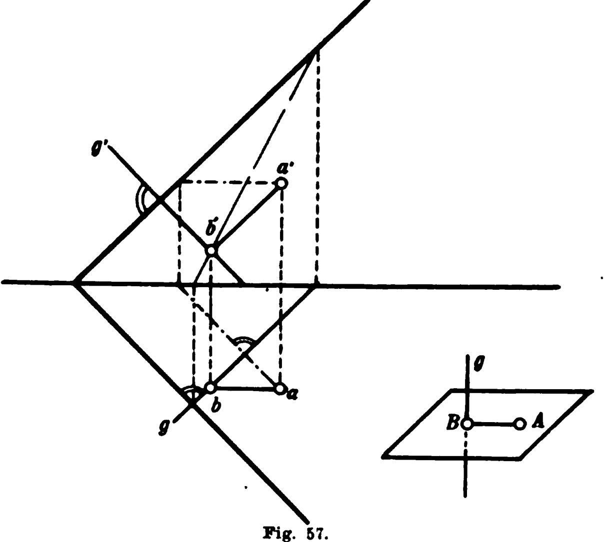


Fig. 56. Fig. 57.

der gesuchten Ebene senkrecht zur Vertikalprojektion der gegebenen Geraden.

2. Aufgabe: Es soll von einem Punkte eine Senkrechte auf eine Gerade gefällt werden (Fig. 57).

Lösung: Man lege durch den Punkt eine Ebene senkrecht zu der Geraden, wie in der ersten Aufgabe dieses Paragraphen angegeben, und bestimme den Schnittpunkt dieser Ebene mit der Geraden. Die Verbindungslinie desselben mit dem gegebenen Punkte ist das gesuchte Lot. — Ist die Gerade parallel

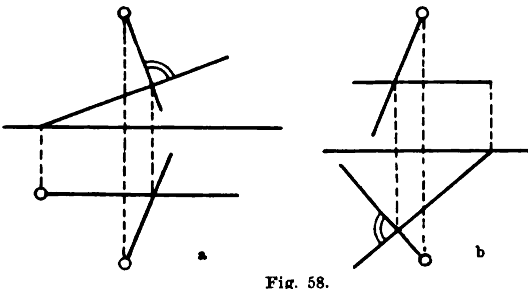


Fig. 58.

einer Projektionsebene, so kann man nach dem Anfang des vorigen Paragraphen die Senkrechte direkt ziehen (Fig. 58).

3. *Aufgabe: Durch eine Gerade soll eine Ebene gelegt werden, die senkrecht auf einer anderen Ebene steht* (Fig. 59).

Lösung: Man fälle von einem beliebigen Punkte der Geraden ein Lot auf die Ebene und lege durch die Spuren desselben und die Spuren der Geraden die Spuren der gesuchten Ebene.

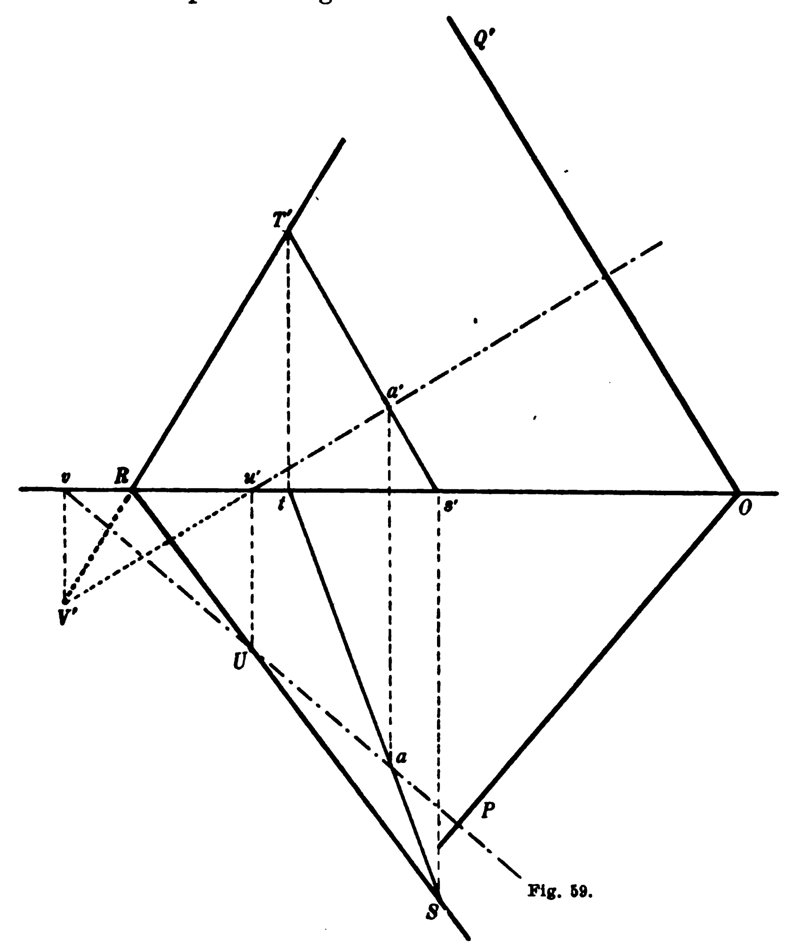


Fig. 59.

16. Umklappen und Drehen von Ebenen, die senkrecht auf einer Projektionsebene stehen. Befindet sich in einer Ebene, die senkrecht zur Horizontalebene liegt, ein Punkt, so findet man nach *Umklappung der Ebene* um ihre Horizontalspur dessen neue Lage dadurch, daß man die Höhe desselben von der bei der Umklappung liegen geblie-

benen Horizontalprojektion des Punktes aus senkrecht zur Umklappungsspur abträgt (Fig. 60).

Dreht man dieselbe Ebene um ihre Vertikalspur in die Vertikalebene, so beschreibt dabei die Horizontalprojektion des Punktes einen

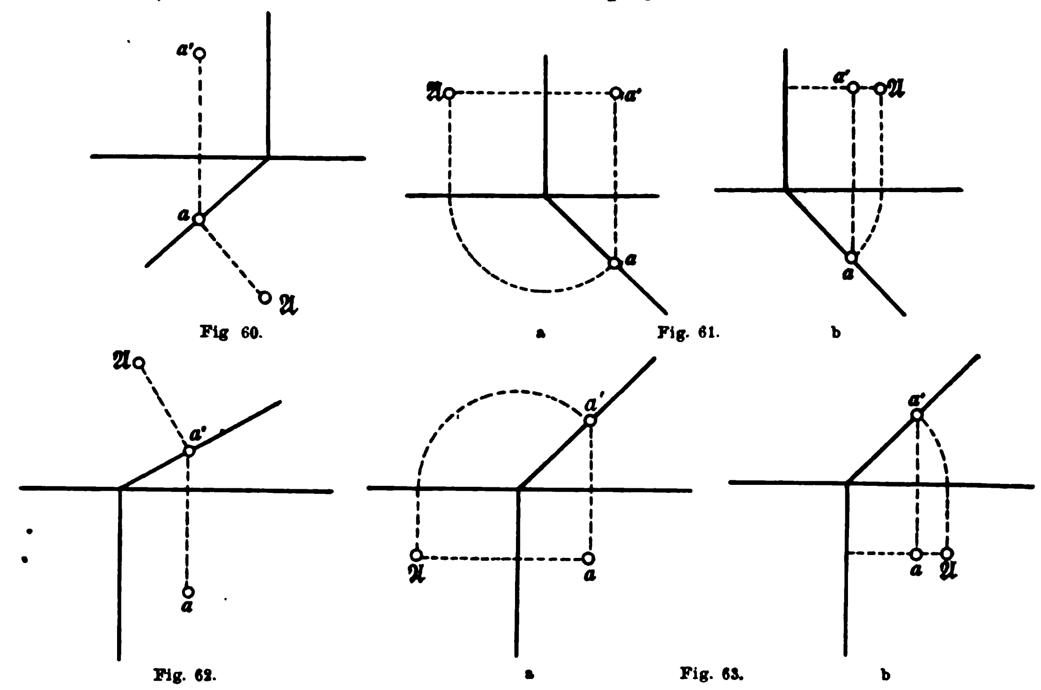


Fig 60. a Fig. 61. b

Fig. 62. a Fig. 63. b

Kreisbogen um den Scheitelpunkt des Spurwinkels. Lotet man den Schnitt dieses Kreisbogens mit der Achse hinauf bis zum Schnitt mit einer durch die Vertikalprojektion des Punktes gezogenen Horizontalen, so hat man in diesem Schnittpunkte die gedrehte Lage des Punktes in der Vertikalebene. Dabei kann man um einen spitzen oder um einen stumpfen Winkel drehen (Fig. 61).

Entsprechend sind die Konstruktionen für eine Ebene, die senkrecht zur Vertikalebene steht, und die entweder in die Vertikalebene um ihre Vertikalspur umgeklappt (Fig. 62) oder in die Horizontalebene um ihre Horizontalspur gedreht werden soll (Fig. 63); doch benützt man diese Konstruktionen seltener.

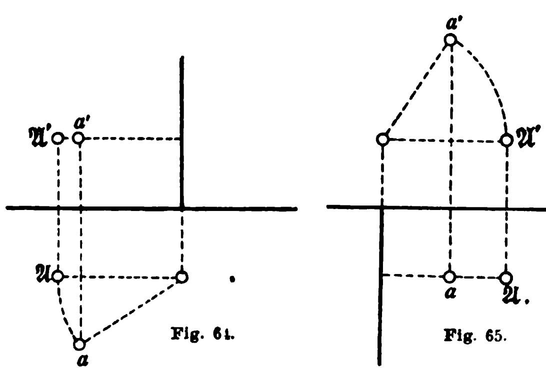


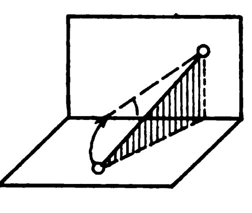
Fig. 64. Fig. 65.

Nach dem Gesagten bietet auch die *Drehung eines Punktes um eine Gerade,* die senkrecht auf der Horizontalebene steht in eine Ebene parallel zur Vertikalebene (Fig. 64) und ebenso das Drehen eines Punktes um eine Gerade, die senkrecht auf der Vertikalebene steht in eine zur Horizontalebene parallele Ebene (Fig. 65) keine Schwierigkeit mehr.

17. Anwendungen.

1. Aufgabe: Es soll der Horizontal- und der Vertikalneigungswinkel einer Geraden bestimmt werden.

Lösung: Um den Horizontalneigungswinkel einer Geraden zu bestimmen, drehe man entweder die durch die Gerade gehende vertikale Ebene um ihre Vertikalspur in die Vertikalebene (Fig. 66), oder man klappe dieselbe Ebene um ihre Horizontalspur, d. h. um die Horizontalprojektion der Geraden in die Horizontalebene (Fig. 67). — Den Horizontalneigungswinkel einer Geraden parallel zur Vertikalebene hat man in dieser direkt (Fig. 68).



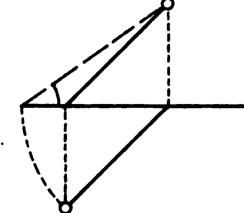
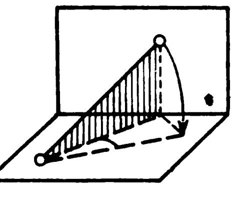


Fig. 66.



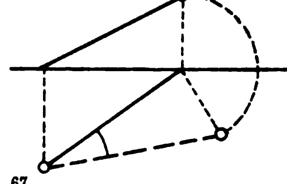


Fig. 67.

Um den Vertikalneigungswinkel einer Geraden zu bestimmen, drehe

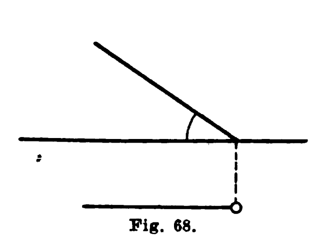


Fig. 68.

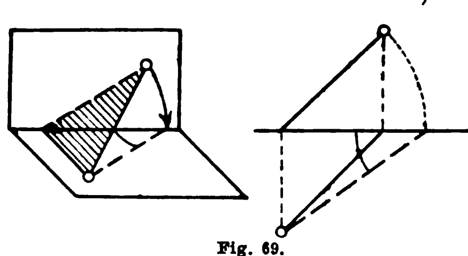


Fig. 69.

man entweder die durch die Gerade hindurchgehende auf der Vertikalebene senkrecht stehende Ebene um ihre Horizontalspur in die Horizontalebene (Fig. 69), oder man klappe dieselbe Ebene um ihre Vertikal-

spur in die Vertikalebene (Fig. 70). — Den Vertikalneigungswinkel einer Geraden parallel zur Horizontalebene hat man in dieser direkt (Fig. 71).

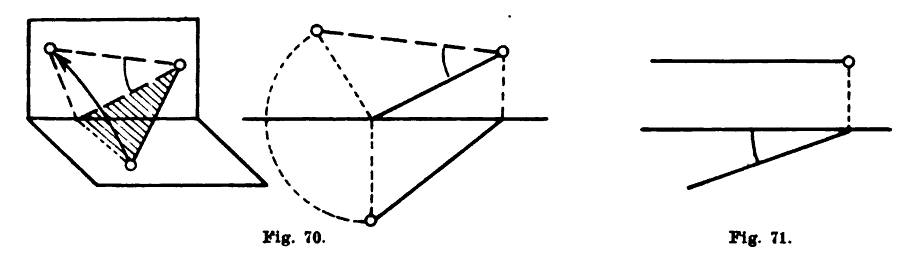


Fig. 70. Fig. 71.

2. Aufgabe: Von einer Geraden ist die wahre Entfernung ihrer Spuren und sind die beiden Neigungswinkel gegeben; man soll ihre Projektionen bestimmen (Fig. 72).

Lösung: Ist $P'Q$ die gegebene Strecke, so kann man aus dem recht-

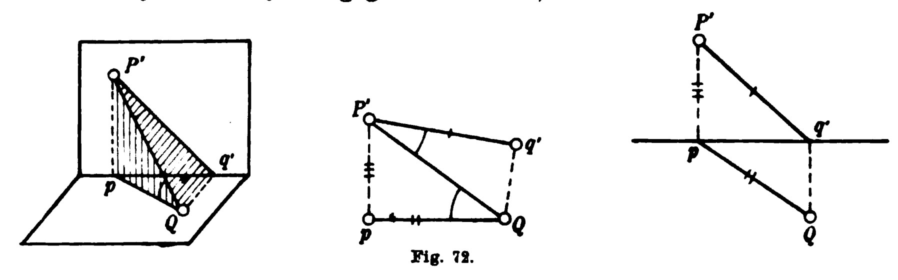


Fig. 72.

winkligen Dreieck $P'q'Q$ die Vertikalprojektion der Geraden $P'q'$ und den Abstand der Horizontalspur der Geraden von der Achse Qq' finden; ebenso kann man aus dem rechtwinkligen Dreieck $P'Qp$ die Horizontalprojektion der Geraden und den Abstand ihrer Vertikalspur von der Achse $P'p$ finden. Aus diesen vier Strecken läßt sich die Projektionsfigur leicht zusammensetzen.

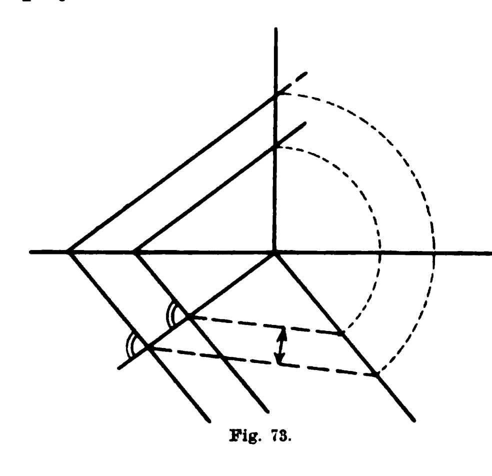


Fig. 73.

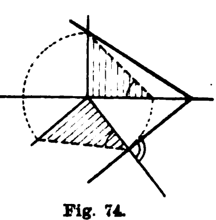
3. Aufgabe: Es soll der Abstand zweier durch ihre Spuren gegebenen parallelen Ebenen bestimmt werden (Fig. 73).

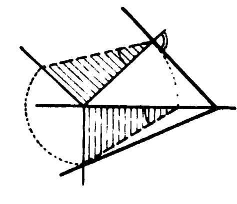
Lösung: Man schneide die beiden Ebenen durch eine dritte, die senkrecht auf ihnen steht, also etwa durch eine Ebene, die senkrecht auf der Horizontal-

ebene und senkrecht auf den gegebenen Horizontalspuren steht, und klappe diese Ebene samt ihren Schnittlinien mit den gegebenen Ebenen in die Horizontalebene um, so ist der Abstand dieser umgeklappten Schnittlinien auch der Abstand der Ebenen.

4. *Aufgabe: Es soll der Horizontal- und der Vertikalneigungswinkel einer Ebene bestimmt werden.*

Lösung: Zur Bestimmung des Horizontalneigungswinkels (Fig. 74) schneide man die gegebene Ebene mit einer vertikalen Hilfsebene, die senkrecht auf der Horizontalspur der Ebene liegt, d. h. mit einer Ebene, deren Vertikalspur senkrecht zur Achse und deren Horizontalspur senkrecht zur Horizontalspur der gegebenen Ebene ist. Aus dieser Hilfsebene wird durch die beiden Projektionsebenen und die gegebene Ebene ein rechtwinkliges Dreieck — *„das Neigungsdreieck"* — herausgeschnitten, in welchem der an der horizontalen Kathete gelegene Winkel der gesuchte Horizontalneigungswinkel der Ebene ist. Dieses Neigungsdreieck drehe man entweder in die Vertikalebene oder klappe es in die Horizontalebene um.


Fig. 74.


Fig. 75.

Zur Bestimmung des Vertikalneigungswinkels verfährt man ähnlich; das Neigungsdreieck steht hier senkrecht auf der Vertikalebene und senkrecht auf der Vertikalspur der gegebenen Ebene (Fig. 75).

5. *Aufgabe: Es soll durch eine Gerade eine Ebene gelegt werden, deren Horizontalneigungswinkel gegeben ist* (Fig. 77).

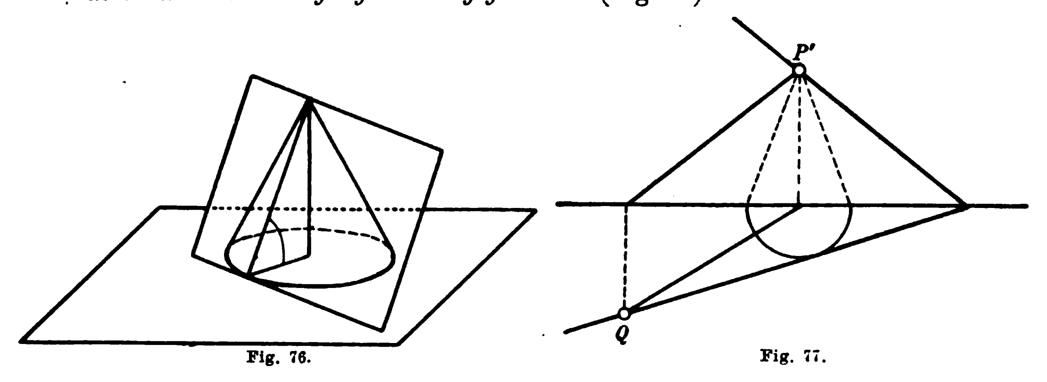


Fig. 76. Fig. 77.

Lösung: Es sei vorweg bemerkt, daß eine Tangentialebene an einen geraden Kreiskegel, der auf der Horizontalebene aufsteht, den Basiswinkel

des Kegels als Horizontalneigungswinkel hat, und daß ihre Horizontalspur Tangente an den Grundkreis des Kegels ist (Fig. 76). Zur Lösung der gestellten Aufgabe stelle man demnach einen geraden Kreiskegel mit dem verlangten Neigungswinkel als Basiswinkel so auf die Horizontal-

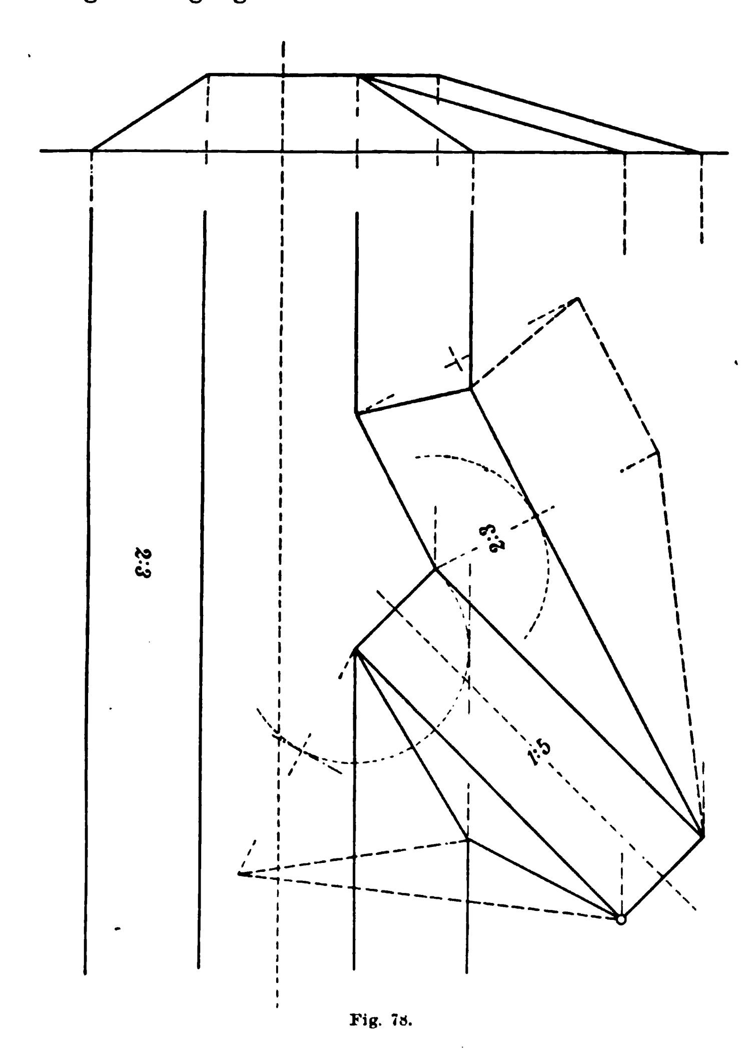


Fig. 78.

ebene, daß seine Spitze in der Geraden, zweckmäßig in ihrer Vertikalspur, liegt. Die Mantellinie des Kegels, die in der Vertikalebene liegt, bildet daher mit der Achse den gegebenen Winkel, und der Fußpunkt des von der Vertikalspur auf die Achse gefällten Lotes ist der Mittelpunkt des Grundkreises. Die Horizontalspur der gesuchten Ebene muß

dann Tangente an den Grundkreis des Kegels sein und durch die Horizontalspur der Geraden gehen.

6. *Aufgabe:* Als Anwendung der vorigen Aufgabe *soll ein Aufstieg auf einen Damm konstruiert werden.* Gegeben sei die Breite der Krone des Dammes; seine Böschung sei 2:3; ferner sei die Breite des hinaufführenden Weges gegeben und seine linke Ecke in der Geländeebene. Das Neigungsverhältnis des Weges sei 1:5 und seiner Böschungen 2:3 (Fig. 78).

Konstruktion: Der Einfachheit halber zeichne man den Erddamm so, daß seine Richtung senkrecht auf der Vertikalebene steht; die Horizontalebene sei die Geländeebene. Dann bietet die Konstruktion des Dammes keine Schwierigkeit; er projiziert sich in der Vertikalebene als gleichschenkliges Paralleltrapez, dessen Höhe $^2/_3$ mal so lang ist als die Horizontalprojektion seines Schenkels.

Von dem Aufstieg zeichne man zunächst die Projektion des Weges dadurch, daß man um seine gegebene linke Ecke mit dem fünffachen Betrage der Dammhöhe einen Kreis schlägt, dessen Schnitt mit der rechten Kronenkante des Dammes die linke obere Ecke des Weges bestimmt; hierauf vervollständige man die Horizontalprojektion des Weges zu einem Rechteck, dessen Breite gleich der gegebenen Wegbreite ist. — Nunmehr legt man durch die beiden Wegkanten Böschungsebenen unter dem Neigungsverhältnis 2:3. Diese müssen nach der vorigen Aufgabe Tangentialebenen je an einen von zwei Kegeln sein; ihre Grundkreise liegen in der Horizontalebene, und ihre Radien sind gleich $^3/_2$ der Dammhöhe; ihre Spitzen liegen in den beiden oberen Ecken des Weges, so daß also die Mittelpunkte der Grundkreise die Horizontalprojektionen der oberen Wegecken sind. An diese Kreise zieht man durch die unteren Wegecken je eine Tangente bis zum Schnitt mit der rechten Fußkante des Dammes; den linken dieser Schnittpunkte verbinde man noch mit der linken Kronenecke des Weges und ziehe endlich durch die rechte Kronenecke desselben eine Parallele zu der rechten Tangente bis zum Schnitt mit der rechten Kronenkante des Dammes; diesen Punkt hat man noch mit dem Schnittpunkte der rechten Tangente und der Fußkante des Dammes zu verbinden.

Die Vertikalprojektion ergibt sich einfach durch Hinaufloten der vier Wegecken in die ihnen zukommende Höhe.

18. Umklappen einer beliebigen Ebene. Um eine beliebige Ebene, in der ein Punkt A liegt, um ihre Horizontalspur in die Horizontalebene umzuklappen und *die umgeklappte Lage des Punktes A zu*

bestimmen (Fig. 79), denken wir uns ein rechtwinkliges Dreieck so liegend, daß seine eine Kathete das Lot von A auf die Horizontalebene ist, während die andere Kathete von dem Lote gebildet wird, das von der Horizontalprojektion des Punktes A auf die Horizontalspur der Ebene gefällt ist. Die Hypotenuse Ab dieses Dreiecks liegt

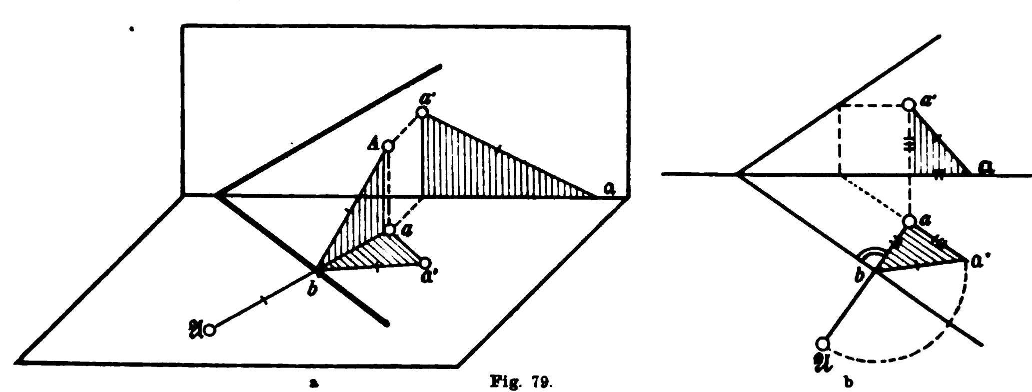


Fig. 79.

dann in der gegebenen Ebene und steht gleichfalls auf ihrer Horizontalspur senkrecht. Die Umklappung 𝔄 von A ist dann von b aus senkrecht zur Horizontalspur der Ebene um die Hypotenuse Ab entfernt. Um ihre Länge zu bestimmen, drehe man das Dreieck — *„das Neigungsdreieck“* — entweder um die vertikale Kathete, bis es parallel

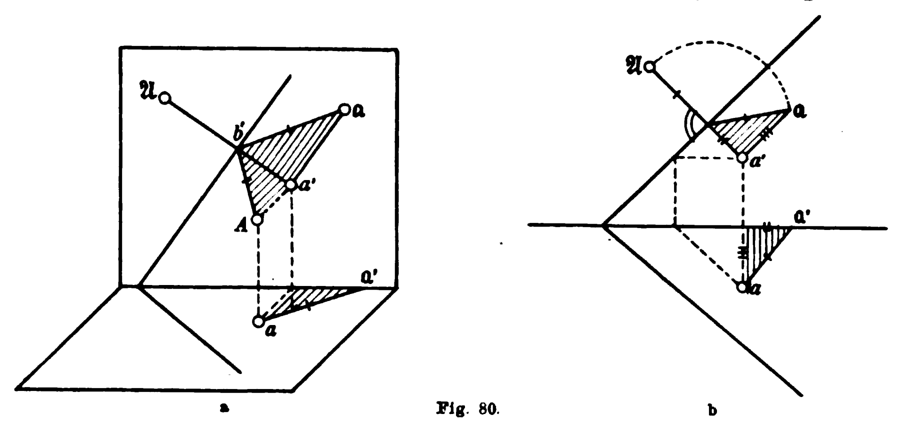


Fig. 80.

zur Vertikalebene liegt, oder man klappe es um die horizontale Kathete in die Horizontalebene. — Die Vertikalspur der Ebene wurde bei dieser Konstruktion nicht benutzt; durch die Horizontalspur und den Punkt A ist ja auch die Ebene bereits eindeutig bestimmt.

Entsprechend ist die Konstruktion der Umklappung eines Punktes

um die Vertikalspur der Ebene in die Vertikalebene. Das Neigungsdreieck steht hier senkrecht auf der Vertikalebene und der Vertikalspur der gegebenen Ebene (Fig. 80).

Um *eine Gerade* etwa um die Horizontalspur einer durch sie hindurchgehenden Ebene in die Horizontalebene *umzuklappen*, genügt es, zwei ihrer Punkte umzuklappen. Die Konstruktion für einen dieser Punkte kann man mit Rücksicht darauf ersparen, daß die Horizontalspur der Geraden auf der Horizontalspur der Ebene liegt. *Dieser Spurpunkt bleibt also bei der Umklappung liegen;* als zweiten Punkt wählt man zweckmäßig die Vertikalspur der Geraden (Fig. 81).

Bezeichnet man die Projektion einer Geraden, bzw. eines Punktes,

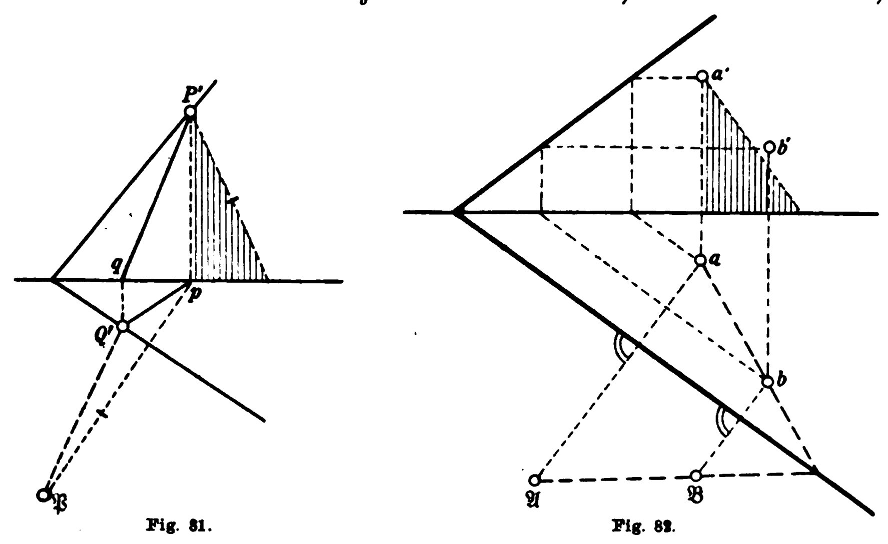


Fig. 81. Fig. 82.

und die Umklappung der Geraden, bzw. des Punktes, „als zwei entsprechende Geraden“, bzw. zwei „entsprechende Punkte“, — so beachte man daher stets, daß *zwei entsprechende Punkte auf einer Senkrechten zur Umklappungsspur liegen,* und daß *zwei entsprechende Geraden sich auf der Umklappungsspur schneiden* müssen. Namentlich *für Genauigkeitsproben* sind diese beiden Beziehungen häufig sehr wichtig.

Auch dann kann man von diesen beiden Sätzen zweckmäßig Gebrauch machen, wenn es sich darum handelt, *mehrere Punkte derselben Ebene* umzuklappen. Die Ausführung der Konstruktion mit Hilfe des *Neigungsdreiecks* ist dann *nur für einen Punkt* notwendig, während man die Umklappung jedes weiteren Punktes bequemer dadurch findet, daß man durch ihn und den ersten Punkt eine Gerade legt, durch den Schnitt derselben mit der Umklappungsspur und durch die Umklappung des ersten Punktes die Um-

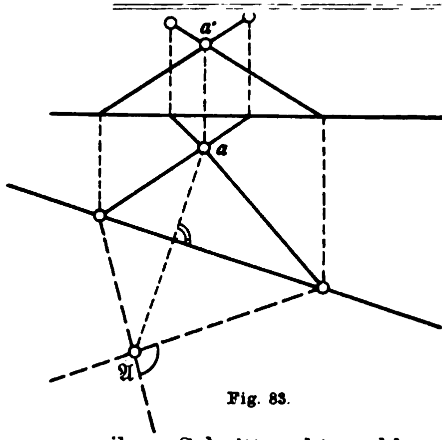


Fig. 83.

klappung der Geraden zieht und auf sie den zweiten Punkt hinüberlotet (Fig. 82).

19. Anwendungen.

1. Aufgabe: Es soll der Winkel zweier Geraden bestimmt werden (Fig. 83).

Lösung: Man bestimme die Horizontalspur derjenigen Ebene, die durch beide Geraden hindurchgeht; sie geht durch die Horizontalspuren der Geraden hindurch; um die Spur der Ebene klappe man die beiden Geraden dadurch um, daß man ihren Schnittpunkt umklappt und seine Umklappung mit den Spuren der Geraden verbindet.

Fig. 84.

2. *Aufgabe: Es soll die wahre Gestalt eines Polygons durch Umklappen bestimmt werden* (Fig. 84).

Lösung: Man klappe mit Hilfe des Neigungsdreiecks nur einen Eckpunkt um und bestimme die Umklappungen der anderen Eckpunkte auf die am Schlusse des vorigen Paragraphen angegebene Weise. Als Genauigkeitsprobe ist es zweckmäßig, auch für die übrigen Punkte die Neigungsdreiecke zu zeichnen; ihre Hypotenusen müssen alle parallel sein, da sämtliche Dreiecke den Horizontalneigungswinkel des Polygons enthalten.

3. *Aufgabe: Es soll die Entfernung eines Punktes von einer Geraden bestimmt werden* (Fig. 85).

Lösung: Man lege durch den Punkt und die Gerade zunächst eine beliebige Hilfsgerade, klappe diese samt der gegebenen Geraden nach der ersten Aufgabe dieses Paragraphen um, bestimme durch Fällen eines Lotes die umgeklappte Lage des gegebenen Punktes auf der umgeklappten Hilfsgeraden und fälle in der Umklappung ein Lot von ihm auf die gegebene Gerade; den Fußpunkt lote man wieder zurück auf die beiden Projektionen der gegebenen Geraden.

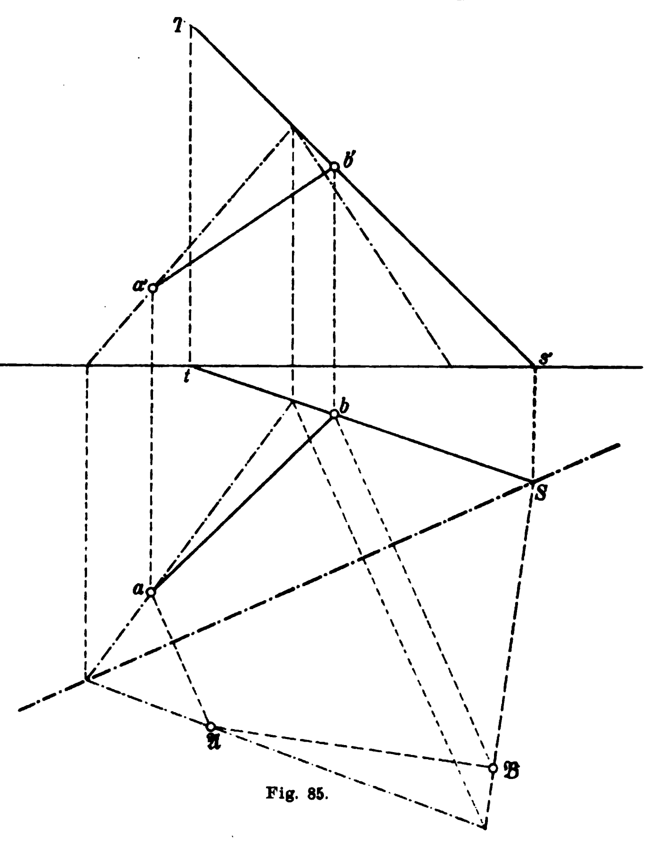


Fig. 85.

20. Zurückklappen beliebiger Ebenen.

Um die Projektion eines Punktes einer durch ihre Spuren gegebenen Ebene zu bestimmen, wenn von diesem nur die umgeklappte Lage bekannt ist, bestimme man *zunächst* in einem beliebigen Hilfsneigungsdreieck *den Neigungswinkel der Ebene* (Fig. 86). Mit Hilfe dieses Winkels bestimme man *das spezielle*

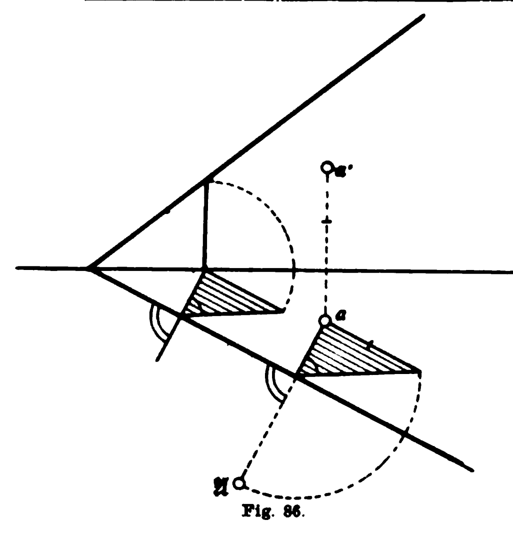


Fig. 86.

Neigungsdreieck des umgeklappten Punktes. In den Katheten dieses Dreiecks hat man dann die Entfernung der Horizontalprojektion des Punktes von der Umklappungsspur — „das Umklappungslot“ — sowie die Höhe des Punktes.

Als *Beispiel* für diese Konstruktion *sollen die Projektionen eines regelmäßigen Sechsecks gefunden werden, von dem die beiden Projektionen einer Seite und der Horizontalneigungswinkel seiner Ebene gegeben sind* (Fig. 87). Zu diesem Zwecke bestimmt man zunächst die Horizontalspur der Sechsecksebene dadurch, daß man durch die Horizontalspur der gegebenen Seite eine Tangente an den Grundkreis eines auf der Horizontalebene stehenden geraden Kegels, der den gegebenen Neigungswinkel als Basiswinkel enthält, und dessen Spitze auf der Geraden, etwa in ihrer Vertikalspur liegt, zieht. Um diese Spur klappt man die Sechseckseite um und zeichnet in der Umklappung das regelmäßige Sechseck. Durch Zurückklappen erhält man die Horizontalprojektion. Die Ecken der Vertikalprojektion ergeben sich mit Hilfe ihrer Neigungsdreiecke.

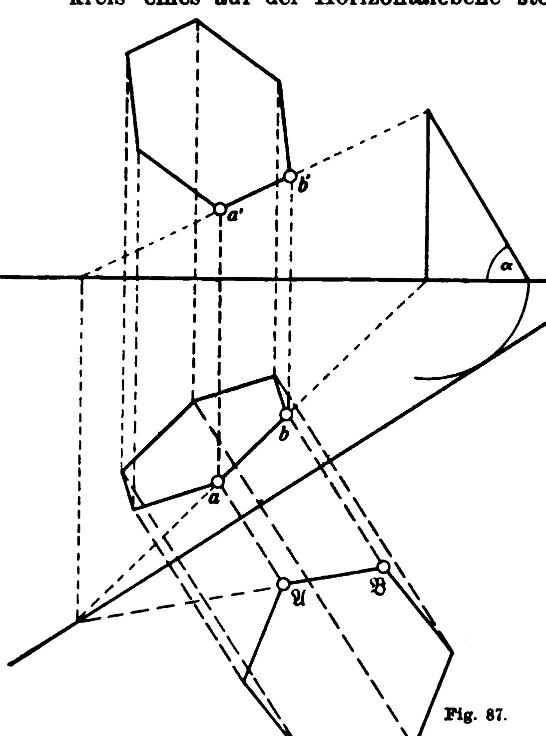


Fig. 87.

21. Drehen einer Ebene um eine horizontale Gerade in horizontale Lage. *Soll ein Punkt um eine horizontale Gerade gedreht werden, bis er mit der Geraden in einer hori-*

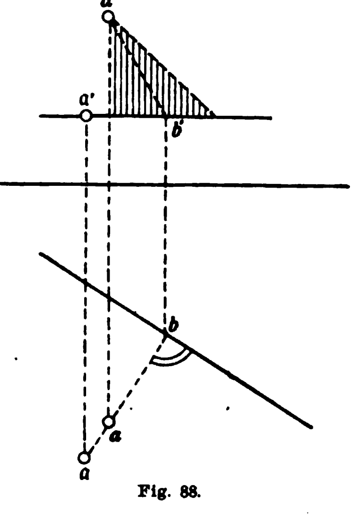


Fig. 88.

zontalen Ebene liegt, so verbindet man die Gerade und den Punkt durch ein Lot, dessen Horizontalprojektion senkrecht zur Horizontalprojektion der Geraden liegt (Fig. 88). Betrachtet man dann die Vertikalprojektion der Geraden als Hilfsprojektionsachse, durch die eine Hilfshorizontalebene gelegt ist, so ergibt sich die Konstruktion für diese Hilfsebene ohne weiteres. Da die ursprüngliche Horizontalebene senkrecht unter der Hilfshorizontalebene liegt, so ist die gesuchte Projektion des gedrehten Punktes dieselbe wie in der Hilfshorizontalebene.

Von dieser Konstruktion kann man eine *Anwendung* machen, wenn die *wahre Gestalt eines Polygons* dadurch bestimmt werden soll, daß seine Ebene um

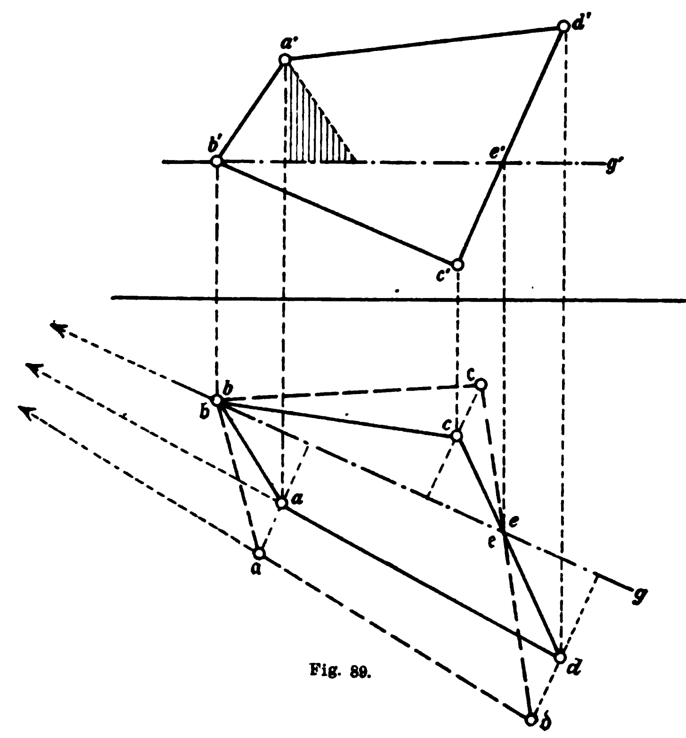


Fig. 89.

eine horizontale Gerade gedreht wird, bis sie parallel der Horizontalebene liegt (Fig. 89). Man legt dabei die horizontale Gerade zweck-

mäßig durch eine Ecke des Polygons und dreht alle übrigen Ecken nach dem oben angegebenen Verfahren. Als Genauigkeitsprobe hat man wieder die Bedingung, daß zwei sich entsprechende Geraden sich auf der Geraden, um die gedreht wurde, schneiden müssen.

III. Kapitel.

Stereometrische Konstruktionen.

22. Das Handwerkszeug. Das Umklappen und Drehen von Ebenen und Geraden wurde seither nur zur Bestimmung der wahren Größe benutzt. Die beschriebenen Methoden gewinnen aber dadurch eine ganz besonders wichtige Bedeutung, daß sie es ermöglichen, *die stereometrischen Konstruktionen, die bei Euklid nur in idealer Weise in der Phantasie ausgeführt werden können, zu realisieren.* In jeder Ebene des Raumes kann jede geometrische Konstruktion dadurch zeichnerisch durchgeführt werden, daß diese Ebene in eine der beiden Projektionsebenen umgeklappt wird.

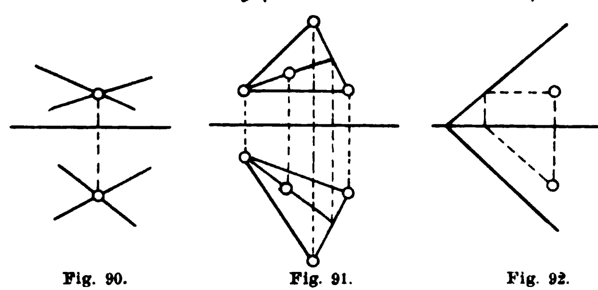


Fig. 90. Fig. 91. Fig. 92.

Liegt eine stereometrische Aufgabe vor, so muß ihre Lösung zunächst in der Idee räumlich ausgeführt werden. Dabei leistet eine kleine *Skizze, die den Gang der Konstruktion veranschaulicht,* gute Dienste, jeder Schritt der Lösung wird dann praktisch durch die bisher beschriebenen Methoden der darstellenden Geometrie ausgeführt.

Die §§ 23—38 enthalten einige interessante Beispiele. Zur Lösung der hier gestellten Aufgaben ist es notwendig, daß man eine Reihe von Konstruktionen, die im vorhergehenden mitgeteilt sind, stets gegenwärtig habe, sie bilden gewissermaßen *das Handwerkszeug zur deskriptiven Lösung stereometrischer Konstruktionen* und mögen noch einmal kurz zusammengestellt werden.

1. Zwei Geraden schneiden sich, wenn die Schnittpunkte ihrer gleichnamigen Projektionen senkrecht untereinander liegen (Fig. 90); andernfalls sind sie windschief; nach § 5, Fig. 11, kann dann festgestellt werden, welche der beiden Geraden vor, bzw. über der anderen herläuft.

2. Von einem Punkte in einer Ebene ist eine, etwa die Horizontal-

projektion, gegeben, gesucht ist die andere (Fig. 91 und 92). Die Lösung für den Fall, daß die Ebene als Polygon gegeben ist, enthält § 7, Fig. 18, für den Fall, daß die Ebene durch ihre Spuren gegeben ist, § 12, Fig. 45 und 46.

3. Eine Ebene geht dann durch zwei sich schneidende Geraden hin-

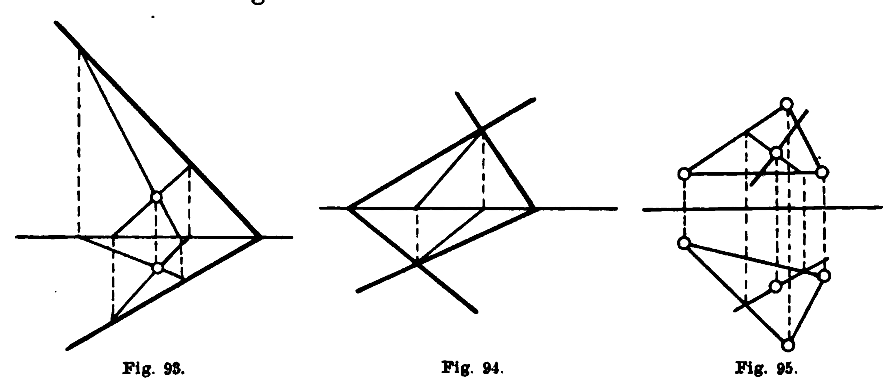


Fig. 93. Fig. 94. Fig. 95.

durch, wenn die Spuren der Ebene durch die gleichnamigen Spuren beider Geraden gehen (Fig. 93).

4. Die Spuren der Schnittlinie zweier Ebenen sind die Schnittpunkte ihrer gleichnamigen Spuren (Fig. 94).

5. Die Auffindung des Schnittpunktes einer Geraden und einer

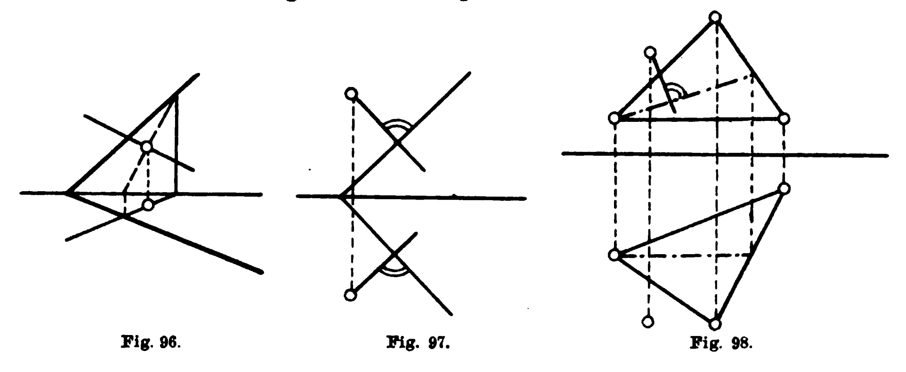


Fig. 96. Fig. 97. Fig. 98.

Ebene (Fig. 95 und 96) ist in § 7, Fig. 19, für ein Polygon, und in § 13, Fig. 50, für eine durch ihre Spuren gegebenen Ebene mitgeteilt.

6. Eine Gerade steht senkrecht auf einer Ebene (Fig. 97 und 98), wenn die Projektionen der Geraden senkrecht auf den gleichnamigen Spuren der Ebene stehen; vgl. § 14, Fig. 54. Ist die Ebene durch Polygonprojektionen gegeben, so sind einfacher als ihre Spuren zwei Spurparallele nach § 14, Fig. 55, zu ermitteln.

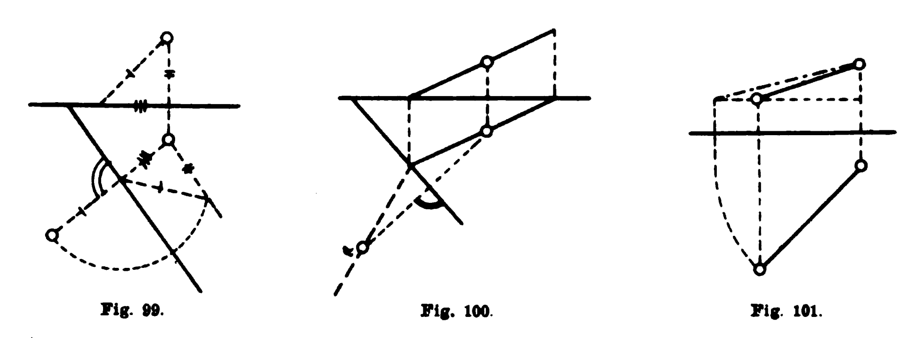


Fig. 99. Fig. 100. Fig. 101.

7. Die Umklappung eines Punktes (Fig. 99) und einer Geraden (Fig. 100) kann mittelst des Neigungsdreiecks gefunden werden, wie in § 18 mitgeteilt wurde.

8. Die wahre Länge einer Strecke (Fig. 101) ist gleich der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete die Horizontalprojektion der Geraden und dessen andere Kathete der Höhenunterschied ihrer Endpunkte ist.

23. Aufgabe: *Es soll die kürzeste Entfernung CD zweier windschiefer Geraden PQ' und ST' ermittelt werden* (Fig. 102).

Lösung: Man ziehe durch einen beliebigen Punkt der Geraden ST', etwa durch ihren Spurpunkt T' eine Parallele zu der Geraden PQ' und bestimme die durch diese Parallele und ST' gehende Ebene. Sodann fälle man von einem beliebigen Punkte A der Geraden PQ' eine Senkrechte auf diese Ebene und bestimme deren Schnittpunkt B mit ihr.

Fig. 102.

Zieht man durch diesen eine Parallele zu PQ', die ST' in C schneidet, und zieht endlich durch C eine Parallele zu BA, die PQ' in D trifft, so ist CD die gesuchte kürzeste Entfernung, deren wahre Länge in einer Nebenfigur ermittelt werden kann.

24. Aufgabe: *Es ist ein Tetraeder $abcd$, $a'b'c'd'$ gegeben, gesucht ist der Mittelpunkt oo' und der Halbmesser der dem Tetraeder umbeschriebenen Kugel* (Fig. 103).

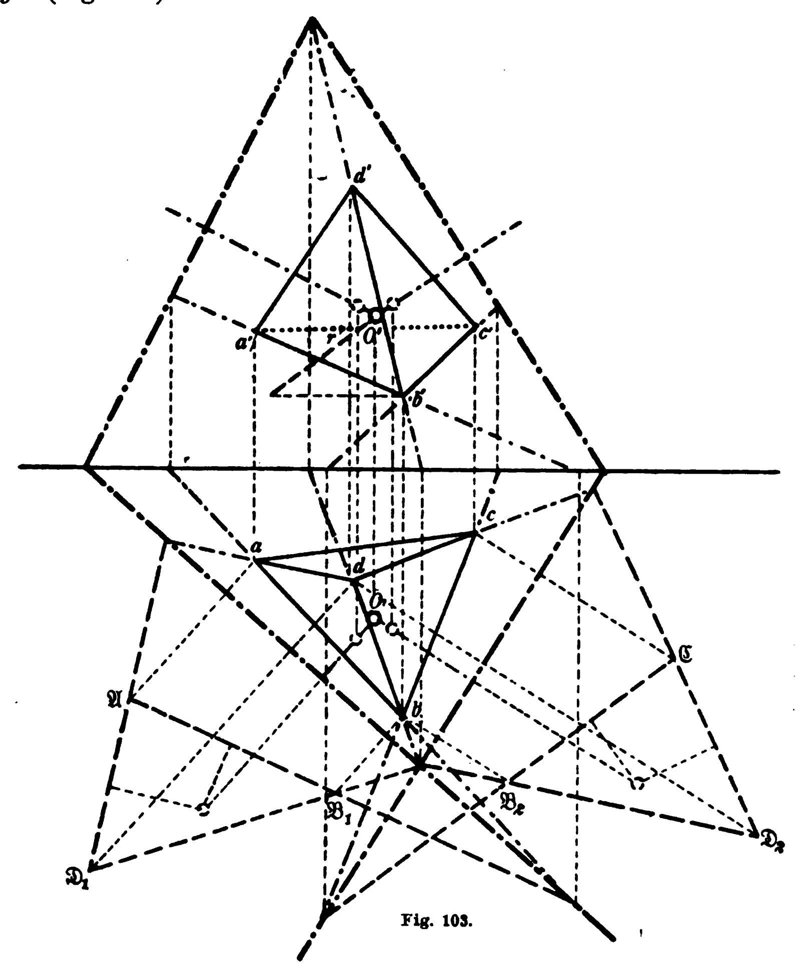


Fig. 103.

Lösung: Man klappe zwei Tetraederflächen in die Horizontalebene um und bestimme in den beiden umgeklappten Dreiecken die Mittelpunkte der den Dreiecken umbeschriebenen Kreise. Diese beiden Mittelpunkte

klappe man zurück und errichte in ihnen Senkrechte auf den zugehörigen Tetraederflächen. Der Schnittpunkt dieser beiden Senkrechten ist der gesuchte Mittelpunkt der dem Tetraeder umschriebenen Kugel. Seine Entfernung von einer der Ecken ist der Kugelhalbmesser, dessen wahre Länge durch ein rechtwinkliges Dreieck zu ermitteln ist.

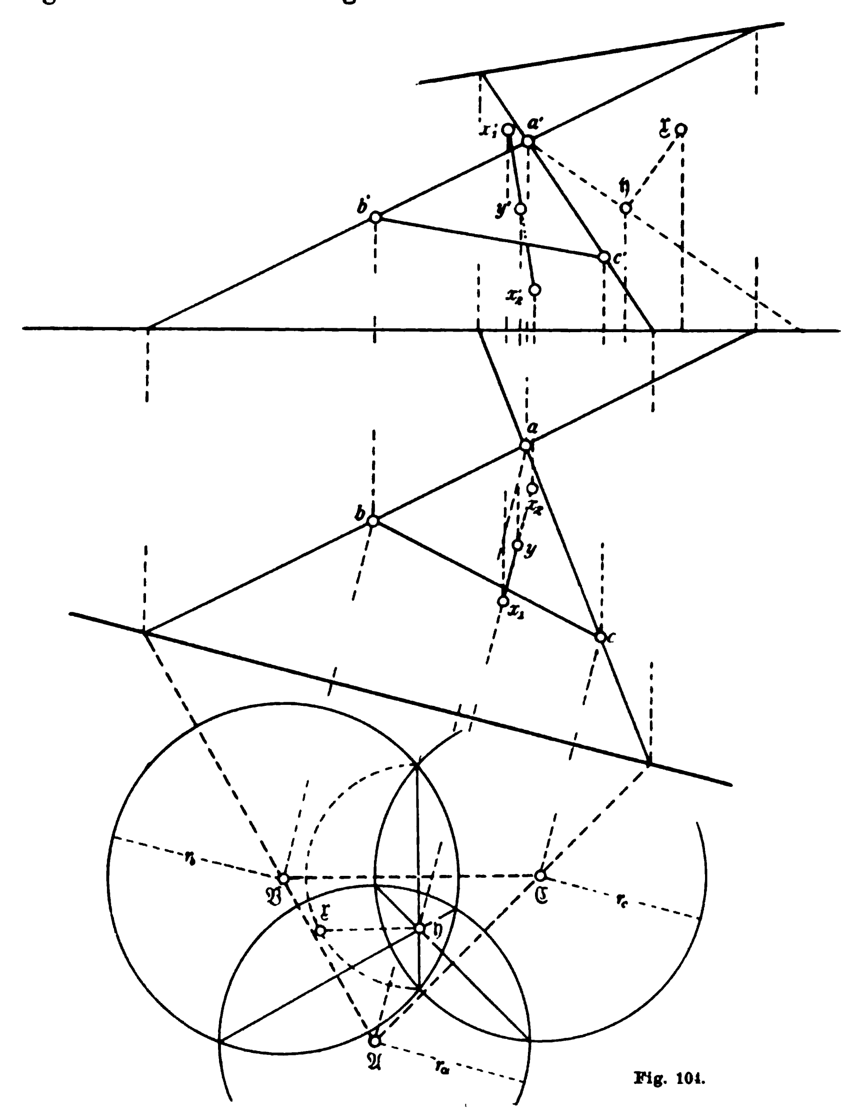


Fig. 104.

25. Aufgabe: *Es soll ein Punkt X konstruiert werden, der von drei gegebenen Punkten A, B, C gegebene Abstände* $r_a r_b r_c$ *hat* (Fig. 104).

Lösung: Man klappe das Dreieck ABC in die Horizontalebene nach $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ um und denke sich drei Kugeln mit den Mittelpunkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, und den Radien r_a, r_b und r_c. Die Kugeln schneiden die Zeichenebene in Kreisen um $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ mit den Radien r_a, r_b, r_c. Die gemeinsame Sehne je zweier dieser Kreise stellt dann die Projektion des Schnitt-

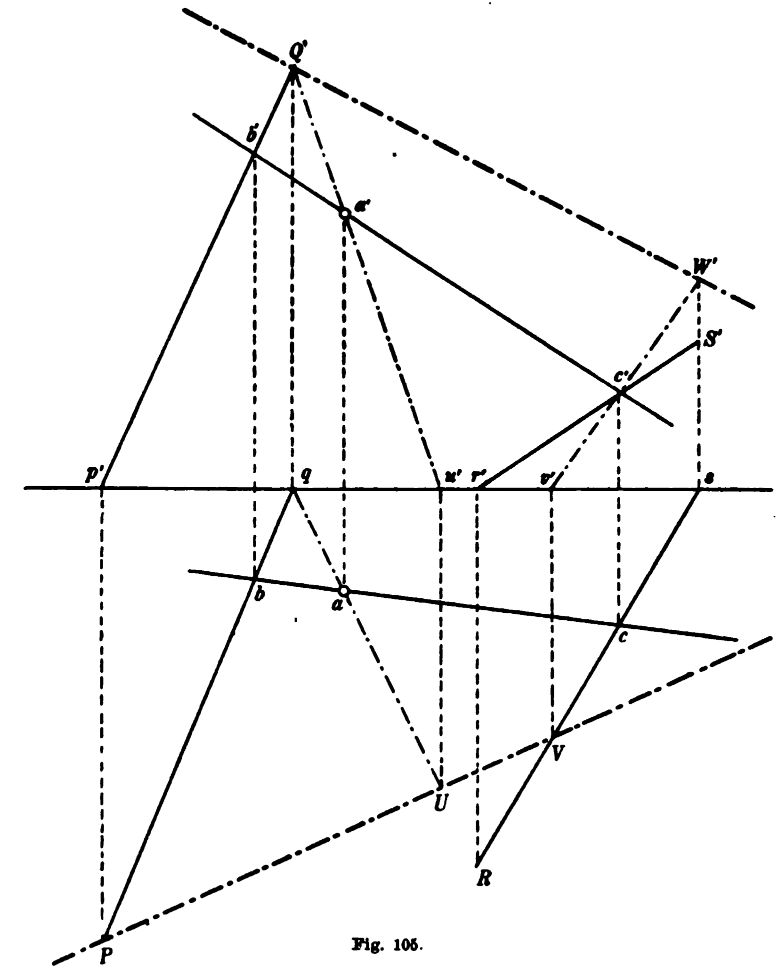


Fig. 105.

kreises der beiden zugehörigen Kugeln dar. Der Schnittpunkt $\mathfrak{y}$ aller drei Sehnen ist somit die Projektion der gesuchten beiden Schnittpunkte x_1 und x_2 der drei Kugeln. Diesen Punkt $\mathfrak{y}$ klappe man zurück nach yy' und errichte in yy' eine Senkrechte auf der Dreiecksebene. Endlich trage man auf dieser Senkrechten von yy' aus die Strecke $y'x_1'$, $y'x_2'$, bzw. yx_1, yx_2 ab. Hierzu ermittelt man vorher die wahre Länge $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$

dieser Strecke durch Umklappen eines der drei Schnittkreise der Kugeln um seinen Durchmesser.

26. Aufgabe: *Es sind ein Punkt A und zwei Geraden PQ′ und RS′ gegeben. Es soll durch den gegebenen Punkt eine Gerade gelegt werden, welche die beiden gegebenen Geraden schneidet* (Fig. 105).

Lösung: Man lege zunächst durch A und einen beliebigen Punkt der Geraden PQ', etwa Q', eine Hilfsgerade und bestimme die Ebene, die durch sie und PQ hindurchgeht. Hierauf bestimme man den Schnittpunkt C dieser Ebene mit RS' und verbinde C mit A, so ist CA die gesuchte Gerade.

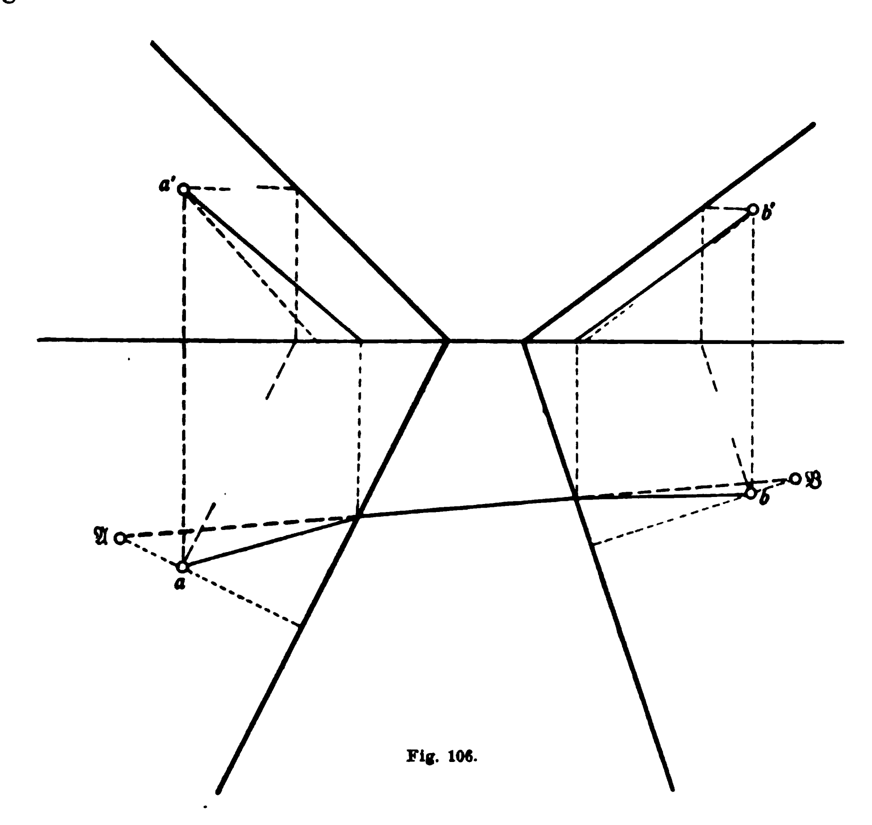


Fig. 106.

27. Aufgabe: *Es soll der kürzeste in zwei durch ihre Spuren gegebenen Ebenen und in der Horizontalebene verlaufende Weg von einem Punkt A der einen Ebene nach einem Punkte B der anderen gefunden werden* (Fig. 106).

Lösung: Man klappe beide Ebenen in die Horizontalebene um und verbinde die Umklappungen 𝔄 und 𝔅 der Punkte A und B geradlinig, Das Stück dieser Geraden zwischen den Spuren der Ebene ist ein Stück des gesuchten Weges. Die Verbindungslinien der Endpunkte dieser Strecke mit den Horizontalprojektionen von A und B ergeben die beiden anderen Wegstücke.

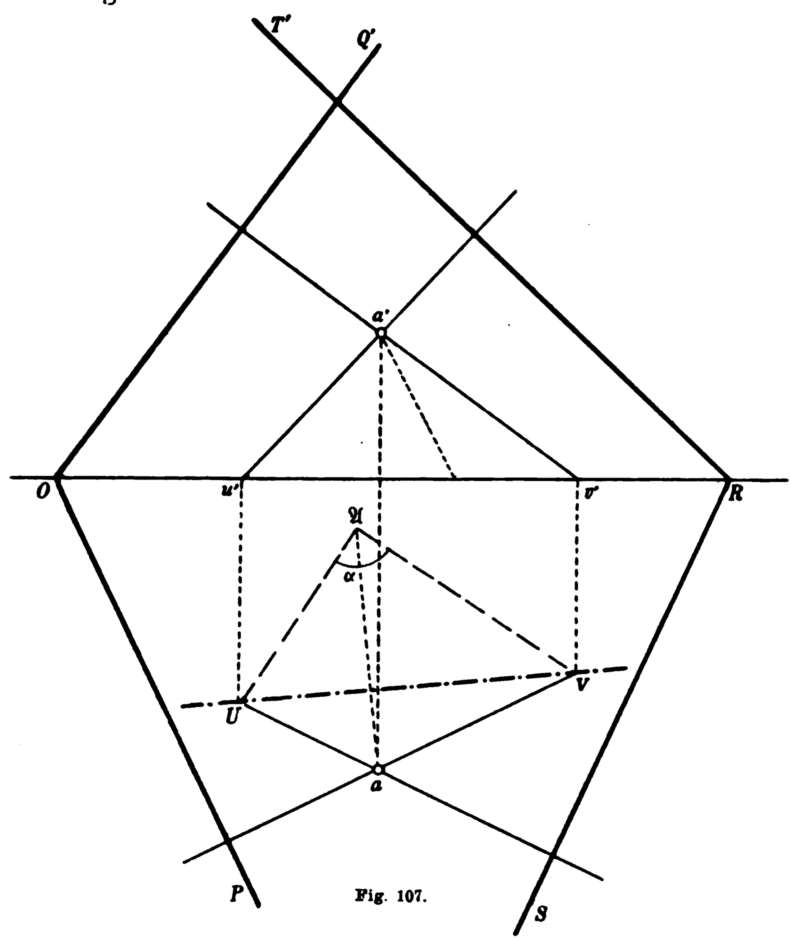


Fig. 107.

28. Aufgabe: *Es soll der Flächenwinkel zweier durch ihre Spuren gegebenen Ebenen bestimmt werden.*

1. Lösung: Man fälle von einem beliebigen Punkte A aus auf beide Ebenen Lote und bestimme den Winkel der Lote durch Umklappung der durch sie bestimmten Ebene; dieser Winkel ist das Supplement des gesuchten (Fig. 107).

2. Lösung: **Man lege senkrecht zur Schnittlinie der beiden Ebenen eine Hilfsebene, aus der durch die beiden Ebenen und die Horizontalebene ein Dreieck ausgeschnitten wird, welches den gesuchten Flächenwinkel enthält. Dieses Dreieck klappe man in die Horizontalebene um, wozu man zweckmäßig seine Höhe benutzt, deren wahre Länge sich**

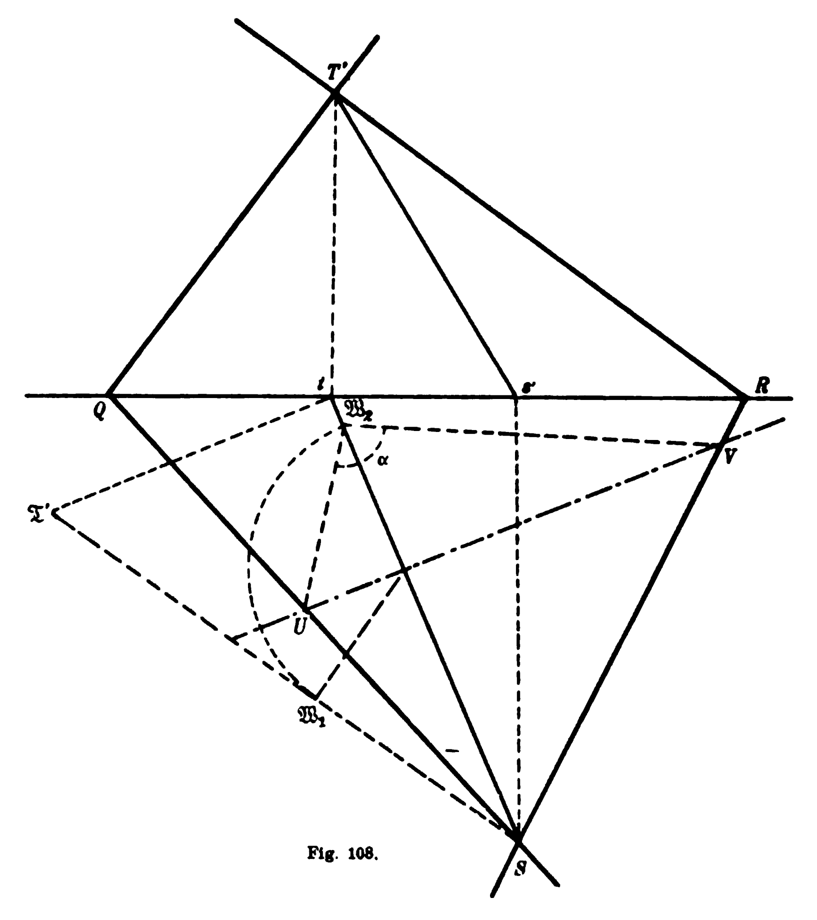


Fig. 108.

durch Umklappen der Schnittlinie der beiden gegebenen Ebenen ermitteln läßt (Fig. 108).

29. Aufgabe: *Von einem Quader sind die Projektionen einer Diagonale und die Projektionen der Richtungen der von einem Endpunkt der Diagonalen ausgehenden Kanten gegeben. Gesucht sind die Projektionen des Quaders. (Zerlegung einer Kraft in drei räumliche Komponenten von gegebener Richtung.)* (Fig. 109).

Lösung: Man bringe die durch zwei der gegebenen Richtungen bestimmte Ebene zum Schnitt mit einer Geraden, die vom anderen Endpunkte der Diagonalen aus parallel der dritten Richtung gezogen ist, und vervollständige von der so gewonnenen Ecke des Quaders ausgehend die Projektionen desselben.

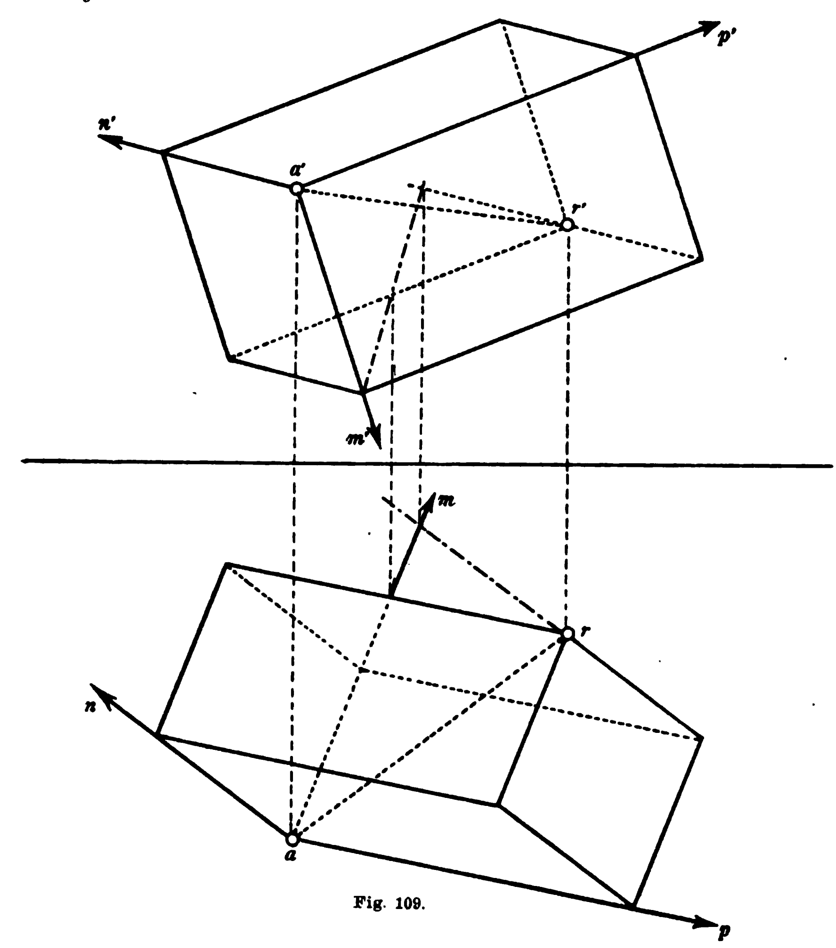


Fig. 109.

30. Aufgabe: *Gegeben sind ein Punkt und zwei Winkel. Es soll durch den Punkt eine Ebene gelegt werden, deren Horizontal- und Vertikalneigungswinkel gleich den gegebenen Winkeln sind* (Fig. 110).

Lösung: Man zeichne eine Gerade, deren Horizontal-, bzw. Vertikalneigungswinkel gleich den Komplementen der gegebenen beiden Winkel ist; die Projektionen dieser Geraden werden in einer Nebenfigur ermittelt. Dann lege man durch den gegebenen Punkt eine Spurparallele

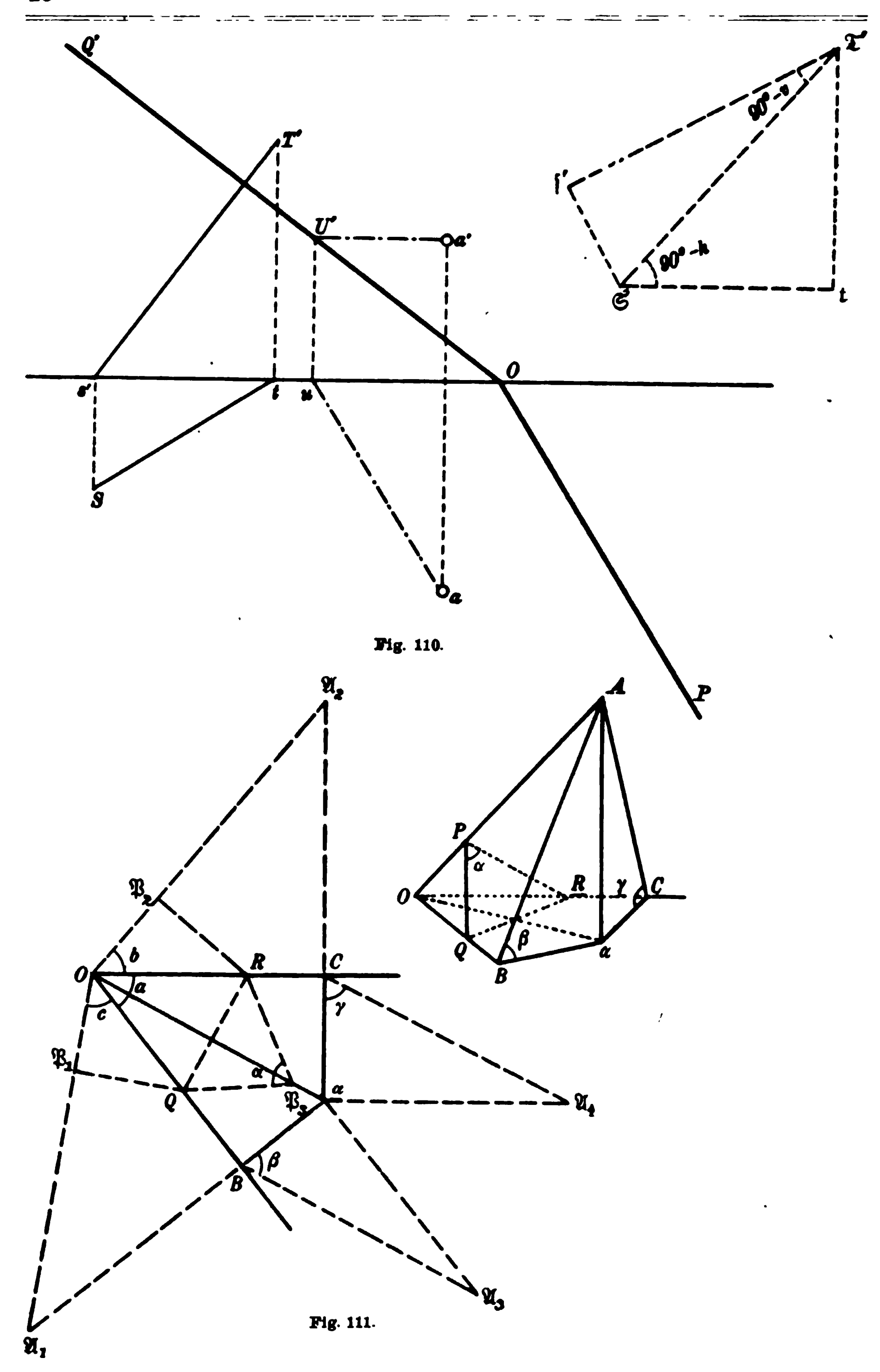


Fig. 110.

Fig. 111.

etwa zu der Horizontalspur der gesuchten Ebene; die Horizontalprojektion dieser Spurparallelen muß senkrecht auf der Horizontalprojektion der Hilfsgeraden stehen. Endlich lege man die gesuchte Ebene durch die Spurparallele senkrecht zu der Hilfsgeraden.

31. Aufgabe: *Es sind die drei Seiten a, b, c eines Dreikants gegeben. Gesucht sind die drei Winkel α, β, γ desselben* (Fig. 111).

Lösung: Man stelle das Dreikant etwa mit der Seite *a* auf die Horizontalebene und fälle von einem beliebigen Punkte der gegenüberliegenden Kante aus eine Senkrechte auf die Horizontalebene. Durch diese lege man vertikale Ebenen, die senkrecht auf den beiden andern Kanten stehen. Durch Umklappen der beiden letztgenannten rechtwinkligen Dreiecke erhält man die beiden gesuchten Winkel *β* und *γ*. Zur Bestimmung des Winkels *α* klappe man ein Dreieck um, welches aus dem Dreikant durch eine Ebene herausgeschnitten wird, die senkrecht auf der zu *α* gehörenden Kante steht.

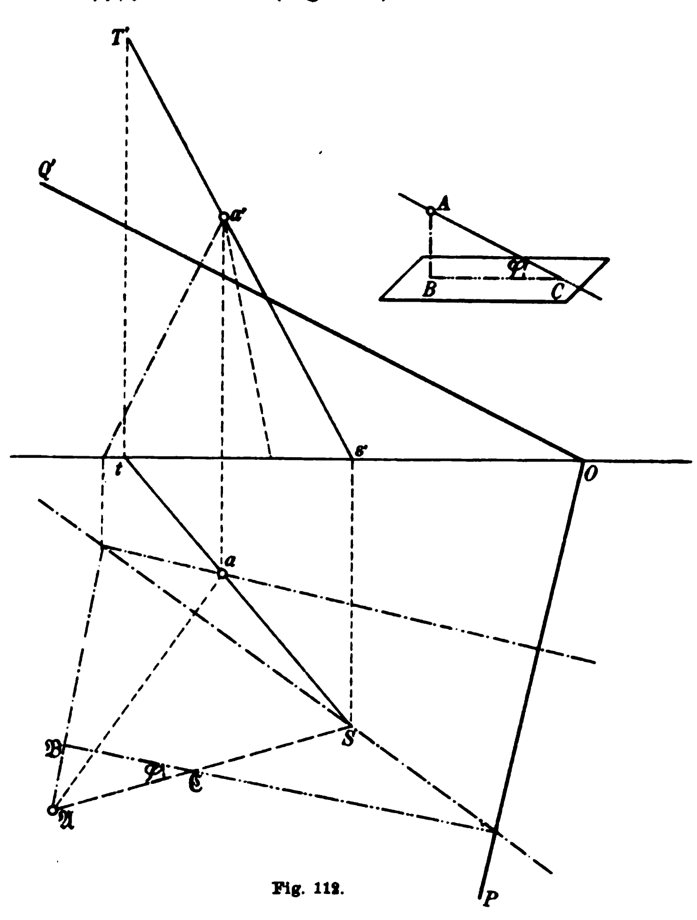


Fig. 112.

32. Aufgabe: *Es soll der Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene bestimmt werden* (Fig. 112).

Lösung: Man fälle von einem beliebigen Punkte der Geraden auf die Ebene ein Lot und klappe die durch dieses Lot und die gegebene Gerade gehende Ebene um; der so ermittelte Winkel des Lotes und der Geraden ist das Komplement des gesuchten Neigungswinkels.

33. Aufgabe: ***Es sind eine Gerade ST', eine Ebene POQ' und ein Winkel α gegeben. Es soll durch die Gerade eine Ebene SUT' unter dem Neigungswinkel α gegen die Ebene POQ' gelegt werden*** (Fig. 113).

Lösung: Man stelle auf der gegebenen Ebene einen Hilfskegel auf,

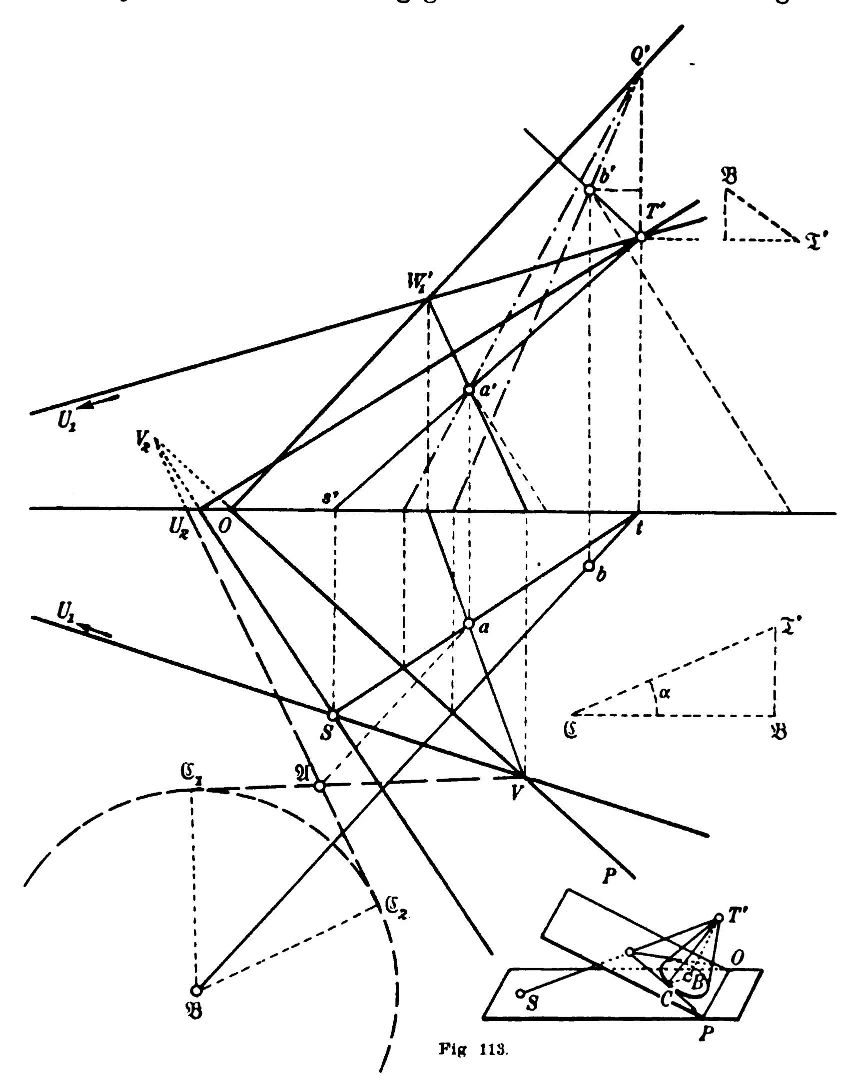
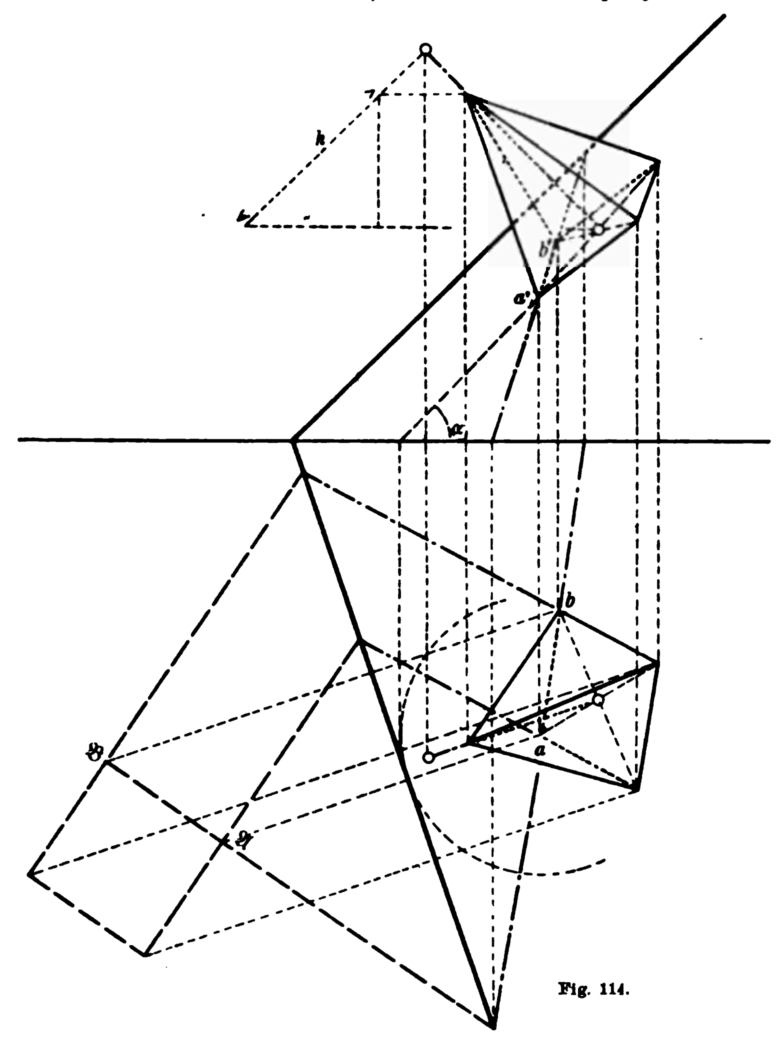


Fig 113.

dessen Spitze auf der gegebenen Geraden etwa in T' liegt, und dessen Basiswinkel gleich α ist. Die gesuchten beiden Ebenen schneiden dann aus der gegebenen Ebene die beiden Tangenten an den Grundkreis des Kegels aus, die durch den Schnittpunkt der gegebenen Geraden und

Ebene gehen. Diese Tangenten können durch Umklappen in die Horizontalebene ermittelt werden.

34. Aufgabe: *Von einer regulären quadratischen Pyramide sind die Projektionen einer Grundkante AB, der Horizontalneigungswinkel α der*



Grundfläche und die Höhe h gegeben, es sind die Projektionen der Pyramide gesucht (Fig. 114).

Lösung: Man bestimme zunächst die Horizontalspur der Grundfläche; sie ist Tangente an den Grundkreis eines vertikalen Kegels, dessen Spitze auf der gegebenen Grundkante, etwa in einem ihrer End-

punkte liegt, und dessen Basiswinkel gleich dem gegebenen Winkel ist. Um diese Spur klappe man die gegebene Grundkante um, vervollständige das Quadrat und klappe dieses wieder zurück. In dem Schnittpunkt der Diagonalen der Grundfläche errichte man nunmehr eine Senkrechte auf dieser und trage endlich auf der so gewonnenen Höhe der Pyramide, deren gegebene Höhe, wie in § 8, Fig. 28 angegeben, ab.

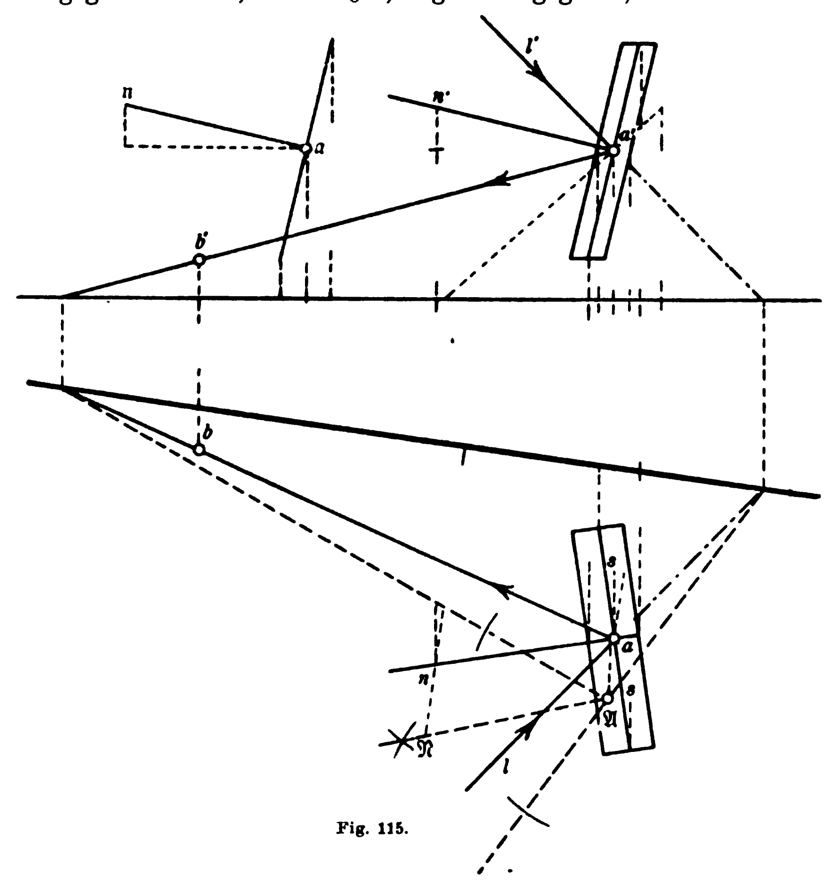


Fig. 115.

35. Aufgabe: *Ein quadratischer Spiegel, dessen Seitenlänge gleich 2s ist, ist um eine vertikale und eine horizontale Achse drehbar; beide Achsen gehen durch den Mittelpunkt A des Spiegels; die horizontale Achse ist parallel einer Spiegelkante. Der Spiegel soll so gestellt werden, daß ein in gegebener Richtung l, l' einfallender Lichtstrahl nach einem gegebenen Punkte B reflektiert wird.* — Heliotrop. — (Fig. 115).

Lösung: Nach dem Reflexionsgesetz muß die Spiegelebene senkrecht auf der Halbierungslinie desjenigen Winkels stehen, der von dem

einfallenden und reflektierten Lichtstrahl gebildet wird. Um diese Winkelhalbierungslinie AN in beiden Projektionsebenen zu bestimmen, ist es notwendig, die Ebene des im Punkte A einfallenden und reflektierten Lichtstrahls umzuklappen, den umgeklappten Winkel zu halbieren und die Winkelhalbierungslinie durch einen ihrer Punkte N zurückzuklappen. Von dem Spiegel werden dann zunächst die Richtungen der Projektionen der Quadratseiten dadurch ermittelt, daß man die Projektionen zweier durch A gehenden Parallelen zu den Spiegelkanten bestimmt. Von den Horizontalprojektionen dieser beiden Linien ist die eine das Einfallslot, während die andere senkrecht dazu steht; von ihren Vertikalprojektionen ist die eine horizontal, die andere steht senkrecht auf dem Einfallslot. Die Längen der Horizontalprojektionen der so bestimmten durch A gehenden Linien sind unschwer zu ermitteln; die Länge der parallel zur Horizontalebene liegenden Linie ist direkt gleich der gegebenen Quadratseite, während die Länge der anderen Geraden aus einer Hilfsfigur entnommen werden kann, die am bequemsten in die Vertikalebene eingezeichnet wird, und die den Spiegel samt dem Einfallslote so in gedrehter Lage darstellt, daß die Spiegelebene senkrecht auf der Vertikalebene steht, sich also als gerade Linie projiziert, während die Strecke AN parallel der Vertikalebene verläuft, sich also in wahrer Größe projiziert. Die Vertikalprojektionen der durch A gehenden beiden Hilfslinien werden durch Hinaufloten der Horizontalprojektionen ihrer Endpunkte vervollständigt und die Konturen des Spiegels endlich durch Ziehen von Parallelen zu den beiden Hilfslinien in beiden Projektionen hergestellt.

36. Aufgabe: *Es soll die Deformation einer Netzwerkkuppel von gerader Seitenzahl ermittelt werden.* Die Grundfläche und ebenso die Deckfläche der Kuppel sei ein regelmäßiges Sechseck $ABCDEF$, bzw. *1, 2, 3, 4, 5, 6*; die Knotenpunkte *1, 3, 5* sollen sich in die Grundfläche legen (Fig. 116).

Lösung: Die deformierte Lage des Punktes 1 ist unschwer zu ermitteln durch Umklappung des Dreiecks $AB1$; ebenso werden die Punkte *3* und *5* bestimmt. Schwieriger gestaltet sich die Bestimmung der deformierten Lage eines der Punkte *2, 4, 6* etwa des Knotenpunktes *2*. Dieser Punkt kann sich infolge seiner starren Verbindung mit BC nur in einer auf der Horizontalebene vertikal aufstehenden Ebene, die das Dreieck $BC2$ halbiert, bewegen. Man klappe also diese Ebene in die Zeichenebene um und bestimme in ihr die deformierte Lage des Punktes *2* als Schnittpunkt zweier geometrischer Örter, die sich folgendermaßen ergeben: einmal muß der Punkt *2* auf einem Kreise liegen,

dessen Mittelpunkt die Mitte von BC ist, und dessen Radius gleich der wahren Entfernung des Punkter 2 von BC ist; zweitens muß der Punkt 2 auf einem Kreise liegen, der aus der vertikalen Ebene durch eine Kugel herausgeschnitten wird, deren Mittelpunkt die deformierte Lage des Punktes 1 ist, und deren Radius gleich der wahren Länge der Strecke $1, 2$ ist. In der umgeklappten Lage ist auch die Höhe des Punktes 2 nach der Deformation unmittelbar enthalten.

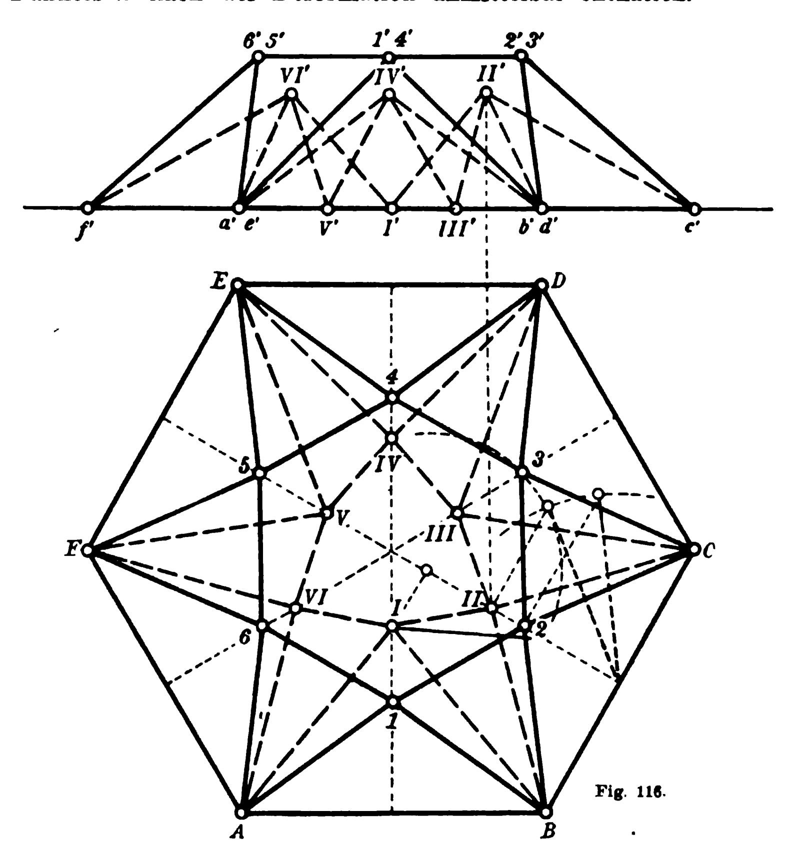


Fig. 116.

37. Aufgabe: *Es soll die Deformation eines aus fünf Gelenkstützen bestehenden Fußgestells ermittelt werden.* Seine Platte sei ein gleichseitiges Dreieck $1, 2, 3$; in zwei Ecken befinden sich je zwei Stützen, an der dritten nur eine; alle Stützen seien gleich lang. Die Fußpunkte der Stützen seien $ABCDE$. Der Knotenpunkt 1 soll sich in die Grundebene legen, es ist somit seine Lage und die deformierte Stellung der Punkte 2 und 3 zu ermitteln (Fig. 117).

Lösung: Der Punkt 1 wird, wie bei der vorigen Aufgabe, durch

Umklappen des Dreiecks $AB1$ bestimmt. Auch die Lage des Punktes 2 wird ähnlich wie in der vorigen Aufgabe ermittelt; er liegt in einer vertikalen Ebene, die das Dreieck $CD2$ halbiert und die umgeklappt wird, im Schnittpunkt zweier Kreise, von denen der eine die Mitte von CD zum Mittelpunkt und die wahre Entfernung des Punktes 2 von CD zum Radius hat, und von denen der andere aus der vertikalen Ebene durch eine Kugel herausgeschnitten wird, deren Mitte die umgeklappte Lage des Punktes 1 und deren Radius die wahre Länge von $1\,2$ ist. Schwieriger ist die Bestimmung der deformierten Lage des Knotenpunktes 3. Dieser muß erstens auf einer Kugel um E mit der wahren Länge von $E3$ als Radius liegen, die die Zeichenebene in einem Kreise um E mit demselben Radius schneidet; er muß zweitens auf einer Kugel um die deformierte Lage von 1 mit der wahren Länge von $1\,3$ als Radius liegen, die aus der Zeichenebene einen Kreis um denselben Mittelpunkt mit demselben Radius herausschneidet. Die gemeinschaftliche Sehne der so ermittelten beiden Kreise stellt dann die Projektion des Schnittkreises der beiden angegebenen Kugeln dar, auf dem der gesuchte Punkt liegt. Der Übersichtlichkeit

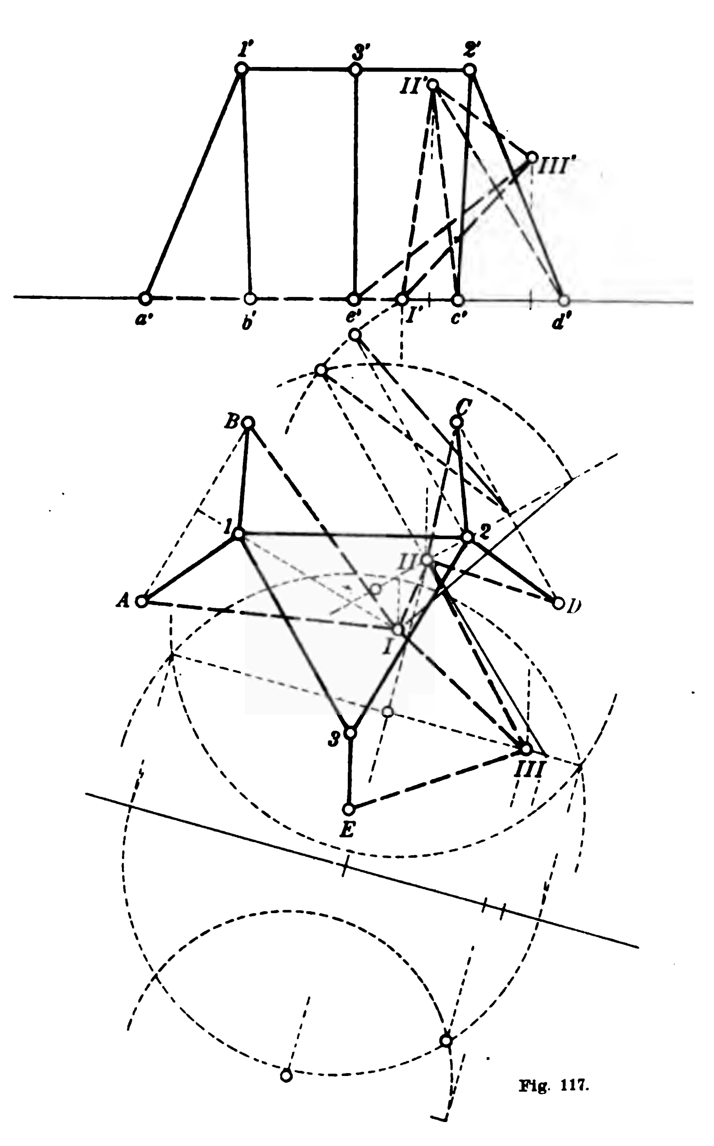


Fig. 117.

halber verrücke man diesen Kreis um ein beliebiges Stück senkrecht zu seiner Ebene und klappe ihn um. Drittens endlich liegt der Punkt *3* nach der Deformation auf einer Kugel um die deformierte Lage des Punktes *2* mit der wahren Länge von *2 3* als Radius. Man bestimme also den Kreis, den diese Kugel aus der zuletzt umgeklappten Ebene herausschneidet; sein Schnittpunkt mit dem in der Umklappung schon verzeichneten Kreise ergibt den gesuchten Punkt. Seine Höhe ist aus der Umklappungsfigur unmittelbar zu entnehmen.

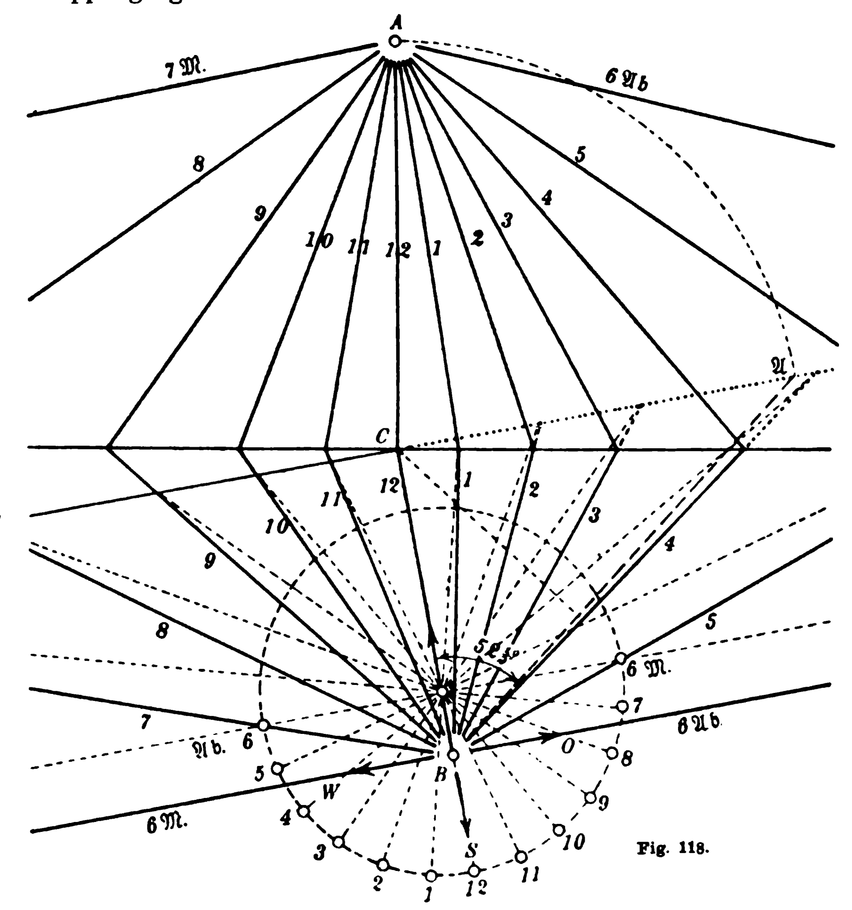


Fig. 118.

38. Aufgabe: *Es soll eine Sonnenuhr in einer horizontalen Ebene und an einer vertikalen Wand, die nicht allzuviel von der Ost-West-Richtung verschieden ist, für eine geographische Breite* φ (für Berlin ist $\varphi = 52^1/_2{}^0$) *konstruiert werden. Die schattenwerfende Linie sei parallel der Erdachse* (Fig. 118).

Lösung: Da die schattenwerfende Linie parallel der Erdachse sein soll, ist durch die Horizontalspur derselben für jede geographisshe Breite die Vertikalspur A bestimmt und kann in der folgenden Weise ermittelt werden. Man zeichne durch einen beliebigen Punkt C der durch B gehenden Nord-Richtung die West-Ost-Richtung und denke sich über BC als Kathete ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei C vertikal aufgestellt und in die Horizontalebene umgeklappt. Seine dritte Ecke $\mathfrak{A}$ wird dadurch bestimmt, daß der Winkel $CB\mathfrak{A}$ gleich φ ist. Die Hypotenuse dieses' Dreiecks in senkrechter Stellung ist dann parallel der Erdachse nach dem Satze: die Polhöhe ist für jeden Ort gleich der geographischen Breite. Durch C ziehe man sodann eine zweite Linie, die von der Ostwestrichtung um denselben Winkel abweicht wie die gegebene vertikale Wand, und errichte auf dieser Linie endlich ein Lot CA gleich $C\mathfrak{A}$, dann ist A die Vertikalspur der schattenwerfenden Linie.

Man konstruiere nun zunächst ihre Schatten für die vollen Stunden — um diese soll es sich nur handeln — auf eine Ebene, welche durch $C\mathfrak{A}$ hindurchgeht und senkrecht auf der schattenwerfenden Linie steht. Der Schatten auf dieser Ebene ist insofern besonders einfach zu konstruieren, als er sich in gleichen Zeiten um gleiche Winkel dreht. Man klappe also diese Ebene in die Horizontalebene um, bestimme in ihr den Spurpunkt von AB — sein Abstand von C ist gleich dem Lote von C auf die Hypotenuse des Dreiecks $BC\mathfrak{A}$ — und schlage um diesen einen Kreis, den man in 24 gleiche Teile so teilt, daß ein Teilpunkt auf BC liegt. Die nach den Teilpunkten gezogenen Radien sind die Schatten zu den vollen Stunden, und zwar weist der Schatten um 6 Uhr morgens nach Westen, um 12 Uhr mittags nach Norden und um 6 Uhr abends nach Osten.

Diese Schattenstrahlen bestimmen auf der Umklappungsspur der Hilfsebene eine Punktskala, durch die auch die entsprechenden Schatten auf der Horizontalebene hindurchgehen müssen; verbindet man daher die einzelnen Punkte mit dem Punkte B, so ist damit die Sonnenuhr in der Horizontalebene ermittelt. Bestimmt man noch die Schnittpunkte der Schattenstrahlen in der horizontalen Ebene mit der Schnittlinie dieser und der vertikalen Wand und verbindet diese Punkte mit dem Punkt A, so ist damit auch die Sonnenuhr auf der vertikalen Wand ermittelt.

IV. Kapitel.

Transformationen.

39. Transformation von Punkt, Gerade und Ebene. Bei der Lösung von Aufgaben nach den bisher besprochenen Methoden stößt man häufig auf Schwierigkeiten, die durch eine spezielle Lage oder andere Gründe hervorgerufen sind, und die es nötig machen, außer der bisher ausschließlich benutzten Horizontal- und Vertikalebene noch *eine oder mehrere andere Projektionsebenen* zu benutzen. Man wählt diese Hilfsprojektionsebenen senkrecht zu einer der beiden bisherigen Projektionsebenen und klappt dieselbe in die Zeichenebene um. Es entsteht dadurch die *Aufgabe*, wenn die Lage der neuen Projektionsebene durch ihre Vertikal-, bzw. Horizontalspur gegeben ist, auf ihr in umgeklappter Lage aus der gegebenen Horizontal- und Vertikalprojektion eine neue Projektion herzustellen, oder die gegebenen Projektionsfiguren auf die neue Projektionsebene zu *transformieren*. Es sei zunächst als Transformationsebene eine *neue Vertikalebene* eingeführt, die durch ihre Horizontalspur gegeben sein mag.

Um *einen Punkt A auf diese Ebene zu transformieren*, beachte man, daß seine neue Vertikalprojektion auf einer Senkrechten zur Umklappungsspur liegen muß, die durch die Horizontalprojektion des Punktes geht. Der Abstand der neuen Vertikalprojektion von der neuen Projektionsachse, d. h. also die neue Höhe des Punktes, muß daher ebenso groß sein wie in der alten Vertikalebene (Fig. 119).

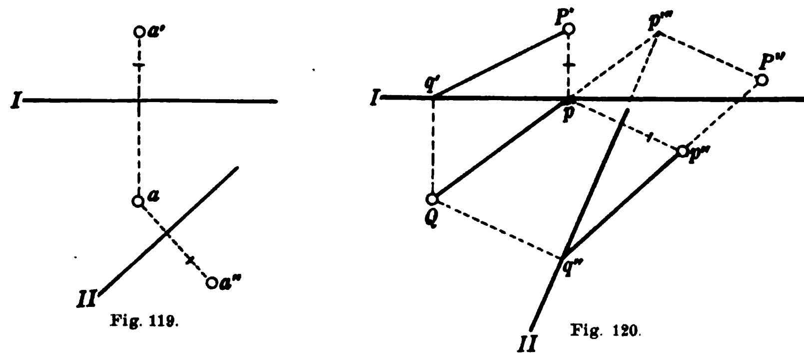


Fig. 119.

Fig. 120.

Um *eine Gerade* auf dieselbe vertikale Hilfsebene zu transformieren, transformiere man zwei ihrer Punkte. Man benutzt dabei zweckmäßig die beiden Spuren der Geraden (Fig. 120). Es sei ausdrücklich hervorgehoben, daß die Transformation der alten Vertikalspur der Geraden in

der neuen Vertikalebene nicht Vertikalspur der Geraden ist; dieselbe muß vielmehr, falls sie verlangt wird, erst konstruiert werden.

Um die neue Vertikalspur einer *durch ihre Spuren gegebenen Ebene* zu bestimmen, klappe man das durch die neue Vertikalebene aus der gegebenen Ebene herausgeschnittene rechtwinklige Dreieck um seine horizontale Kathete um; dann ist seine Hypotenuse in umgeklappter Lage die transformierte Vertikalspur (Fig. 121).

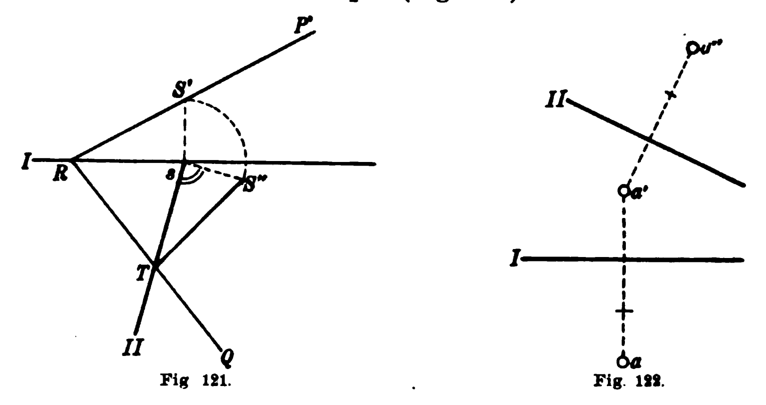


Fig 121. Fig. 122.

Ganz ähnlich gestaltet sich die *Transformation* eines Punktes, einer Geraden und einer Ebene *auf eine neue Horizontalebene,* die also auf der alten Vertikalebene senkrecht steht. Die diesbezüglichen Konstruktionen ergeben sich ohne weiteres aus den Figuren 122—124.

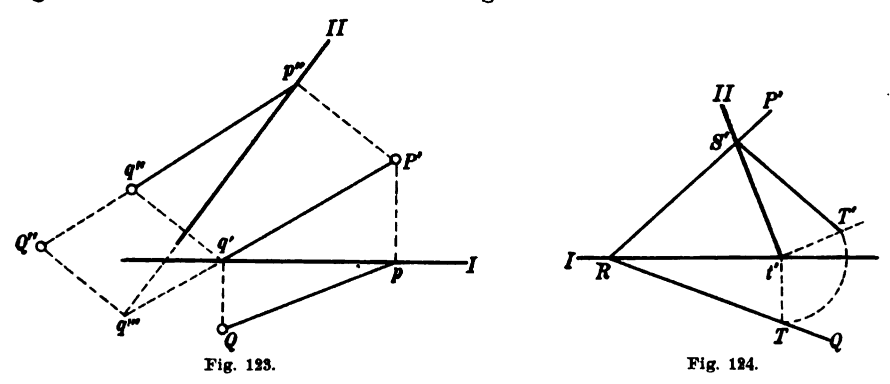


Fig. 123. Fig. 124.

40. Lösung einer Aufgabe durch Transformation in eine besondere Lage. Häufig ist eine Aufgabe ganz besonders einfach zu lösen, wenn in ihr vorkommende Punkte, Geraden oder Ebenen *eine ganz spezielle Lage zu den Projektionsebenen* haben, während die Lösung derselben Aufgabe bei beliebiger Lage der Projektionsebenen Umständ-

lichkeiten oder Schwierigkeiten bereitet. Ist die Aufgabe so gegeben, daß die Projektionsebenen eine beliebige Lage haben, so kann man daher häufig *die Lösung dadurch vereinfachen, daß man durch Transformation eine neue Projektion herstellt,* in welcher sich dann Punkte, Geraden oder Ebenen in einer speziellen Lage befinden. Einige Beispiele mögen das Gesagte erläutern, und zwar wird bei den ersten beiden Beispielen nur einmal transformiert, während bei den letzten drei Aufgaben eine zweimalige Transformation erforderlich ist.

1. Aufgabe: Es soll von einem Punkte eine Senkrechte auf eine Gerade gefällt werden (Fig. 125).

Lösung: Diese Aufgabe ist dann besonders einfach zu lösen, wenn die Gerade parallel zu einer Projektionsebene liegt; in diesem Falle kann man nämlich *das Lot direkt* fällen. Sind daher der Punkt und die Gerade in beliebiger Lage zu den beiden Projektionsebenen gegeben, so wird man zunächst eine Transformation so vornehmen, daß die Gerade zu der neuen Projektionsebene die gewünschte parallele Lage hat. Man wähle also etwa eine neue Vertikalebene parallel zu der gegebenen Geraden, d. h. man wähle die neue Projektionsachse parallel zur Horizontalprojektion der Geraden. Um in der alten Vertikalebene die Projektion des Lotes zu erhalten, hat man nur den durch Transformation bestimmten Fußpunkt des Lotes auf die alte Vertikalprojektion der Geraden hinaufzuloten.

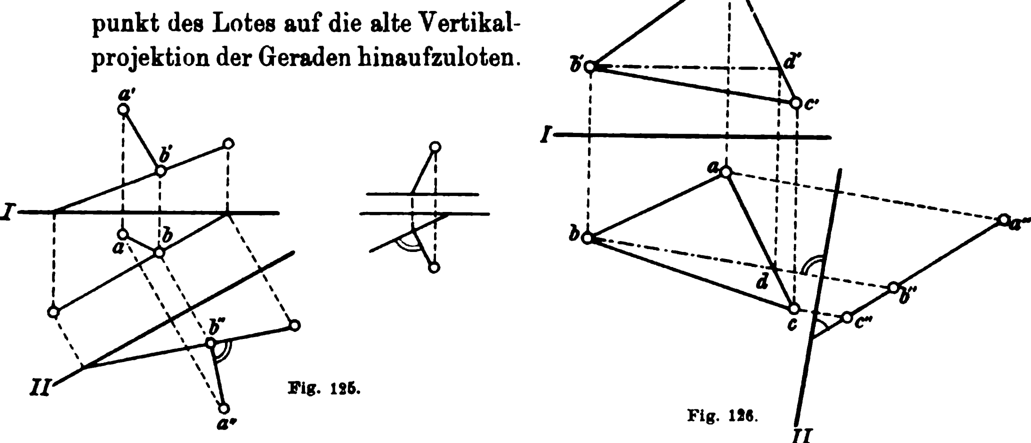


Fig. 125.

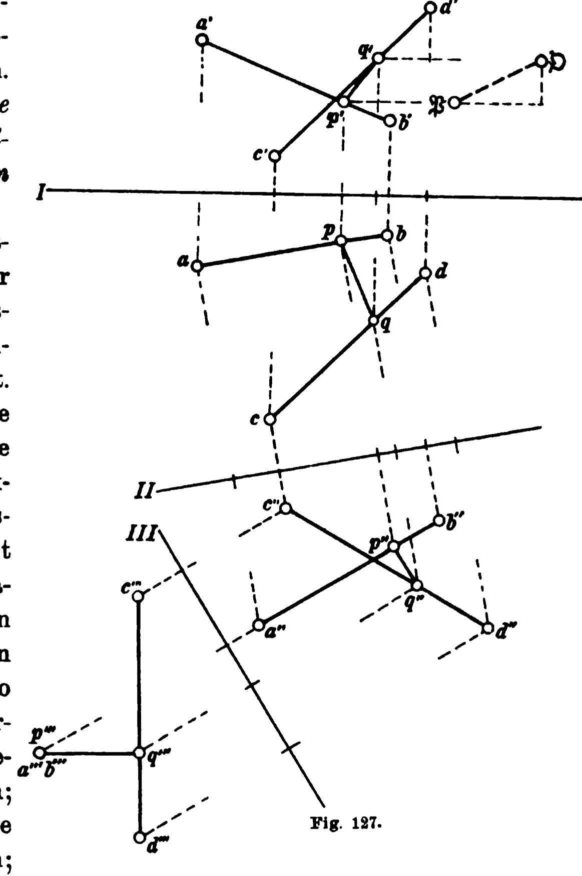
Fig. 126.

2. Aufgabe: Es soll der Horizontalneigungswinkel eines Polygons bestimmt werden (Fig. 126).

Lösung: Der gesuchte Winkel ergibt sich dann direkt, wenn die Ebene des Polygons senkrecht zur Vertikalebene steht, wenn also die Vertikalprojektion des Polygons sich als gerade Linie darstellt. Bei beliebiger Lage des Polygons zu den beiden Projektionsebenen wird man

daher das Polygon zunächst so transformieren, daß die neue Vertikalebene senkrecht auf der Ebene des Polygons steht. Um die neue Projektionsachse zu bestimmen, konstruiere man zunächst in der Ebene des Polygons zweckmäßig durch eine seiner Ecken eine horizontale Gerade, senkrecht auf dieser muß die neue Vertikalebene stehen, d. h. die neue Projektionsachse muß senkrecht auf der Horizontalprojektion dieser Geraden stehen.

3. Aufgabe: Man soll die kürzeste Entfernung zweier windschiefer Geraden bestimmen (Fig. 127).



Lösung: Die kürzeste Entfernung zweier windschiefer Geraden ist eine Verbindungsstrecke derselben, die auf beiden Geraden senkrecht steht. Man kann diese Senkrechte dann *direkt* ziehen, wenn eine von den beiden Geraden senkrecht auf einer Projektionsebene steht, sich also als Punkt auf diese projiziert. Sind daher die beiden Geraden in einer beliebigen Lage zu den Projektionsebenen gegeben, so muß zunächst durch Transformationen die beschriebene spezielle Lage hergestellt werden; das ist nun durch eine einmalige Transformation nicht möglich; indessen gelingt es durch zweimaliges Transformieren. Man wähle als erste Transformationsebene eine Vertikalebene, die parallel zu einer der beiden Geraden liegt. Die bei dieser Transformation benutzte Projektionsachse muß daher parallel zu der Horizontalprojektion dieser Geraden verlaufen. Man stelle sich nunmehr diese erste Transformation als Horizontalprojektion und die ursprüngliche Horizontalprojektion als Vertikalprojektion vor, dann ist für diese beiden Projektionsebenen die eine der beiden Geraden parallel mit der Horizontalebene. Wählt man endlich als zweite Transformationsebene eine vertikale Ebene, senkrecht zu

dieser Geraden — eine zweite Projektionsachse also senkrecht zu dieser Geraden — so wird in der nunmehr erhaltenen Projektion dieselbe Gerade als Punkt erscheinen, von dem aus die kürzeste Entfernung direkt senkrecht zur anderen zweimal transformierten Geraden gezogen werden kann. — Es empfiehlt sich bei der Durchführung der Konstruktion, um sich vor Verwirrungen zu schützen, zunächst die eine der beiden Geraden zweimal zu transformieren und hierauf erst die Transformationen mit der anderen Geraden auszuführen.

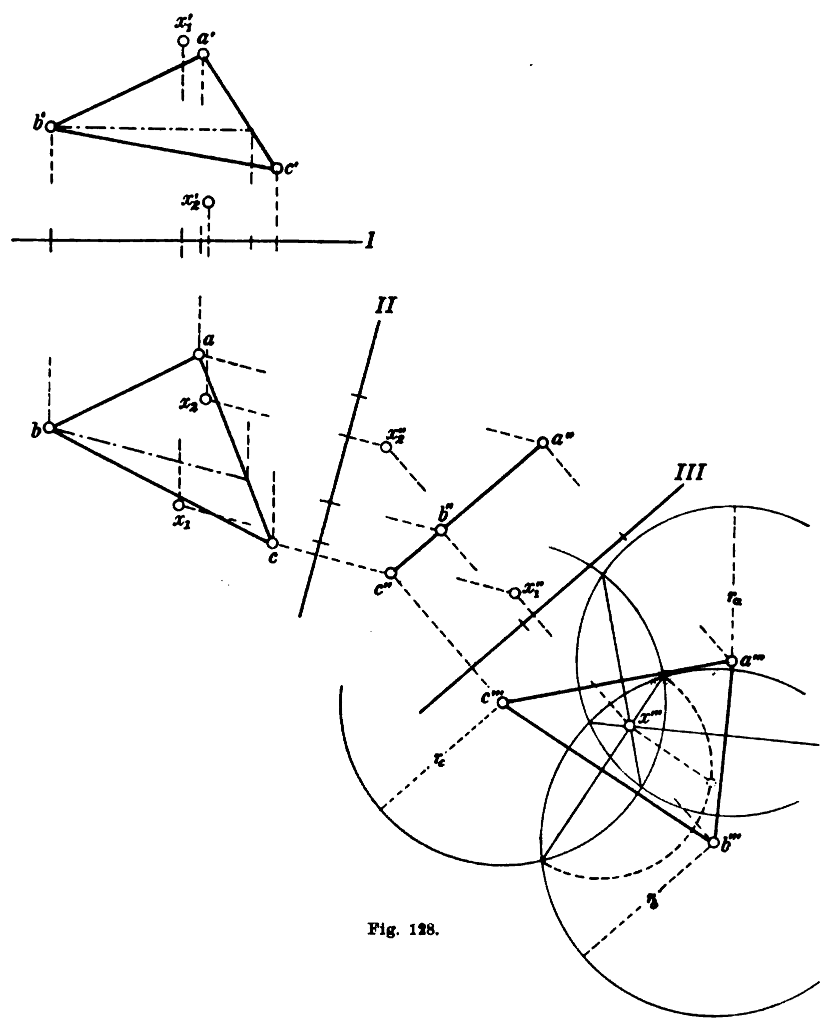


Fig. 128.

4. Aufgabe: Es soll ein Punkt X konstruiert werden, der von drei gegebenen Punkten A, B und C die gegebenen Abstände r_a, r_b *und* r_c *hat* (Fig. 128).

Lösung: Aus der in § 25 mitgeteilten Lösung dieser Aufgabe geht hervor, daß es darauf ankommt, die Ebene der drei Punkte als Zeichenebene zu benutzen; dieses Ziel kann aber durch eine doppelte Transformation folgendermaßen erreicht werden. Man transformiere zunächst so auf eine neue Vertikalebene, daß die Ebene der drei Punkte — das Dreieck ABC — senkrecht auf dieser steht. Die Transformationsachse steht dann senkrecht auf der Horizontalprojektion einer im Dreieck liegenden — zweckmäßig durch eine seiner Ecken gezogenen — horizontalen Geraden. Das Dreieck projiziert sich dann in der neuen Projektionsebene als gerade Linie. Wählt man parallel zu dieser eine dritte Projektionsachse und transformiert zum zweiten Male, so liegt nunmehr das Dreieck parallel der Projektionsebene; alle Konstruktionen in diesen beiden parallelen Ebenen sind demnach identisch. Die weitere Konstruktion bietet nach dem in § 25 Gesagten keine Schwierigkeit mehr.

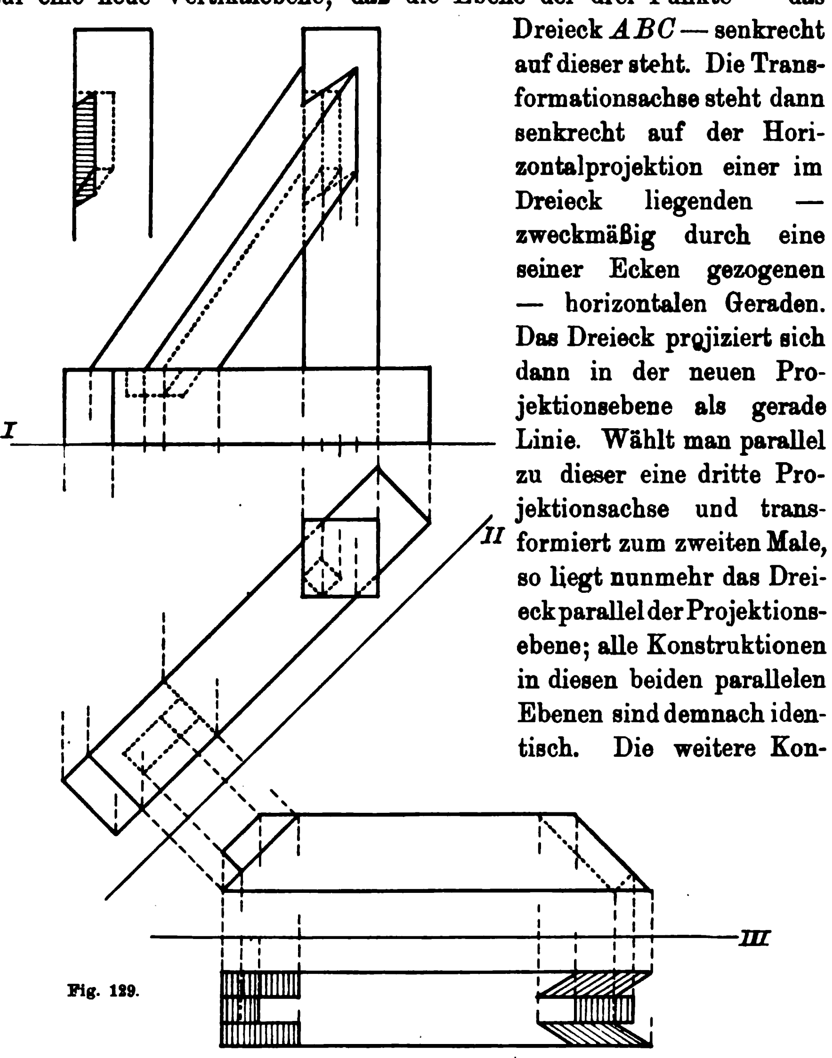


Fig. 129.

5. *Aufgabe: Es soll ein horizontaler Balken mit einem vertikalen durch eine unter einem Winkel von 45° geneigte Strebe verbunden werden;* die drei Balken haben denselben quadratischen Querschnitt; die Strebe soll

in die beiden anderen Balken durch Zapfen eingelassen werden. Dieses Gestell soll auf eine Vertikalebene projiziert werden, die mit den horizontalen Balken einen Winkel von 45° bildet. — In welcher Weise zu transformieren ist, geht aus Fig. 129 ohne weiteres hervor.

41. Der Seitenriß. Sehr häufig leistet eine *Transformationsebene, die senkrecht auf beiden Projektionsebenen steht,* gute Dienste. Eine Pro-

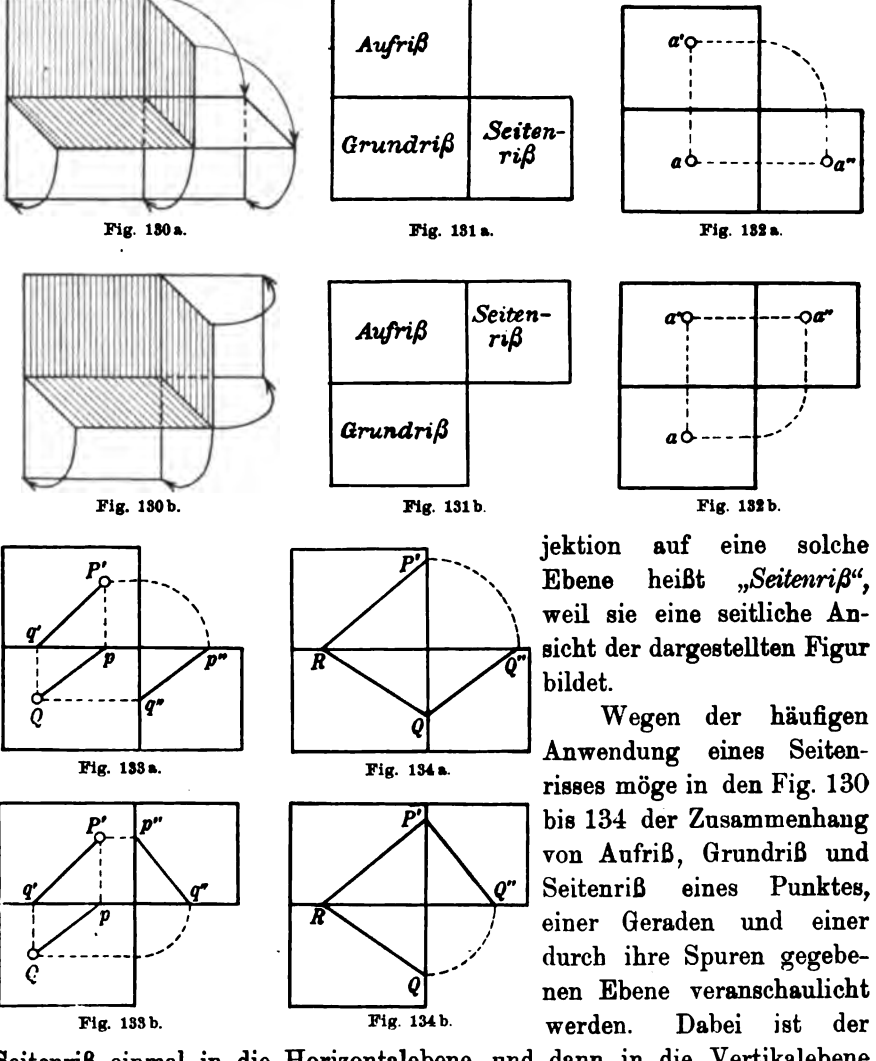


Fig. 130a. Fig. 131a. Fig. 132a.

Fig. 130b. Fig. 131b. Fig. 132b.

Fig. 133a. Fig. 134a.

Fig. 133b. Fig. 134b.

jektion auf eine solche Ebene heißt *„Seitenriß"*, weil sie eine seitliche Ansicht der dargestellten Figur bildet.

Wegen der häufigen Anwendung eines Seitenrisses möge in den Fig. 130 bis 134 der Zusammenhang von Aufriß, Grundriß und Seitenriß eines Punktes, einer Geraden und einer durch ihre Spuren gegebenen Ebene veranschaulicht werden. Dabei ist der Seitenriß einmal in die Horizontalebene und dann in die Vertikalebene umgeklappt.

Die Zweckmäßigkeit, bzw. Notwendigkeit der Benutzung eines Seitenrisses mögen die folgenden Beispiele erläutern.

42. Anwendungen eines Seitenrisses.

1. Aufgabe: Die Fußfläche eines Schornsteines ist in der Horizontalprojektion eines geneigten ebenen Daches, das parallel zur Projektionsachse liegt, gegeben. Es soll auch in der gegebenen Vertikalprojektion des Daches die Fußfläche des Schornsteines ermittelt werden. Aus Fig. 135 geht die Konstruktion durch Anwendung eines Seitenrisses unmittelbar hervor.

2. Aufgabe: Von zwei Quadern, deren Kantenlängen gegeben sind, liegt der eine mit einer Fläche in der Horizontalebene, der andere steht mit einer Kante AB ebenda und stützt sich mit einer Fläche auf die Kante MN des

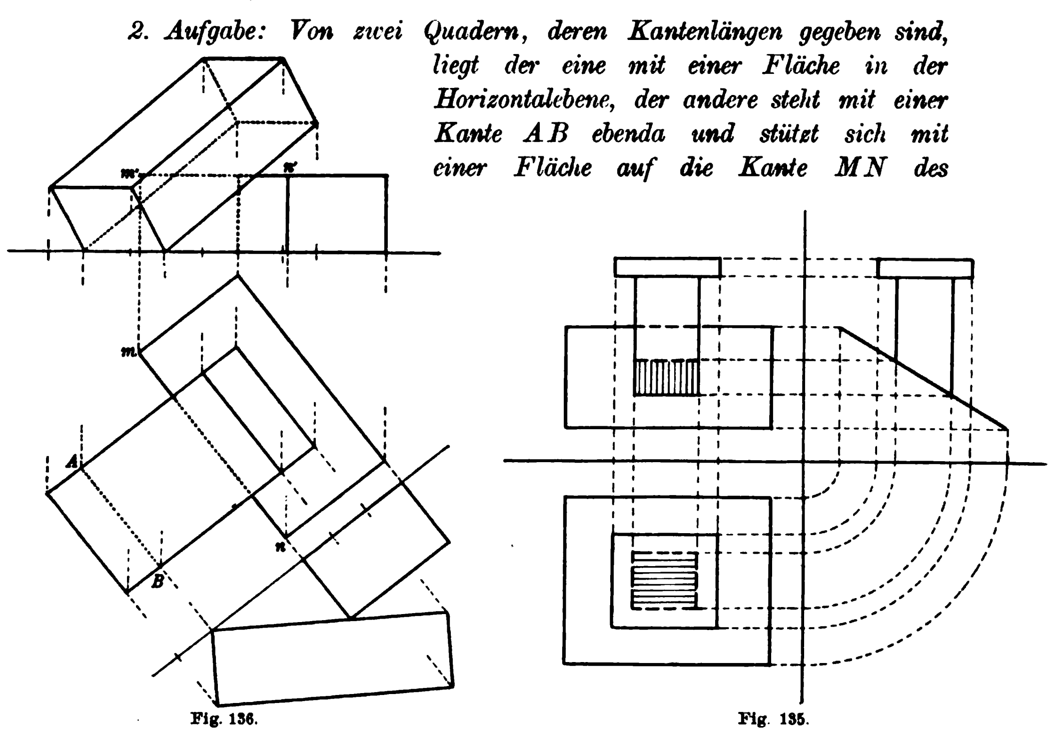


Fig. 136.

Fig. 135.

ersten Quaders. Es sollen die Projektionen des zweiten Quaders ermittelt werden (Fig. 136).

Zur *Lösung* dieser Aufgabe hätte eine eigentliche Seitenrißebene keinen Zweck. Dagegen bietet die Konstruktion keine Schwierigkeiten, wenn man eine Projektionsebene zu Hilfe nimmt, die senkrecht auf den Kanten MN und AB steht. Da die beiden Quader sich in dieser Ebene gewissermaßen von der Seite gesehen projizieren, so spricht man auch hier von einem „Seitenriß" der beiden Körper.

43. Umgehung von Schwierigkeiten, wenn Konstruktionspunkte über das Zeichenblatt hinausfallen. Fallen wichtige Konstruktionspunkte über das Zeichenblatt hinaus, so kann man dieser Schwierigkeit häufig durch eine Transformation aus dem Wege gehen; meistens genügt eine neue Projektionsebene parallel einer alten. Die folgende *Aufgabe* möge das Verfahren erläutern.

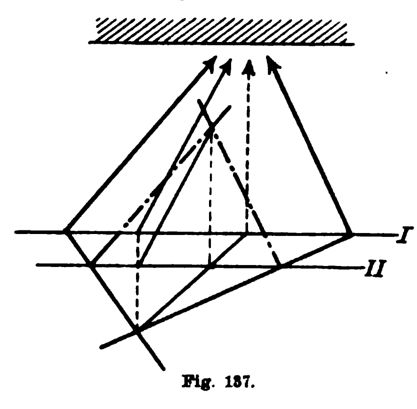


Fig. 137.

Es soll die Schnittlinie zweier durch ihre Spuren gegebenen Ebenen bestimmt werden, wenn der Schnittpunkt der beiden Vertikalspuren über die Grenze des Zeichenblattes fällt (Fig. 137).

Lösung: Hier führt eine neue Vertikalebene parallel der alten zum Ziel. Sie muß so weit vor der alten liegen, daß die neuen Vertikalspuren der gegebenen Ebenen sich auf dem Zeichenblatt schneiden, so daß die Vertikalprojektion der Schnittlinie in ihr gezeichnet werden kann. Zu ihr muß aber die gesuchte Vertikalprojektion in der ursprünglichen Vertikalebene parallel sein.

44. Besondere Lagen von Punkten, Geraden oder Ebenen bedingen eine Transformation. Die folgenden drei Aufgaben mögen zeigen, wie man durch Transformation Konstruktionsschwierigkeiten aus dem Wege gehen kann, die durch spezielle Lagen von Punkten, Geraden und Ebenen entstehen; es genügt hier fast immer ein Seitenriß.

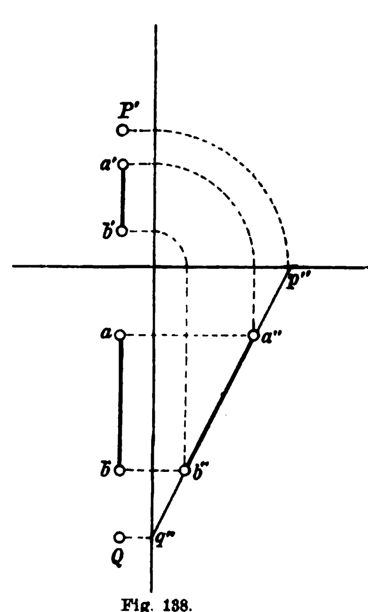


Fig. 138.

1. Aufgabe: Es sollen die Spuren einer Geraden bestimmt werden, deren Projektionen senkrecht zur Achse liegen (Fig. 138).

Lösung: Die Lage der Geraden ist natürlich erst dann eindeutig bestimmt, wenn beide Projektionen von mindestens zweien ihrer Punkte gegeben sind. Durch Herstellung eines Seitenrisses dieser beiden Punkte werden die gesuchten Spurpunkte zunächst im Seitenriß bestimmt und hierauf von diesem in die Horizontalebene und die Vertikalebene übertragen.

2. Aufgabe: Es soll die Schnittlinie zweier

durch ihre Spuren gegebenen Ebenen bestimmt werden, die beide parallel zur Achse liegen (Fig. 139).

Lösung: Auch hier benutzt man zweckmäßig einen Seitenriß. Man bestimmt in ihm die Spuren der beiden Ebenen, ihr Schnittpunkt ist der Seitenriß der gesuchten Schnittlinie.

3. *Aufgabe: Es soll die Schnittlinie zweier Ebenen bestimmt werden, von denen die eine durch die Achse geht,* also durch die Lage eines ihrer Punkte eindeutig bestimmt sein muß (Fig. 140).

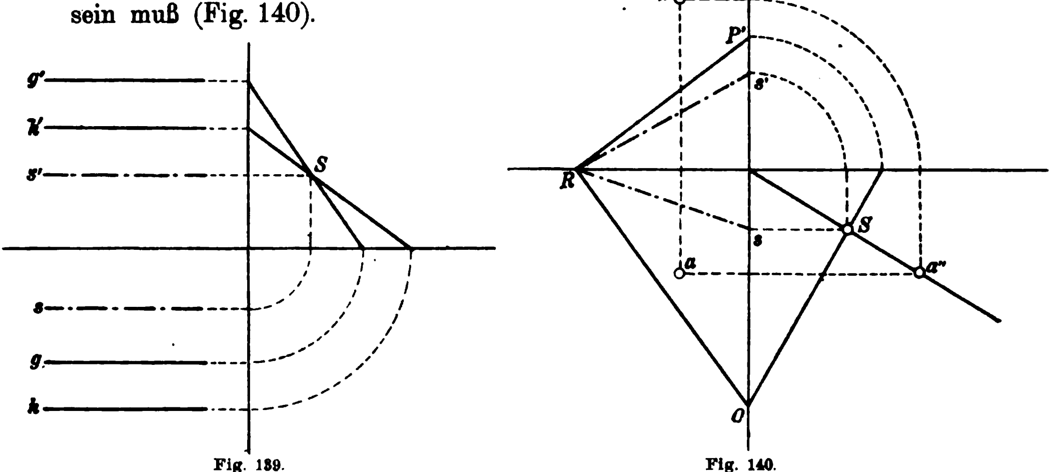


Fig. 139. Fig. 140.

Lösung: Wiederum zeichne man im Seitenriß die Spuren der beiden Ebenen, übertrage ihren Schnittpunkt auf die Schnittlinie des Seitenrisses mit der Vertikal- und Horizontalebene und verbinde die so erhaltenen Punkte mit dem Schnittpunkt der Projektionsachse und der nicht durch sie hindurchgehenden gegebenen Ebene.

V. Kapitel.

Diskussion von Polyedern.

45. Diskussion von Polyedern. Bei der Projektion von Polyedern kommen im allgemeinen zwei Aufgaben in Betracht.

1. Es ist von dem Polyeder die erforderliche Anzahl von Bestimmungsstücken gegeben, die Projektionen des Polyeders sind gesucht.

2. Die Projektionen eines Polyeders liegen gezeichnet vor, es sollen seine metrischen Beziehungen, also die wahren Längen seiner Kanten,

die wahre Gestalt seiner Seitenflächen, die Kanten- und Flächenwinkel bestimmt werden.

Meistens jedoch kommen beide Aufgaben zusammen vor, etwa in der Form: *von einem Polyeder ist die nötige Anzahl von Bestimmungsstücken gegeben, es sollen die übrigen Stücke gesucht werden, oder es soll der Körper „diskutiert" werden.*

Die Lösung dieser Aufgabe vereinfacht sich natürlich außerordentlich durch eine *zweckmäßige Wahl der Projektionsebenen.* Dabei sind z. B. Symmetrieverhältnisse des Körpers zu berücksichtigen, auch ist es meist vorteilhaft, den Körper mit einer Fläche in die Horizontalebene zu legen. *Gewöhnlich konzentriert sich die Lösung der Aufgabe auf die Herstellung der Horizontalprojektion,* während die Vertikalprojektion durch Hinaufloten der einzelnen Punkte und Bestimmung ihrer Höhen mittels Neigungsdreiecke bestimmt wird.

Im allgemeinen lassen sich zur Herstellung der Horizontalprojektion keine bestimmten Regeln angeben, das Verfahren hängt ganz von der jeweiligen Natur des vorgelegten Körpers ab. Die in der Technik vorkommenden Körper sind jedoch meist insofern besonders einfach, als sie eine Grundfläche besitzen, an deren Kanten sich je eine Fläche ansetzt, so daß an den Ecken nur Dreikante gebildet werden. Das ist z. B. bei Prismen, Pyramiden, Pyramidenrümpfen, Obelisken, Dachkörpern, Erdkörpern, Mauerkörpern und dgl. der Fall. In den folgenden Paragraphen sind an einigen Beispielen die am häufigsten vorkommenden Konstruktionsmethoden angegeben.

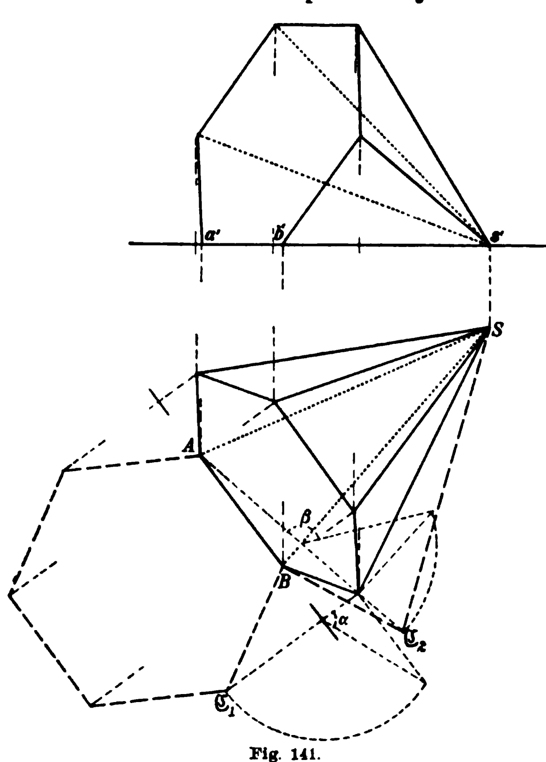


Fig. 141.

46. Aufgabe: *Eine reguläre sechsseitige Pyramide, deren Seitenflächen gegeben sind, liegt mit einer derselben ABS in der Horizontalebene. Es sind die Projektionen der Pyramide und die Flächenwinkel — α an den Grundkanten, β an den Seitenkanten — zu ermitteln* (Fig. 141).

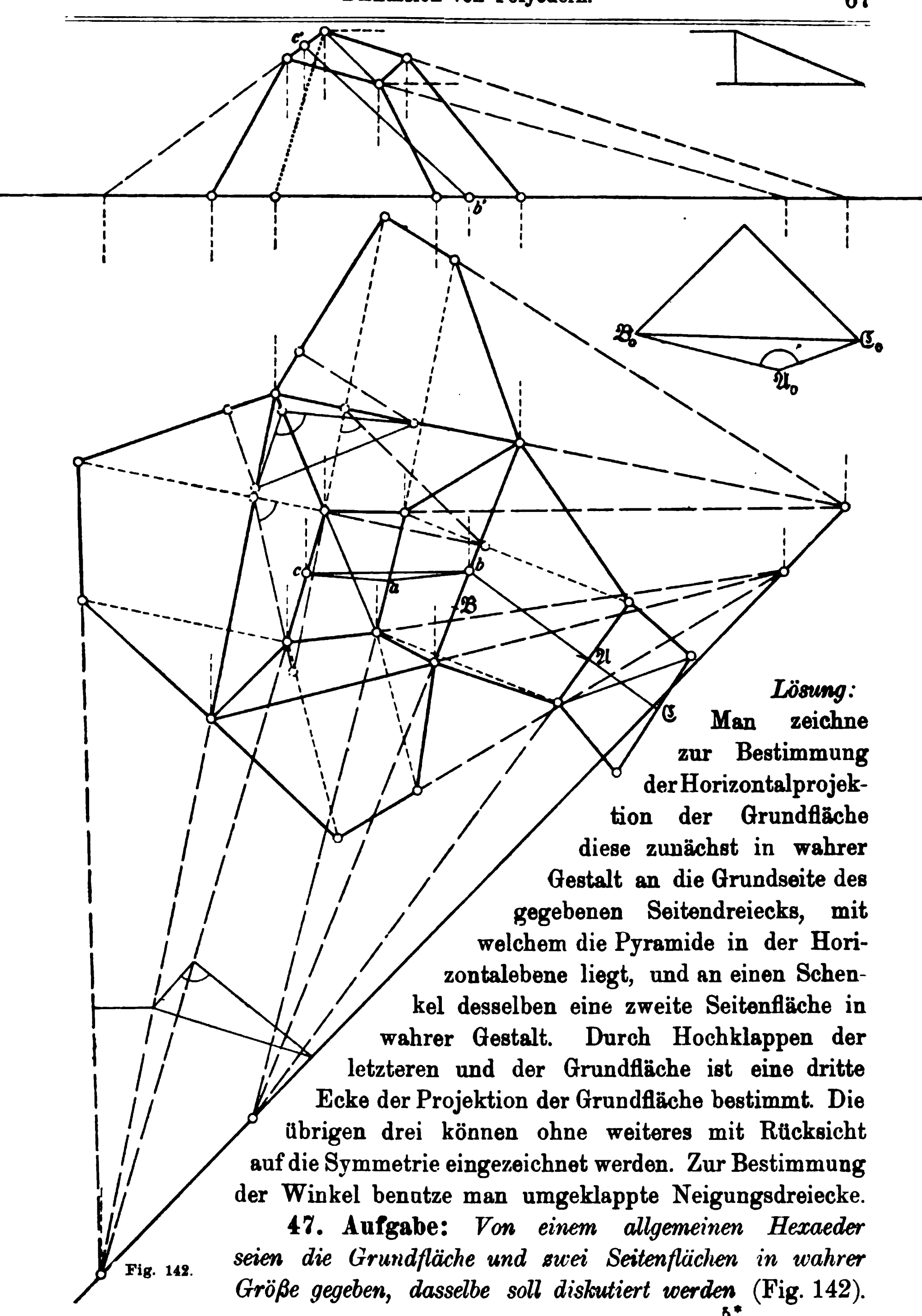


Fig. 142.

Lösung: Man zeichne zur Bestimmung der Horizontalprojektion der Grundfläche diese zunächst in wahrer Gestalt an die Grundseite des gegebenen Seitendreiecks, mit welchem die Pyramide in der Horizontalebene liegt, und an einen Schenkel desselben eine zweite Seitenfläche in wahrer Gestalt. Durch Hochklappen der letzteren und der Grundfläche ist eine dritte Ecke der Projektion der Grundfläche bestimmt. Die übrigen drei können ohne weiteres mit Rücksicht auf die Symmetrie eingezeichnet werden. Zur Bestimmung der Winkel benutze man umgeklappte Neigungsdreiecke.

47. Aufgabe: *Von einem allgemeinen Hexaeder seien die Grundfläche und zwei Seitenflächen in wahrer Größe gegeben, dasselbe soll diskutiert werden* (Fig. 142).

Lösung: Man klappe zunächst die gegebenen beiden Seitenflächen nach oben und bestimme dadurch drei Eckpunkte der viereckigen Dachfläche. Zur Ermittlung ihres vierten Eckpunktes ist es zweckmäßig, ihre Horizontalspur zu konstruieren und die fehlenden beiden Dachkanten dadurch zu bestimmen, daß man sie nach den Schnittpunkten der zugehörigen beiden Grundkanten mit der Dachflächenspur zieht. Die wahre Gestalt der nunmehr gefundenen Seitenflächen ermittelt man durch Umklappung, während die wahre Gestalt der Dachfläche durch Zerlegung derselben in zwei Dreiecke bestimmt wird.

Die Flächenwinkel der vier Seitenflächen können leicht durch Umklappen eines Neigungsdreiecks mit der Spitze in einer Dachecke bestimmt werden; auch die Bestimmung der Flächenwinkel zweier Seitenflächen bietet keine Schwierigkeit und ist bei der Dreikantaufgabe in § 31 bereits mitgeteilt. Zur Bestimmung endlich der Flächenwinkel der vier Seitenflächen mit der Dachfläche kann man entweder gleichfalls die Dreikantkonstruktion benutzen, da die Spur der Dachfläche sowieso schon gezeichnet wurde, oder aber man legt einen ebenen Schnitt durch die betreffende Dachkante senkrecht zu dieser und bestimmt die wahre Gestalt des Dreiecks, das durch die Schnittlinien der Hilfsebene mit der Dachfläche und der betreffenden Seitenfläche bestimmt ist.

48. Aufgabe: *Von einem schiefen fünfseitigen Prisma sind die Grundfläche $ABCDE$ und die zwei Seitenflächen $AB\mathfrak{F}\mathfrak{G}_1$ und $BC\mathfrak{G}_2\mathfrak{H}$ gegeben; es sind die übrigen Seitenflächen und sämtliche Flächenwinkel gesucht* (Fig. 143).

Lösung: Durch Hochklappen der beiden gegebenen Seitenflächen um ihre Horizontalspuren können ohne weiteres von der Deckfläche die beiden Kanten gf und gh ermittelt werden; damit ist aber die ganze Deckfläche bestimmt, da sie kongruent der Grundfläche ist. Die wahren Gestalten der noch fehlenden drei Seitenflächen werden durch Umklappung ermittelt. Um die Flächenwinkel, die von den fünf Seitenflächen gebildet werden, zu bestimmen, fertigt man am besten einen Schnitt des Prismas senkrecht zu seinen Seitenkanten an; das geschieht dadurch, daß man eine Vertikalprojektion parallel zu den Seitenkanten des Prismas herstellt, so daß die Vertikalspur einer zu den Prismenkanten senkrechten Ebene senkrecht auf den Vertikalprojektionen derselben steht, und diese Schnittebene um ihre Horizontalspur umklappt. Zur Ermittelung der Flächenwinkel, die die Seitenflächen mit der Grundfläche bilden, benutze man Neigungsdreiecke.

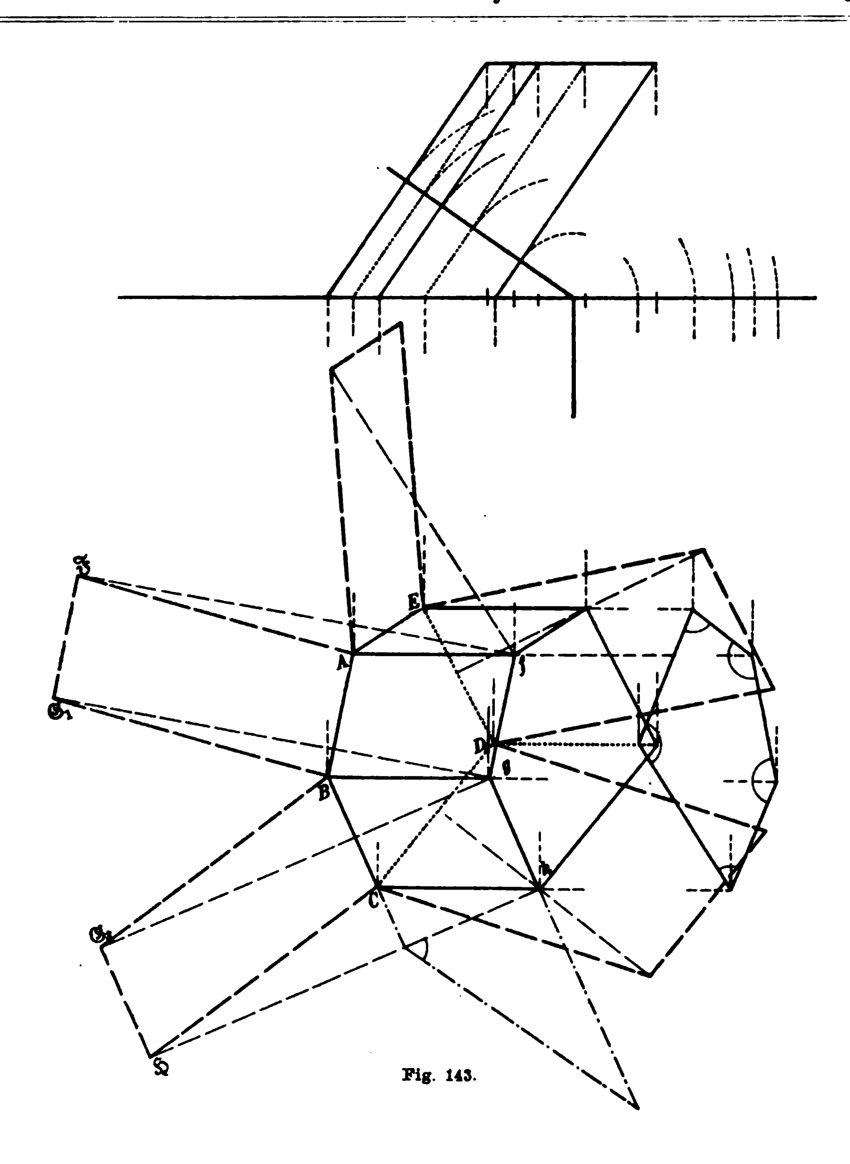


Fig. 143.

49. Aufgabe: *Eine schräge Flügelmauer* habe eine vertikale Hinterwand und innere Seitenfläche, während die äußere Seitenfläche, die Vorder- und die Deckfläche geböscht sind. Es seien die Höhe der Firstkante gleich h, die Höhe der Bruchkante gleich h', die Länge der Firstkante und Bruchkante gleich k, der Winkel der inneren Seitenfläche mit der Hinterwand α ($= 75^0$) das Böschungsverhältnis der Deckfläche $= {}^2/_3$, das Böschungsverhältnis der äußeren Seitenfläche $= {}^4/_1$ und das Böschungs-

verhältnis der Vorderfläche = $^4/_1$ gegeben; es soll die Flügelmauer konstruiert werden (Fig. 144).

Lösung: Man stelle zunächst einen Seitenriß der schrägen Flügelmauer her, in dem auch die Horizontalspur der Deckfläche enthalten ist, und übertrage die dadurch gewonnenen Höhen- und Grundrißpunkte in die Horizontal- und Vertikalebene. Da die Längen der First- und Bruchkante gegeben sind und diese parallel der Vertikalebene liegen, da ferner der Winkel gegeben ist, den die hintere Seitenfläche mit der Hinter-

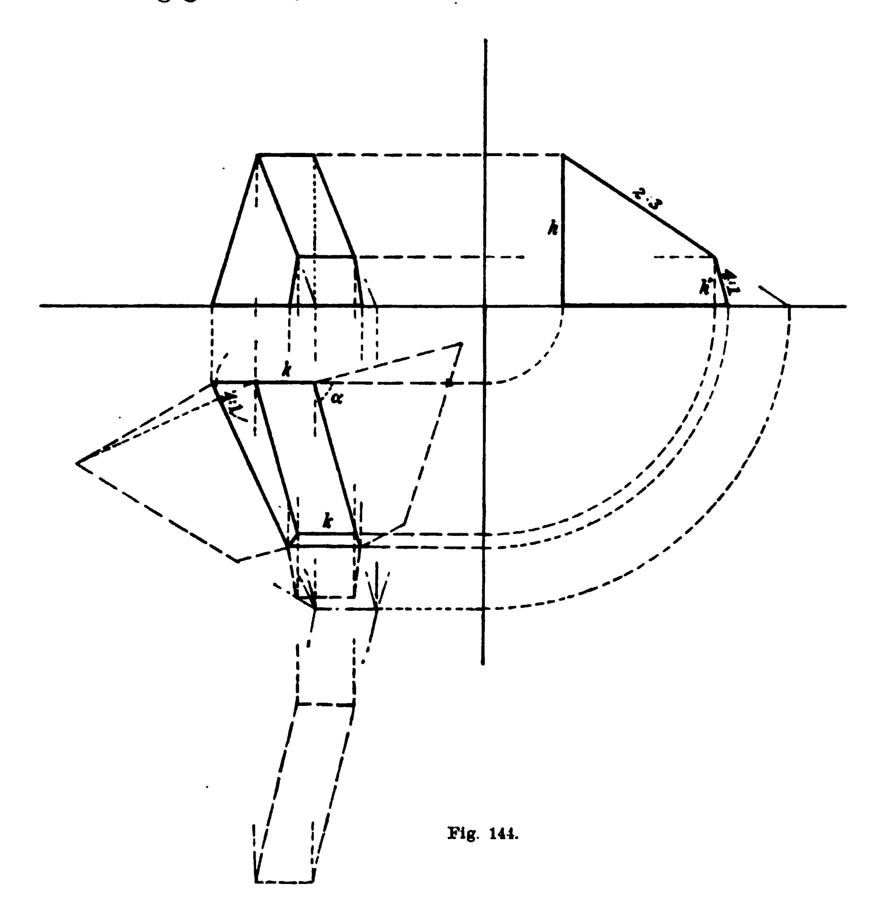


Fig. 144.

wand bildet, ist somit alles bestimmt bis auf die äußere Seitenfläche. Die Grundkante dieser aber ist Tangente an den Grundkreis eines vertikalen Kreiskegels, dessen Spitze sich in der linken Firstecke befindet, und dessen Achse sich zu seinem Grundkreisradius wie 4 : 1 verhält. — Die wahren Gestalten der drei Seitenflächen erhält man durch Um-

klappung um ihre Grundkanten, während die Deckfläche um ihre schon benutzte Horizontalspur umgeklappt wird.

50. Dachausmittelungen. Der Architekt hat nicht selten die Aufgabe zu lösen, ein Dach zu konstruieren, dessen Grundriß gegeben ist, mit der Bedingung, daß durch jede Kante desselben eine Dachfläche unter bestimmtem Neigungswinkel gelegt werden soll.

Der *einfachste Fall ist der, daß alle Dachneigungen einander gleich,* etwa gleich 60°, *sind.* In diesem Falle liegen an jeder Grundrißecke gleichschenklige Dreikante, die sich so projizieren, *daß die Grate und Kehlen des Daches sich je als Winkelhalbierungslinie des zugehörigen Grundrißwinkels darstellen.* Sind die Grundkanten parallel, so ist die zugehörige Firstkante mit ihnen gleichfalls parallel und verläuft in der Mitte zwischen den Grundkanten.

Um die Flächen richtig zusammenzufinden, beginne man an irgend einer Ecke des Grundrisses mit dem Einzeichnen zweier benachbarter Winkelhalbierungslinien und beachte, daß, da drei Ebenen sich in einem Punkte schneiden, sich immer drei von den Winkelhalbierungslinien in einem Punkte schneiden müssen. Seien also a, b und c drei Grundrißkanten, und ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierungslinien der Winkel (ab) und (bc) gefunden, so muß von diesem Schnittpunkt als dritte Dachkante die Halbierungslinie des Winkels (ac) ausgehen, dessen Scheitelpunkt jedoch erst durch Verlängern von a, bzw. c, oder auch beider ermittelt werden muß (Fig. 145).

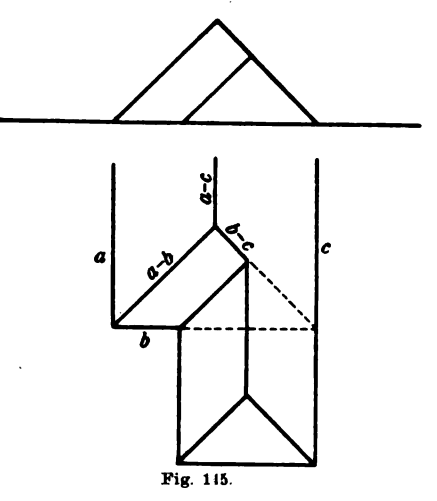


Fig. 145.

Aus der mitgeteilten Konstruktion geht hervor, daß *die Gestalt der Horizontalprojektion* in diesem Falle *unabhängig von dem jeweiligen Neigungswinkel der Dachflächen ist;* dieser kommt erst bei der Ermittelung der *Vertikalprojektion* des Daches *mittels Neigungsdreiecke* in Betracht, mit deren Hilfe auch die *wahren Größen der Dachflächen durch Umklappung* ermittelt werden.

In Fig. 146 und 147 sind etwas kompliziertere Aufgaben ausgeführt.

Häufig werden bei Dachkonstruktionen *verschiedene Neigungswinkel* angewendet, namentlich um gleiche Höhen der Firste zu erzielen. Es seien OB und OC etwa zwei aneinanderstoßende Grundkanten, und es soll durch OB unter dem Neigungswinkel β und durch OC unter dem

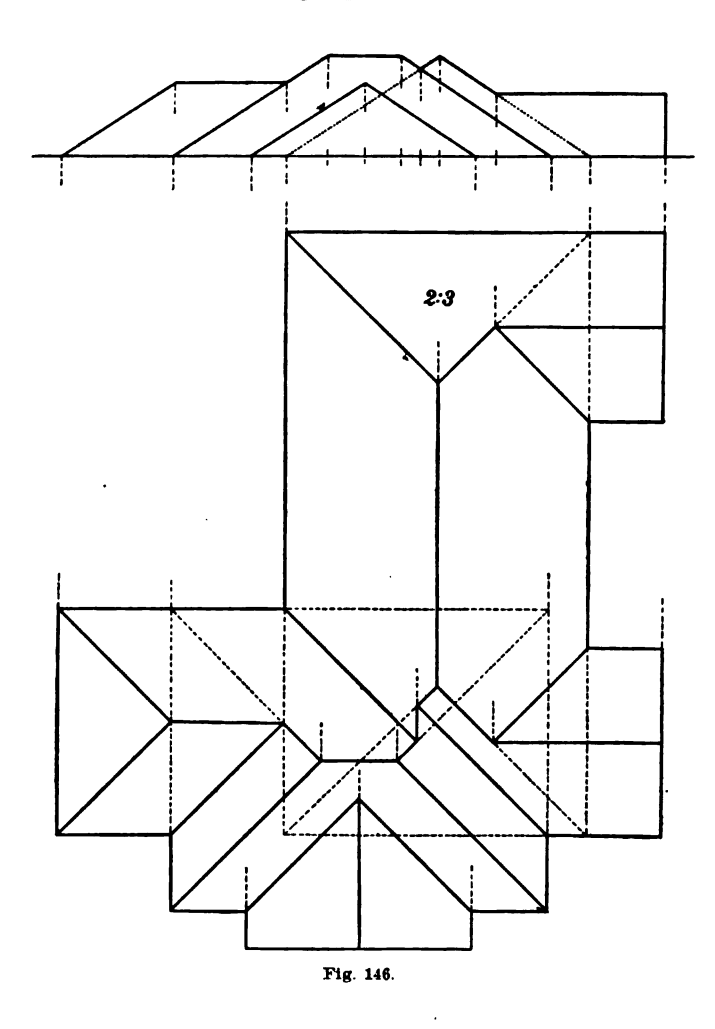


Fig. 146.

Neigungswinkel γ eine Dachfläche gelegt werden (Fig. 148—149). Die Projektion der Schnittkante derselben muß dann durch einen Punkt a gehen, der durch seine Abstände von OB und OC bestimmt ist; diese Abstände aB und aC können aus einem Dreieck ermittelt werden, dessen Grundlinienwinkel β und γ sind, und dessen Höhe den Punkt a bestimmt. —

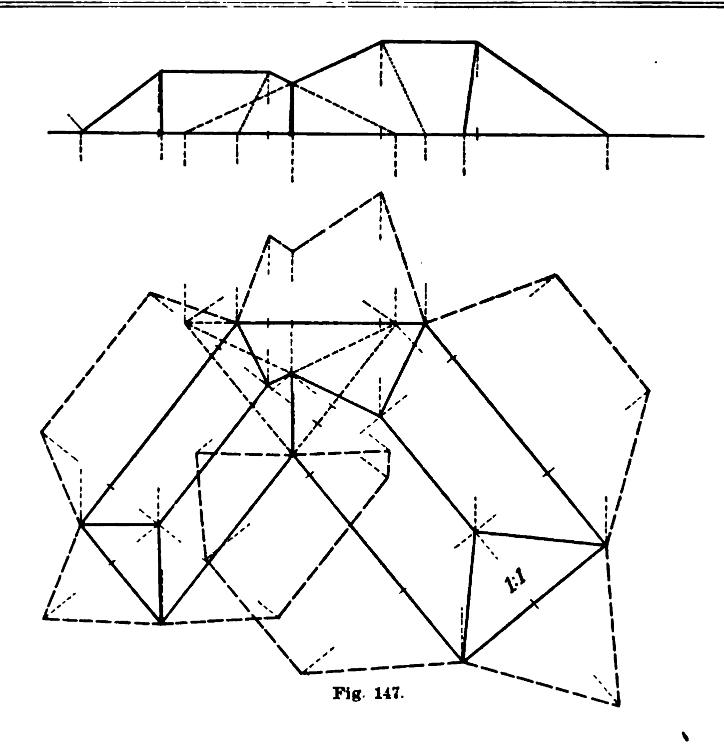


Fig. 147.

Das Zusammenfügen der einzelnen Dachkanten und Flächen geschieht sonst ganz wie in dem Falle, wo alle Neigungswinkel gleich sind.

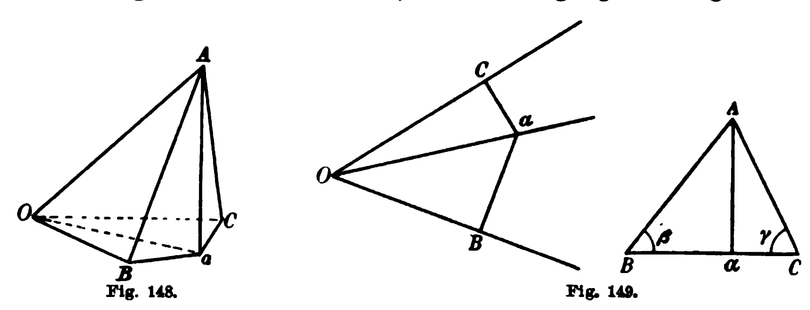


Fig. 148. Fig. 149.

VI. Kapitel.

Ebene Schnitte und Durchdringungen von Polyedern.

51. Ebene Schnitte von Polyedern. Soll die Schnittfigur eines Körpers mit einer Ebene, die durch Polygonprojektionen oder ihre Spuren gegeben sein kann, bestimmt werden, so kann diese Aufgabe durch

wiederholte Anwendung der Konstruktion des Schnittpunktes einer Ebene und einer Geraden dadurch gelöst werden, daß man die einzelnen Kanten des Körpers mit der gegebenen Ebene zum Schnitt bringt und die so ermittelten Schnittpunkte miteinander verbindet.

Häufig kann jedoch die Schnittfigur durch besondere Überlegungen auf einfachere Weise bestimmt werden. Steht z. B. die durch ihre Spuren gegebene *Schnittebene senkrecht auf der Vertikalebene*, so sind die Schnittpunkte der Vertikalspur mit den Körperkanten gleichzeitig die

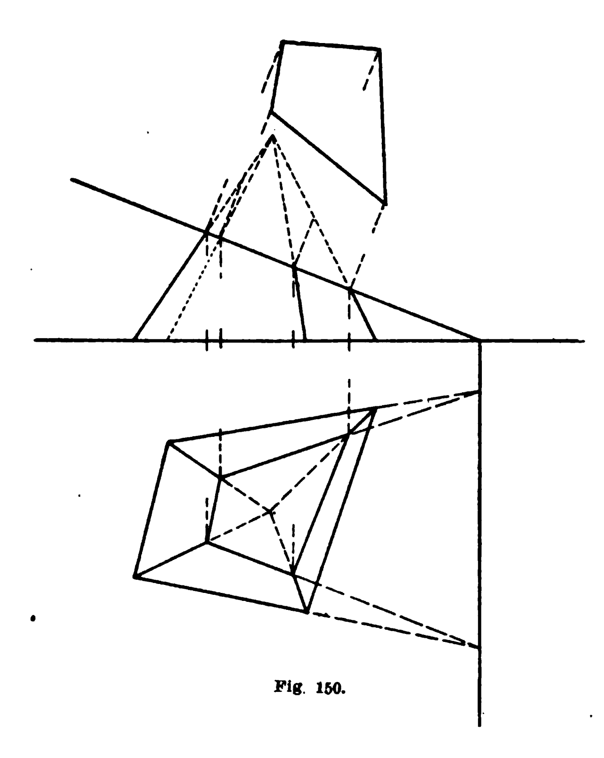


Fig. 150.

Eckpunkte der Schnittfigur, die dann nur noch auf die zugehörigen Kanten der Horizontalprojektion herunterzuloten sind (Fig. 150). Steht *die durch ihre Spuren gegebene Ebene nicht senkrecht auf einer der Projektionsebenen, so führt eine Transformation zum Ziele.* Soll z. B. eine Pyramide durch eine beliebige Ebene geschnitten werden, so stellt man zunächst eine neue Vertikalprojektion senkrecht zur Horizontalspur der gegebenen Ebene her; die Spur derselben in der Transformationsebene wird mittels eines Neigungsdreiecks bestimmt (Fig. 151).

Die *wahre Größe der Schnittfigur wird stets durch Umklappen gefunden* (Fig. 150 u. 143).

Eine *Vereinfachung* kann häufig auch dadurch erreicht werden, daß man berücksichtigt, *daß sich eine Grundkante des Körpers und eine Schnittlinie, die in einer durch die Grundkante hindurchgehenden Körperfläche liegt, auf der Horizontalspur der schneidenden Ebene schneiden müssen* (Fig. 150 u. 151).

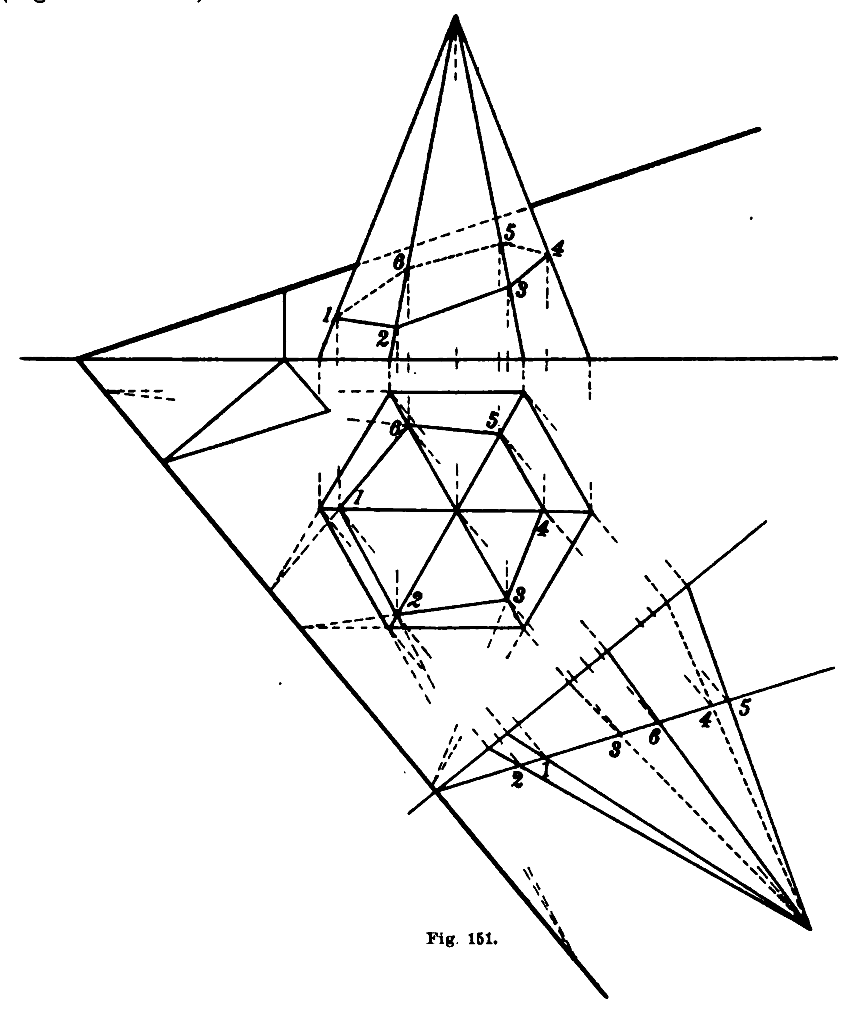


Fig. 151.

52. Erdkörper. Eine häufige und wichtige Anwendung finden die besprochenen Methoden bei Erdarbeiten. Dabei handelt es sich im wesentlichen um folgende beiden Grundaufgaben: erstens, es soll in einem ebenen geneigten Gelände ein *Damm* aufgeschüttet werden und zweitens, es soll ebendort ein *Graben* ausgehoben werden.

Zur *Ermittelung eines Dammes in geneigtem Gelände* denke man sich denselben auf einer Horizontalebene aufstehend und bestimme die Projektion des Dammes auf dieser. Sind die Böschungswinkel vorgeschrieben, so stellt man wieder Kegel auf, deren Spitzen in den Kronenecken des

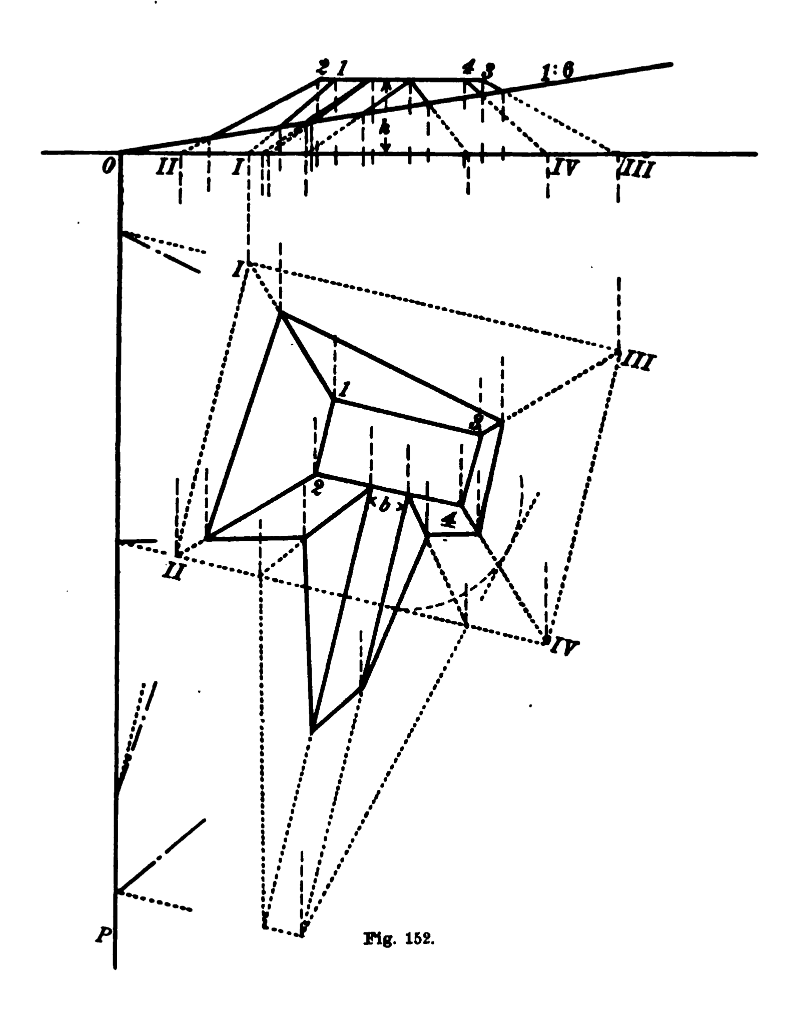


Fig. 152.

Dammes liegen, und die die Böschungswinkel als Basiswinkel haben; die Tangenten an die Grundkreise sind dann die Grundkanten des Dammes. Erst dann schneidet man den Damm durch die Geländeebene, wobei man von vornherein die Vertikalebene zweckmäßig senkrecht auf der Geländeebene annimmt. In Fig. 152 ist z. B. ein Damm mit Rampe

auf geneigtem Gelände zu ermitteln. Gegeben sind die Horizontalspur und das Neigungsverhältnis (1 : 6) des Geländes, die Horizontalprojektion und die Höhe h der Dammkrone, die Breite b und das Steigungsver-

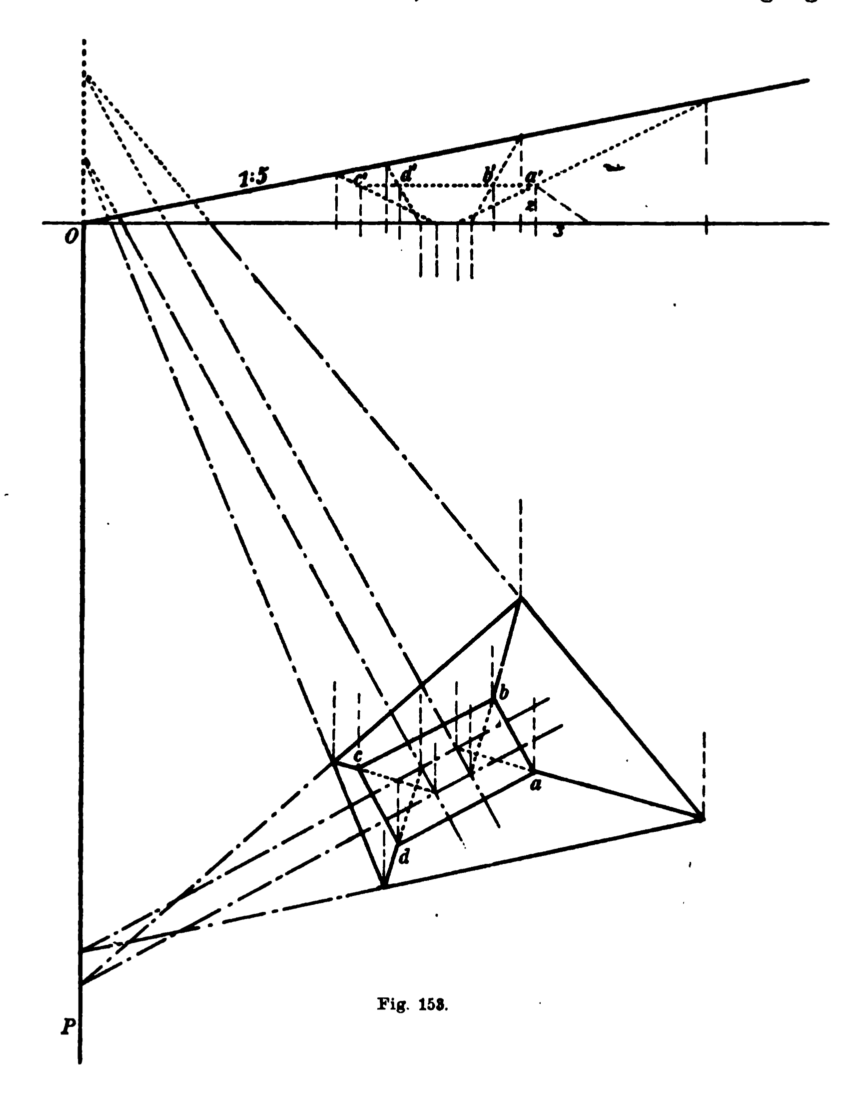


Fig. 153.

hältnis (1:6) der Rampe, sowie das Böschungsverhältnis (2:3) der Dammflächen.

Handelt es sich darum, *in einem geneigten Gelände einen Graben* auszuheben mit horizontaler Sohle, so verfährt man genau so. Man denkt sich zunächst die Grabenwände durch die Geländeebene durchge-

stoßen bis auf die Horizontalebene und bestimmt zunächst die Horizontalprojektion des Grabens wieder mit Zuhilfenahme von Kegeln; natürlich sind bei dem Graben nicht dieselben Tangenten wie bei dem Damm

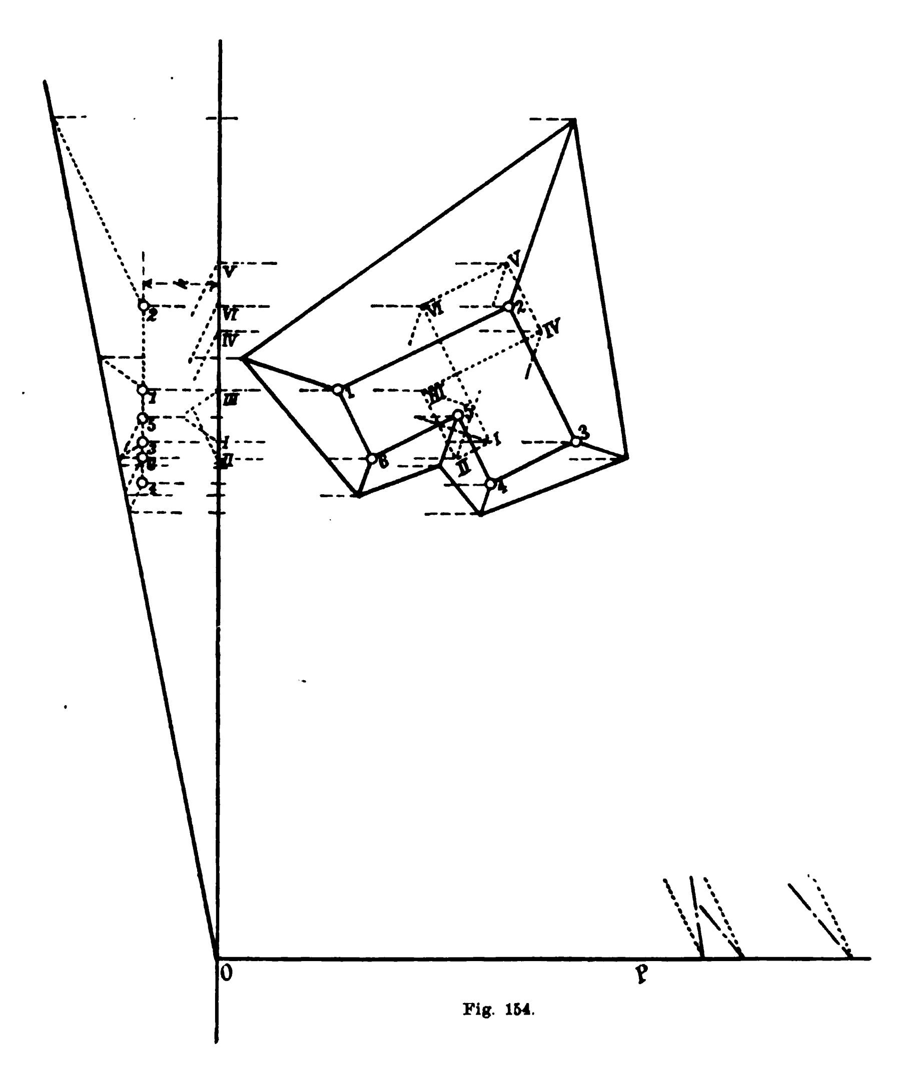


Fig. 154.

zu benutzen. Erst dann schneide man den Graben durch die Geländeebene.

Bei der Aufgabe Fig. 153 ist die Horizontalspur und die Neigung (1 : 5) des Geländes gegeben, ferner der rechteckige horizontale Grabenboden und seine Höhe, und endlich die Neigung der Grabenböschungen

(2 : 3). Die Aufgabe Fig. 154 unterscheidet sich von der eben besprochenen nur dadurch, daß die Grabensohle eine etwas kompliziertere Gestalt hat.

Sehr häufig kommen *beide Aufgaben — Aufschütten eines Dammes und Ausheben eines Grabens — gleichzeitig* vor. Durch Zerlegen des ge-

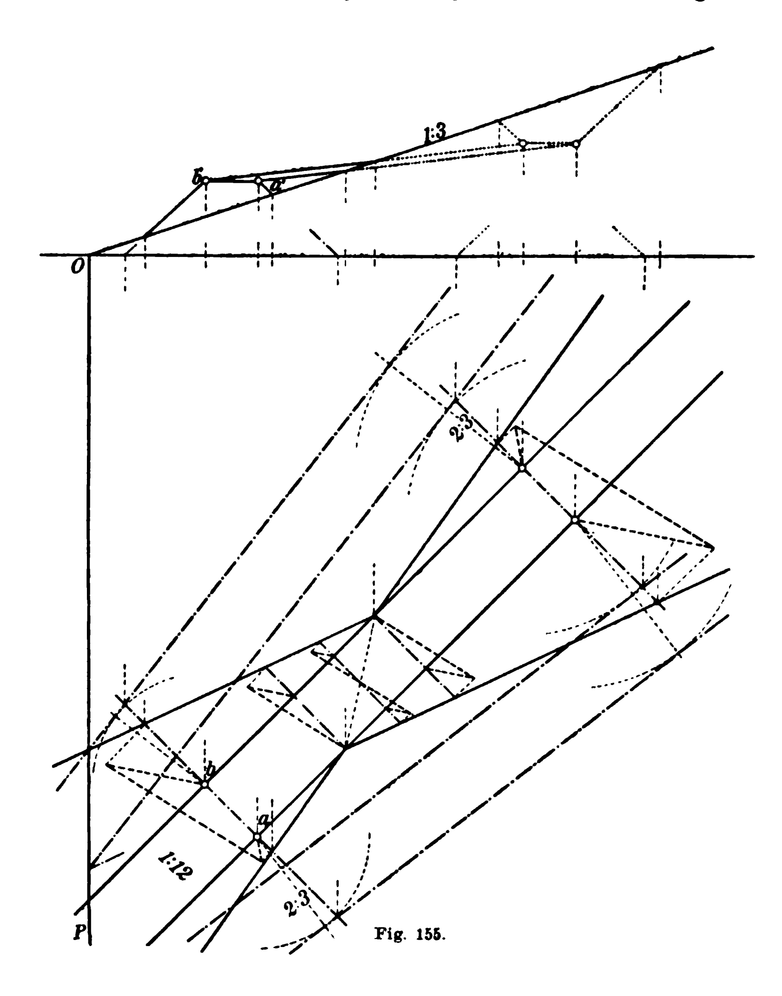


Fig. 155.

suchten Erdkörpers in Damm und Graben, die nacheinander behandelt werden, sind diese Aufgaben auf die schon besprochenen zurückzuführen. Bei der Aufgabe Fig. 155 soll z. B. in einem geneigten Gelände ein Weg teils mit Einschnitt, teils mit Aufschüttung angelegt werden. Gegeben sind die Horizontalspur und die Neigung (1 : 3) des Geländes, die Steigung des Weges (1 : 12), der Punkt *A* der rechten Wegkante

nebst der Richtung der Horizontalprojektion der letzteren, die Wegbreite und das Böschungsverhältnis im Einschnitt und Auftrag (2 : 3). Bei dieser Aufgabe können zur Bestimmung der Grundkanten der Böschungsflächen dieselben Kegel für Einschnitt und Auftrag benutzt werden. — Es empfiehlt sich, an einzelnen Stellen Querprofile zu ermitteln, deren

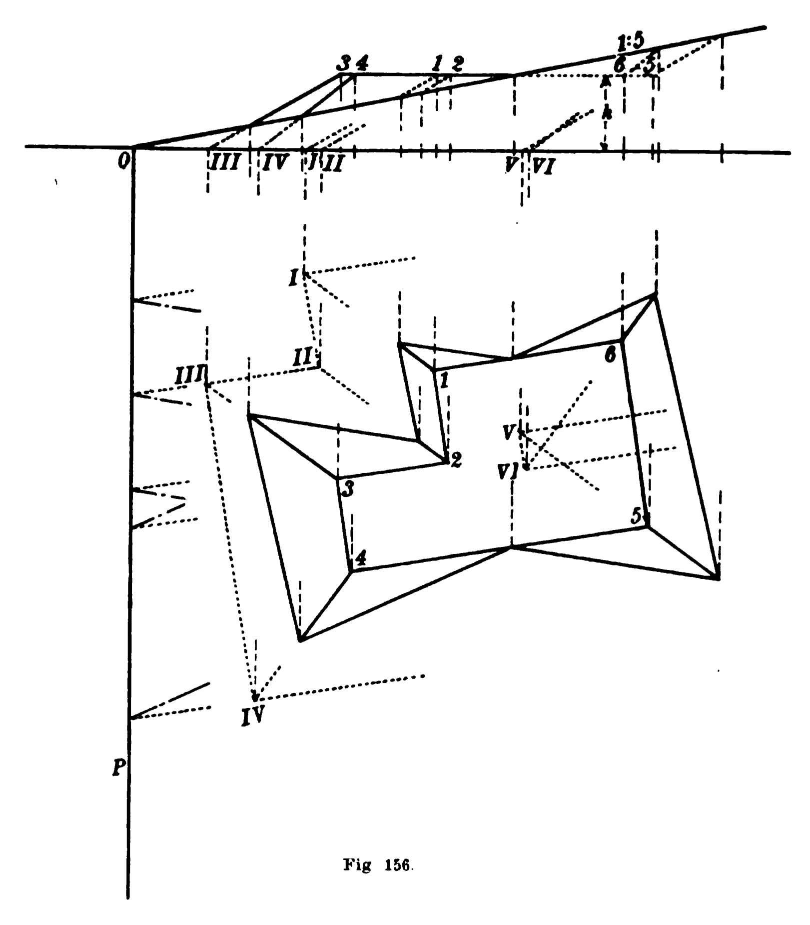
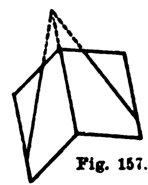


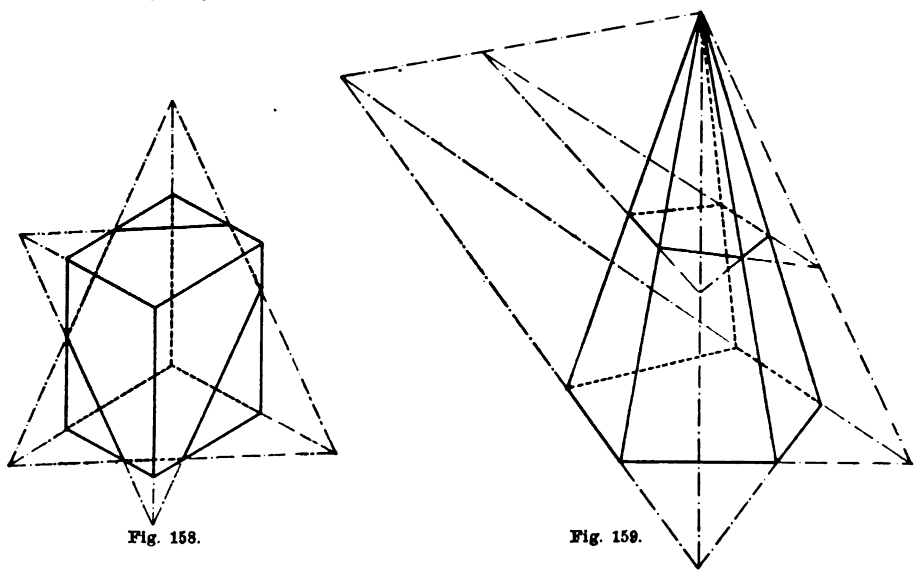
Fig 156.

wahre Größe durch Umklappung bestimmt wird. Sonst bietet diese Aufgabe nach dem früheren keine Schwierigkeit, ebensowenig wie die in Fig. 156 behandelte Aufgabe, bei der in einem geneigten Gelände ein Tennisplatz mit Auftrag und Einschnitt angelegt werden soll. Gegeben ist die Horizontalspur und das Neigungsverhältnis (1 : 5) des Geländes, die Horizontalprojektion und die Höhe des Tennisplatzes, sowie die Böschungsverhältnisse (2 : 3).

53. Benutzung des Schnittpunktes dreier Ebenen. Es wurde bei den vorigen Aufgaben bereits mehrfach, teils zur Kontrolle, teils zur Konstruktion selbst, der Satz benutzt, daß die drei gemeinsamen Schnittlinien dreier Ebenen durch einen Punkt hindurchgehen. Die Anwendung dieses Satzes als *Kunstgriff* führte bei vielen Aufgaben über ebene Schnitte häufig sehr rasch zum Ziele, bzw. erleichterte die Konstruktion, namentlich wenn sogenannte lange Schnitte auftreten, wie das in Figur 151 der Fall war. Immer, wenn Flächen, die an die Grundfläche anstoßen, geschnitten werden, schneiden sich die Grundkanten und Schnittlinien auf der Spur der Schnittebene.


Fig. 157.

Die Benutzung des Schnittpunktes dreier Ebenen ist aber nicht nur in der Horizontalebene möglich, sondern kann ganz allgemein verwendet werden. *Zwei Seiten des Schnittpolygons schneiden sich immer auf der Schnittlinie der beiden Flächen, in denen sie liegen* (Fig. 157). Durch Anwendung dieses Satzes wird eine der beiden Projektionen bei der Konstruktion sogar ganz überflüssig. — Häufig ist die Schnittlinie der be-


Fig. 158. Fig. 159.

treffenden beiden Flächen bereits vorhanden, wie in der Aufgabe Figur 158, bei welcher ein Spat durch eine Ebene geschnitten werden soll, die durch drei gegebene Punkte seiner Kanten hindurchgeht. Sind die Schnittlinien nicht vorhanden, so sind sie häufig leicht konstruierbar. In Figur 159 z. B. ist eine Pyramide eben geschnitten worden durch drei gegebene Punkte auf ihren Kanten. — Beachtenswert ist der Spezial-

fall des genannten Satzes: Die Schnittlinien einer Ebene mit parallelen Flächen sind parallel (Fig. 158).

54. Durchdringungen zweier Polyeder. Wenn zwei Körper sich gleichzeitig an derselben Stelle des Raumes befinden, so durchdringen sie sich gegenseitig; dabei sind *zwei Fälle* möglich: entweder beide Körper scheiden sich gegenseitig ein seitliches Stück heraus, indem sie

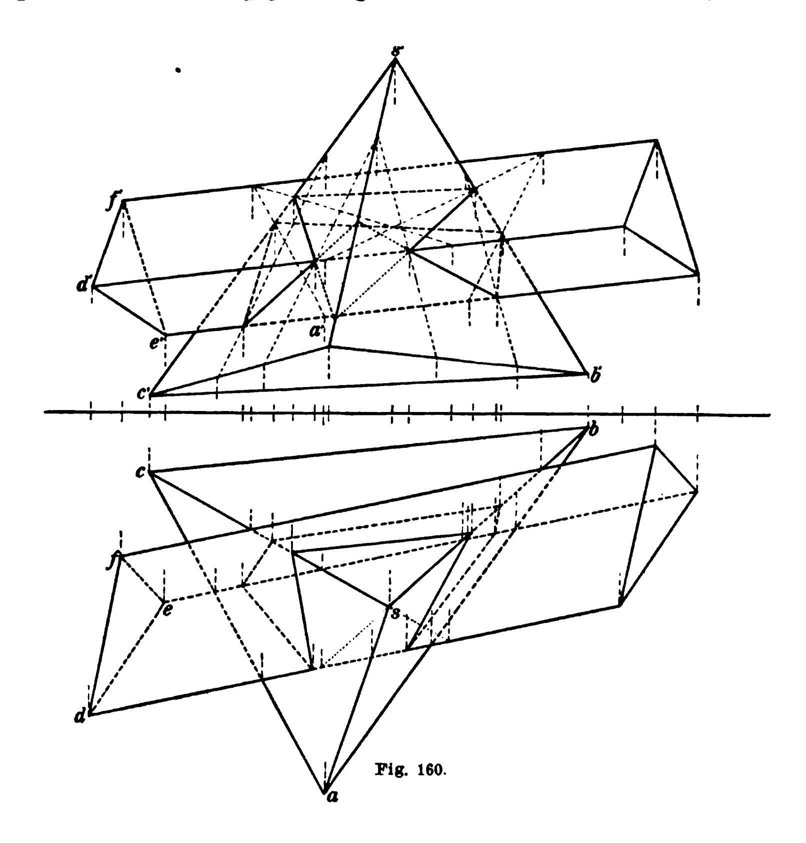
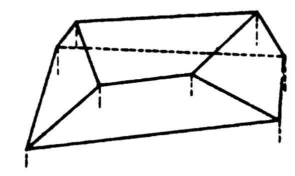


Fig. 160.

sich gabelförmig umfassen; in diesem Falle schneiden sich die Oberflächen beider Körper *in einem geschlossenen polygonalen Zuge, der „Durchdringungsfigur“;* oder ein Körper dringt in den andern ganz ein, verschwindet in diesem und tritt an einer anderen Stelle wieder heraus; in diesem Falle *besteht die Durchdringungsfigur aus zwei polygonalen geschlossenen Zügen.*

In der Praxis tritt die Aufgabe, eine Durchdringung zu konstruieren, in verschiedener Gestalt auf. Bald interessiert nur das beiden Körpern

gemeinsame Stück (Fig. 161), bald der Gesamtkörper (Fig. 160), bald die Restkörper (Fig. 162 und 163), die nach Wegnehmen des von dem andern Körper herausgeschnittenen Stückes übrig bleiben. In allen Fällen *kommt es darauf an, die Durchdringungsfigur zu ermitteln.* Die Seiten dieses windschiefen Polygons werden gebildet von den Schnittlinien, in denen sich die Flächen der Körper schneiden. Die Ecken der Durchdringungsfigur werden von den Schnittpunkten gebildet, in denen die Kanten eines Körpers in die Flächen des andern einstoßen. Die Durchdringungsfigur kann einmal durch Konstruktion ihrer Seiten, dann aber auch *durch Ermittelung ihrer Eckpunkte* bestimmt werden; im allgemeinen ist das letztere weitaus einfacher. Die Konstruktion der Durchdringungsfigur setzt sich dann zusammen aus einer Reihe von *Einzelkonstruktionen*, von denen jede darin besteht, *daß man eine Kante des einen Körpers mit einer Fläche des andern zum Schnitt bringt.* Diese Fundamentalkonstruktion ist aber bereits in § 7, Fig. 21, abgehandelt worden.



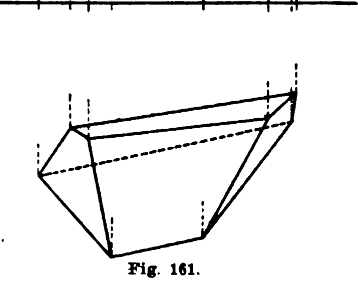


Fig. 161.

Natürlich braucht man nicht jede Kante von jedem der beiden

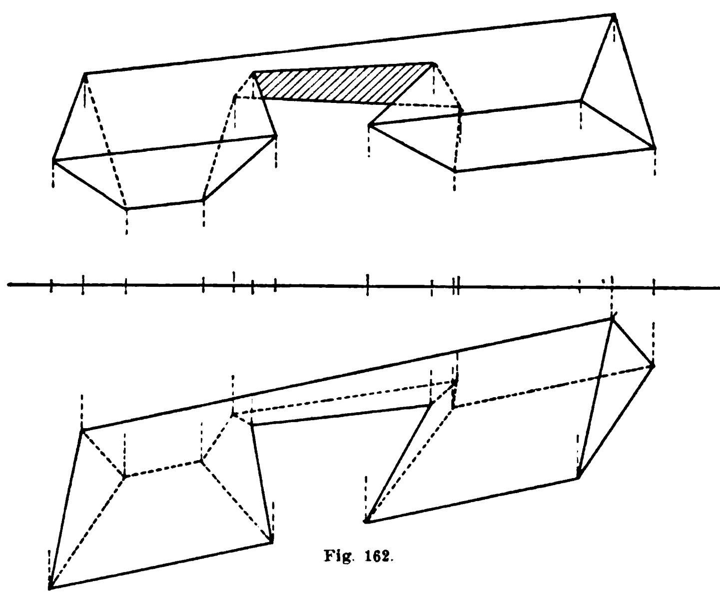


Fig. 162.

Körper daraufhin zu untersuchen, ob sie einen Schnittpunkt mit einer Fläche des andern Körpers besitzt; häufig sieht man ohne weiteres, daß eine Kante eine Fläche nicht schneiden kann, z. B. dann, wenn beide Projektionen der Kante ganz außerhalb der Projektionen der Fläche liegen.

Man beachte auch, daß, wenn nur eine Projektion einer Kante die Projektion einer Fläche so schneidet, daß beide Endpunkte der Kante außerhalb der Fläche liegen, auf dieser Kante entweder gar kein Schnittpunkt, oder zwei und nur zwei liegen können. Selbstverständlich ist ein Schnittpunkt einer Kante mit einer Fläche nur dann eine Ecke der Durchdringungsfigur, wenn derselbe auf der Kante selbst — nicht auf ihrer Verlängerung — und innerhalb der Fläche liegt.

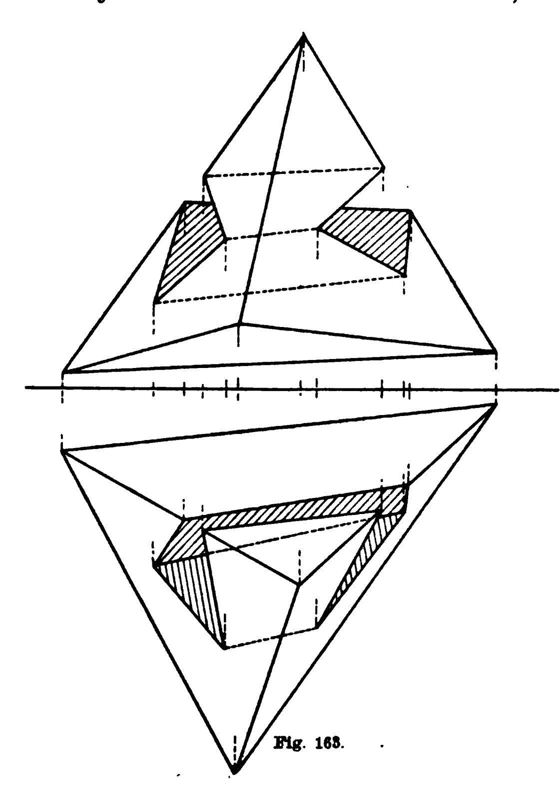
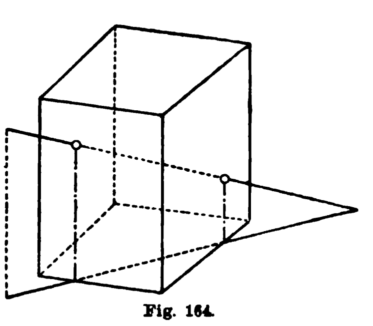


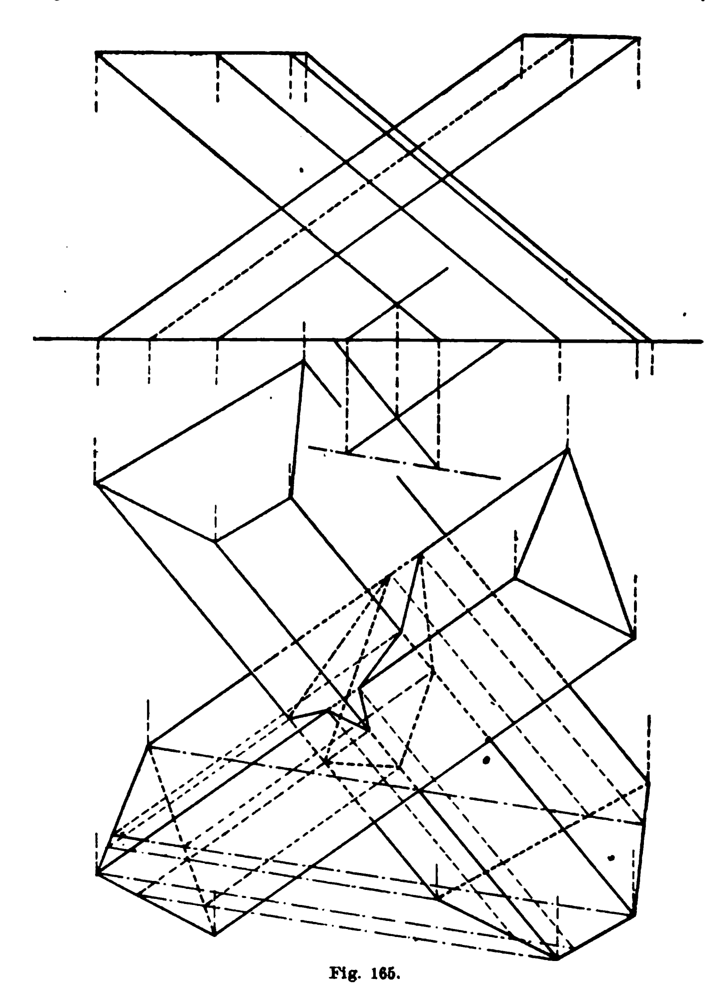
Fig. 163.

Hat man auf diese Weise *alle Ecken der Durchdringungsfigur bestimmt, so sind dieselben durch einen polygonalen Zug zu verbinden.* Dies geschieht folgendermaßen. Man geht von einem beliebigen Punkte aus und sucht einen zweiten Punkt, der sowohl in der nämlichen Fläche des einen, als in der nämlichen Fläche des andern Körpers liegt, verbindet diese beiden Punkte und geht in derselben Weise weiter. Gelangt man schließlich zum Anfangspunkt zurück, und sind alle Punkte durch einen fortlaufenden Linienzug verbunden, so besteht die Durchdringungsfigur aus einem einzigen polygonalen Zuge. Sind dagegen noch einige Punkte übrig geblieben, so zerfällt die Durchdringungsfigur in zwei Polygone. Schließlich sind noch diejenigen Teile der Durchdringungsfigur festzustellen, die von einem der Körper verdeckt werden, also unsichtbar sind. *Eine Linie der Schnittfigur ist nur dann sichtbar, wenn sie sowohl in einer sichtbaren Fläche des einen als auch in einer sichtbaren Fläche des andern Körpers liegt.*

Zum Schlusse kann man als *Genauigkeitsprobe* wieder den Satz anwenden, daß die drei Schnittlinien dreier Flächen durch einen Punkt gehen müssen, und zwar immer dann, wenn in einer Fläche zwei Seiten der Durchdringungsfigur liegen, die nicht direkt aneinander stoßen.


Fig. 164.

55. Durchdringungen von Pyramiden und Prismen. Im vorigen Paragraphen wurde der allgemeinste Fall einer Durchdringung behandelt. Die Konstruktion läßt dann eine wesentliche *Vereinfachung* zu, *wenn es sich um Pyramiden oder Prismen handelt, die mit einer Grundfläche in*


Fig. 165.

der Horizontalebene liegen. **Es ist das zwar ein spezieller Fall, indessen kommt er in der Praxis sehr häufig vor. In diesem Falle schneidet man die beiden Körper durch eine Reihe von Hilfsebenen, deren Schnittlinien mit den Körpern möglichst einfach sind. Das sind bei zwei Prismen Ebenen, die parallel den beiden Seitenkanten sind, bei einem**

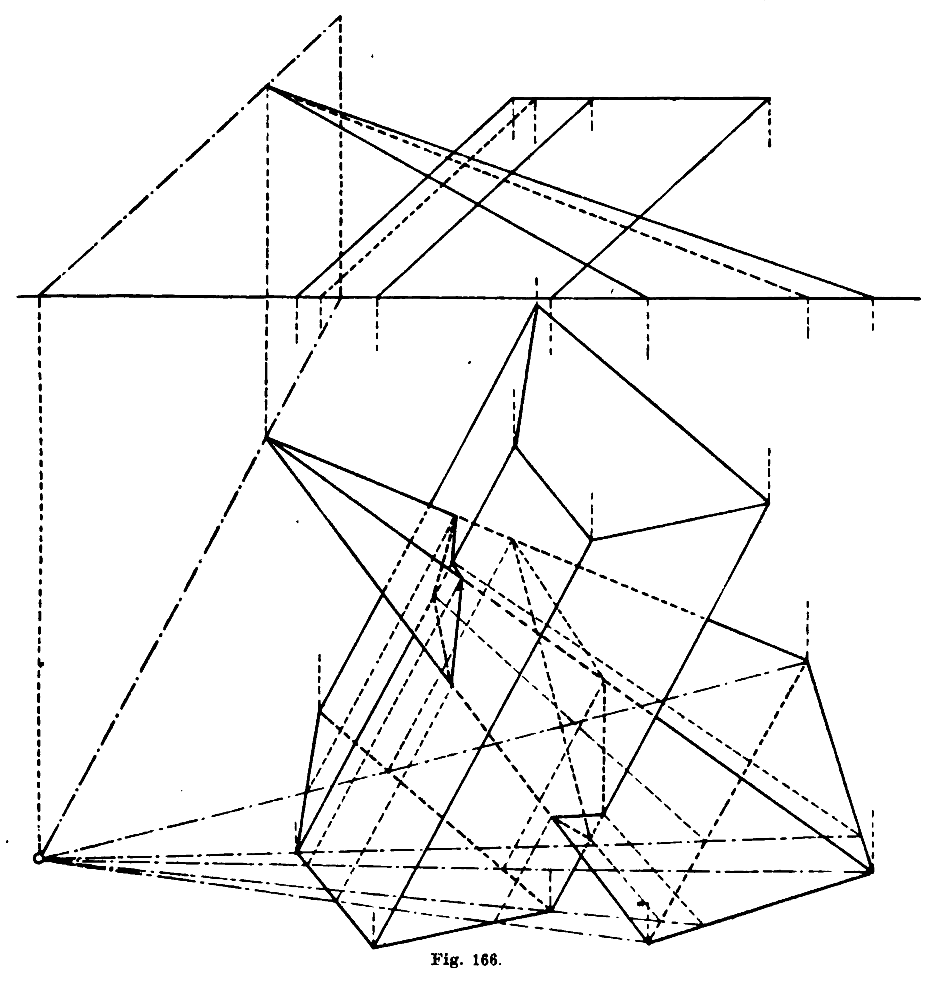


Fig. 166.

Prisma und einer Pyramide Ebenen, die parallel der Seitenkante des Prismas sind und durch die Spitze der Pyramide gehen, und endlich bei zwei Pyramiden Ebenen, die durch beide Spitzen hindurchgehen.

Durch die Horizontalspuren aller dieser Ebenen werden auf den in der Horizontalebene liegenden Grundflächen diejenigen Punkte bestimmt, von denen die Schnittlinien der Hilfsebenen mit den Körpern — entweder

parallel mit den Prismenkanten oder durch die Spitzen der Pyramiden hindurch — ausgehen (Fig. 164). Die Schnittpunkte der Schnittlinien, die je von derselben Hilfsebene auf beiden Körpern erzeugt werden, sind Punkte der Durchdringungsfigur. Natürlich wird man nur die Hilfsebenen legen, welche die Ecken der Durchdringungsfigur liefern; das sind diejenigen

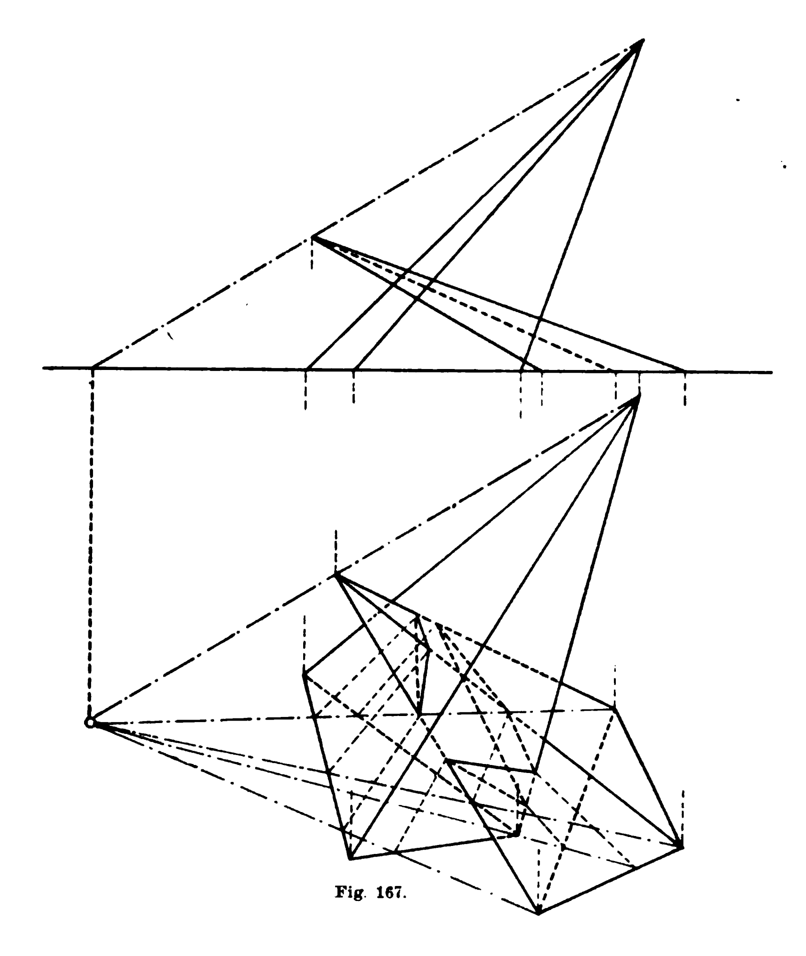


Fig. 167.

Ebenen, die je durch eine Kante eines der beiden Körper hindurchgehen, deren Horizontalspuren also je durch eine Ecke der in der Horizontalebene liegenden Grundflächen hindurchgehen.

Die Horizontalspuren der Hilfsebenen sind unter sich parallel, wenn es sich um *zwei Prismen* handelt (Fig. 165); die Richtung der Spuren wird zweckmäßig in einer Nebenfigur dadurch ermittelt, daß man zwei sich schneidende Geraden zeichnet, von denen die eine parallel den

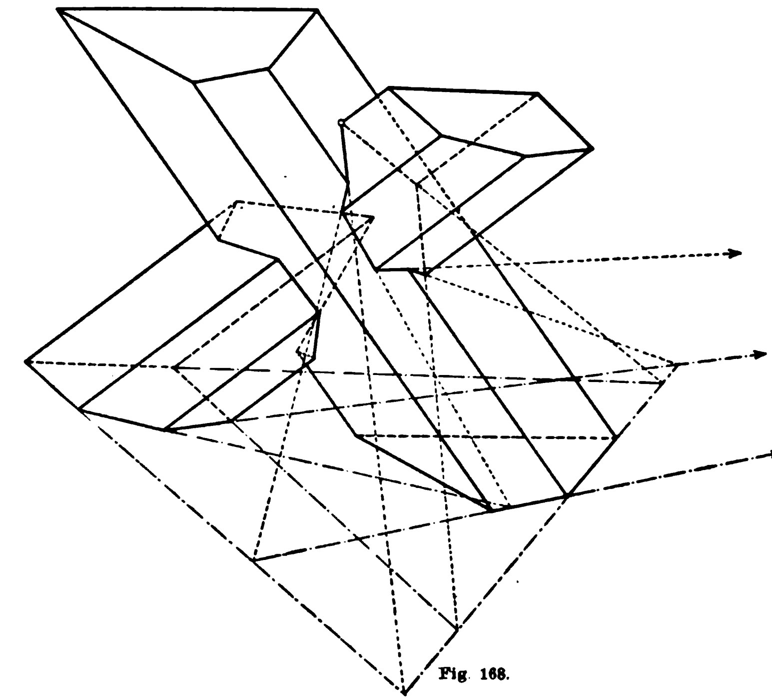


Fig. 168.

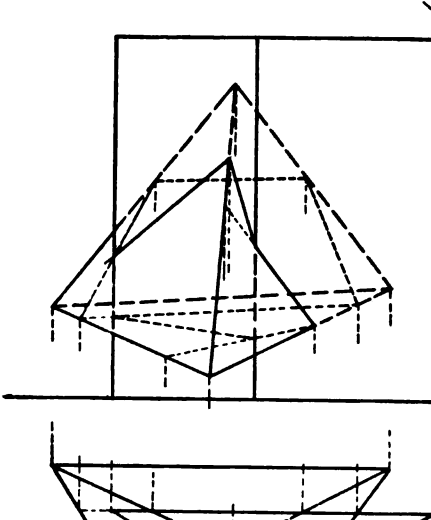


Fig. 169.

Kanten des einen Prismas, die andere parallel denen des andern ist. Die Verbindungslinie der Horizontalspuren dieser Geraden gibt die Richtung der Horizontalspuren der Hilfsebenen an.

Handelt es sich um *ein Prisma und eine Pyramide* (Fig. 166), so legt man durch die Spitze der letzteren eine Gerade parallel den Prismenkanten; durch die Horizontalspur derselben müssen die Horizontalspuren aller Hilfsebenen gehen.

Bei *zwei Pyramiden* endlich (Fig. 167) legt man durch die beiden Spitzen derselben eine Gerade, durch deren Spurpunkt die Spuren der Hilfsebenen gehen müssen.

Hat man alle Eckpunkte der Durchdringungsfigur ermittelt, so geschieht das Verbinden derselben ganz wie im allgemeinen Falle. Dabei ist eine *Entscheidung darüber, ob das Schnittpolygon in zwei Züge zer-*

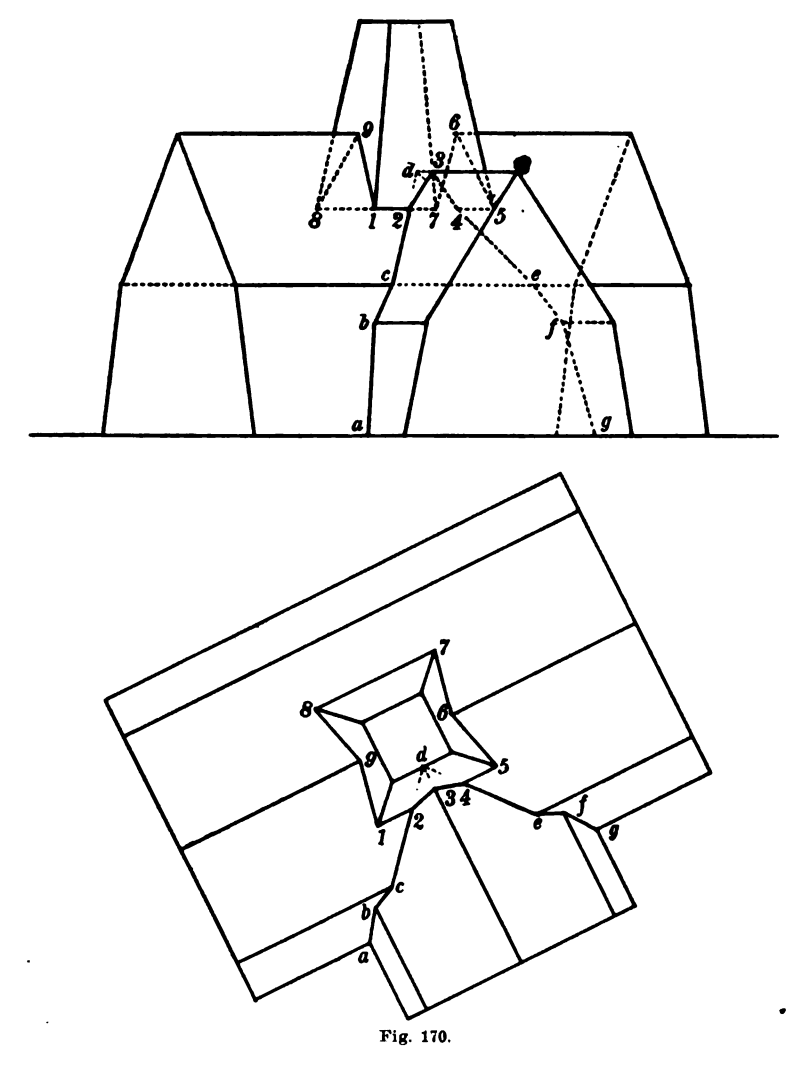


Fig. 170.

fällt, oder ob es aus einem geschlossenen Zuge besteht, von Anfang an leicht möglich, indem man an die beiden Grundflächen je die beiden sie tangierenden Hilfsebenen legt. Liegen diese Grenzlinien des einen Körpers beide zwischen den Grenzlinien des andern, so zerfällt das Schnittpolygon in zwei geschlossene Züge (Fig. 166 u. 167), liegt nur eine

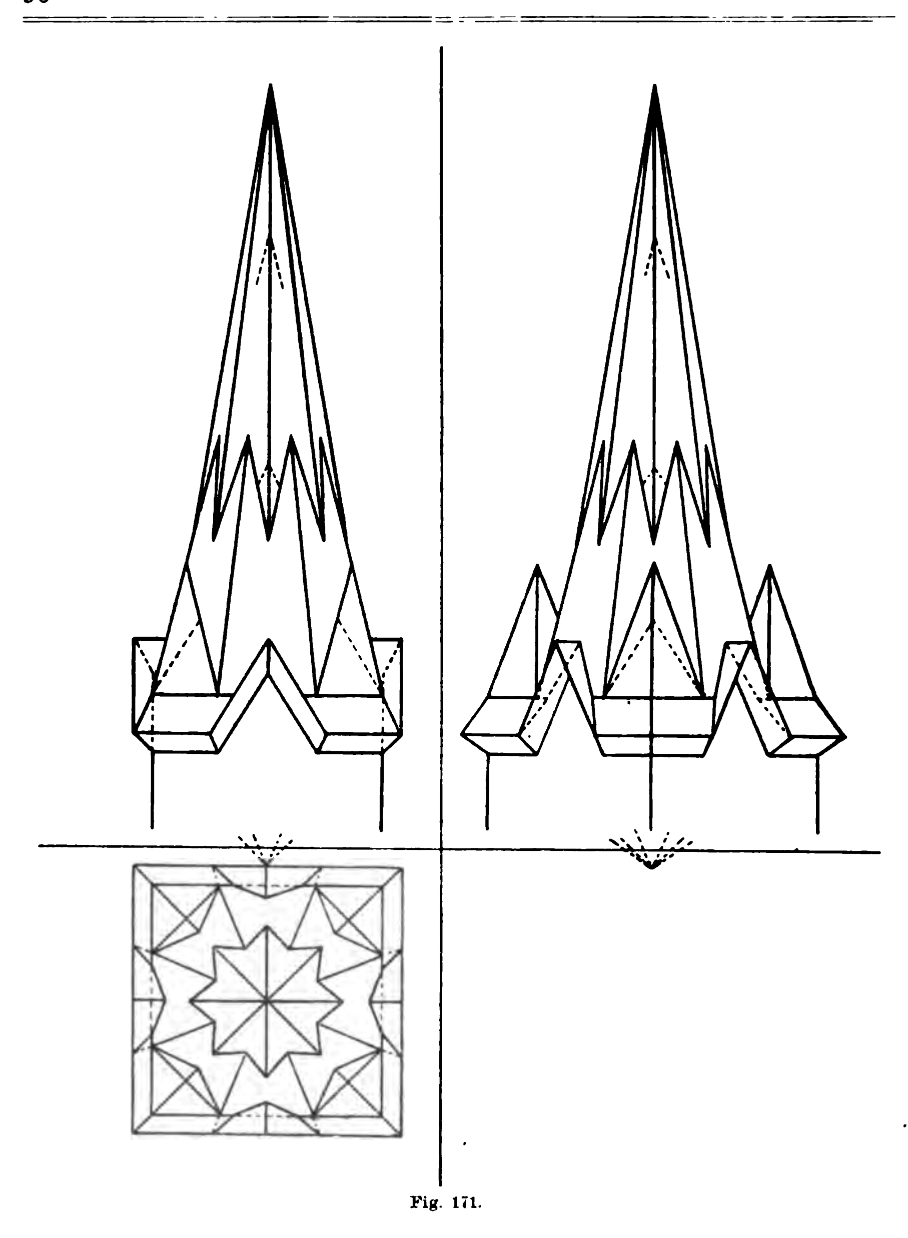


Fig. 171.

Grenzlinie des einen Körpers zwischen den Grenzlinien des andern, so besteht es aus einem geschlossenen Zuge (Fig. 165), und wenn endlich beide Grenzlinien des einen Körpers außerhalb denen des andern liegen, so schneiden sich die Körper überhaupt nicht.

Es sei noch bemerkt, daß, *wenn die beiden Grundflächen sich selbst*

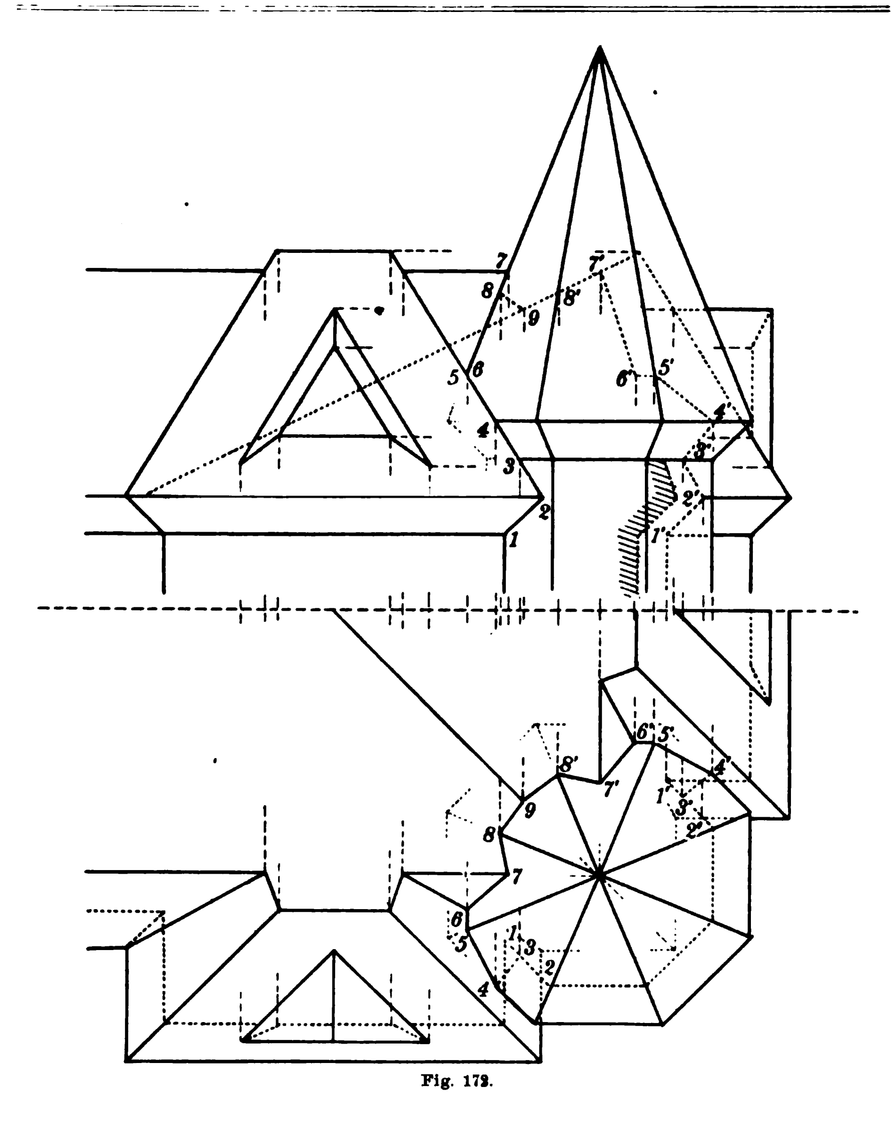


Fig. 172.

schneiden, damit ein Teil der Ecken der Durchdringungsfigur unmittelbar gegeben ist.

Es wurde schon bei ebenen Schnitten darauf hingewiesen, daß *die Schnittlinien und Grundkanten sich auf der Spur der Schnittebene schneiden müssen.* Unter Anwendung dieser Beziehung läßt sich *das ganze Durchdringungspolygon auch direkt ermitteln*, wenn nur eine Ecke desselben bekannt ist (Fig. 168).

Besonders einfach ist die Ermittelung des Schnittes *eines auf der*

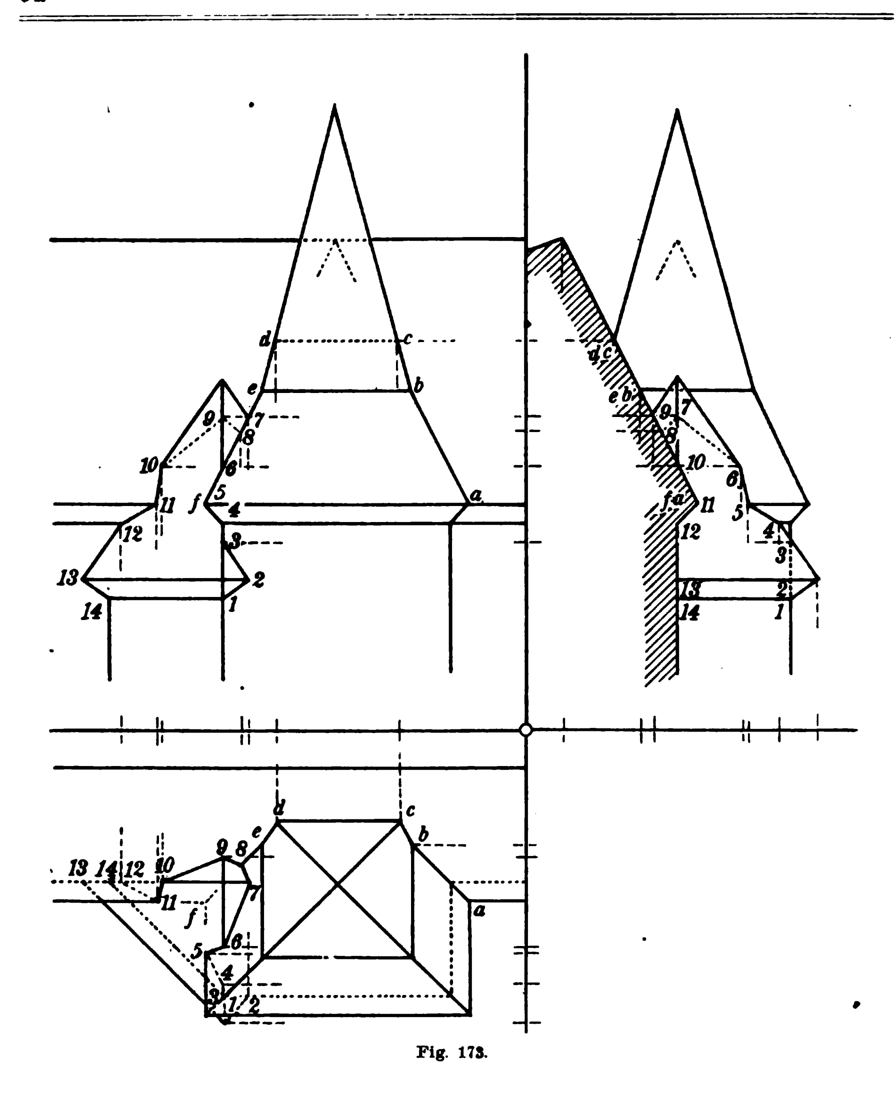


Fig. 173.

Horizontalebene senkrecht stehenden Prismas und eines andern Körpers, z. B. einer Pyramide (Fig. 169), was in der Praxis häufig vorkommt. In diesem Falle hat man die Ecken, die auf den Pyramidenkanten liegen, unmittelbar in der Horizontalprojektion und kann diese sofort durch Hinaufloten in der Vertikalprojektion bestimmen, während man die Ecken, die auf den Prismenkanten liegen, in der Vertikalprojektion dadurch erhält, daß man die Schnittlinie einer Prismenfläche mit einer Pyramidenfläche, die in der Horizontalprojektion unmittelbar vorhanden ist, in die Vertikalebene hinauflotet.

In den Figuren 170—173 sind die mitgeteilten Methoden zur Konstruktion von Durchdringungen auf *Beispiele aus dem Gebiete der Architektur* angewandt.

II. Teil.

Die axonometrische Methode.

VII. Kapitel.

Orthogonale Projektion.

56. Die Projektion eines Körpers in beliebiger Lage zur Projektionsebene. Wir hatten bei der Diskussion eines Polyeders aus Bequemlichkeitsrücksichten dasselbe stets mit einer Fläche in die Horizontalebene gelegt. Wir wollen uns jetzt aus einer solchen speziellen Projektion eine andere herstellen, bei welcher sich *das Polyeder in beliebiger*

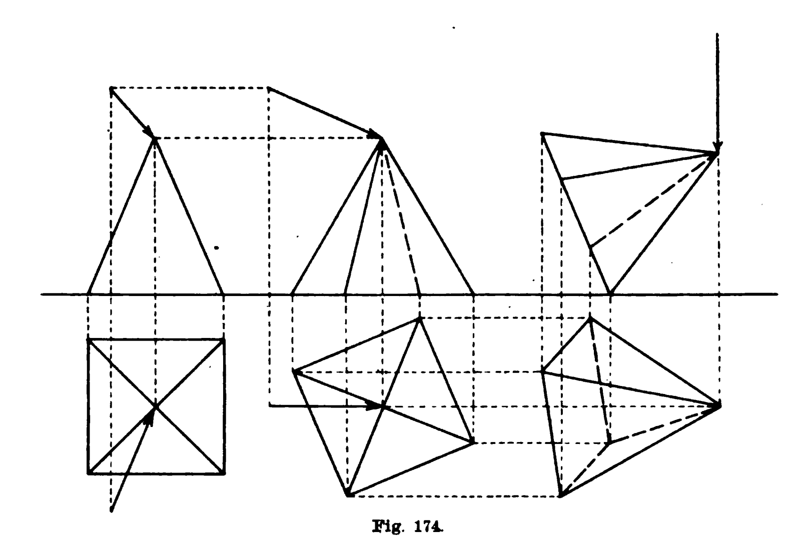


Fig. 174.

Lage zur Projektionsebene befindet. Das kann entweder *durch Drehung des Polyeders oder durch Transformation* geschehen.

Um etwa eine reguläre quadratische Pyramide, die mit ihrer Grundfläche so in der Horizontalebene liegt, daß eine Seite des Quadrates parallel der Projektionsachse ist, in eine beliebige Stellung überzuführen,

wollen wir dieselbe zunächst um eine Gerade *drehen*, die senkrecht auf der Horizontalebene steht (Fig. 174 ohne den Pfeil). Dabei bleibt die Gestalt der Horizontalprojektion erhalten, nur ihre Lage ändert sich. Auch die Höhen bleiben dieselben, können also über dem gedrehten Grundriß direkt vom ersten Aufriß übertragen werden. Alsdann drehen wir den Körper noch um eine Achse senkrecht zur Vertikalebene. Hierbei ändert die eben erhaltene Vertikalprojektion zwar ihre Lage, aber nicht ihre Gestalt, und es bleiben die bei der ersten Drehung erhaltenen Ordinaten unverändert. Trägt man diese unter die zuletzt erhaltene Vertikalprojektion auf, so erhält man in der Horizontalebene eine neue, ganz beliebige Projektion der Pyramide.

57. Projektion eines Körpers in bestimmter Richtung. Wir wollen nun die *Projektionsrichtung* der eben erhaltenen Projektion dadurch andeuten, daß wir in der letzten Vertikalprojektion einen senkrechten Pfeil einzeichnen, dessen Spitze etwa in der Spitze der Pyramide liegen möge, so daß er sich in der Horizontalprojektion als Punkt projiziert (Fig. 174 mit Pfeil). Wir denken diesen Pfeil starr mit der Pyramide verbunden und wollen nun diese samt Pfeil wieder in ihre alte Lage zurückdrehen, so daß wir die Projektionen des Pfeiles in Grund- und Aufriß der Pyramide einzeichnen. Wir können dann auch annehmen, daß dieselben von vornherein zusammen mit dem Grund- und Aufriß der Pyramide gegeben sind, und die Aufgabe stellen, eine Projektion der Pyramide durch Drehen derselben so herzustellen, daß die Projektionsebene senkrecht auf dem Pfeil steht, oder *die Pyramide soll in Richtung des Pfeiles orthogonal projiziert werden.* Die Lösung dieser Aufgabe wurde in umgekehrter Reihenfolge soeben ausgeführt und bietet daher keine Schwierigkeit mehr. Man dreht zunächst die

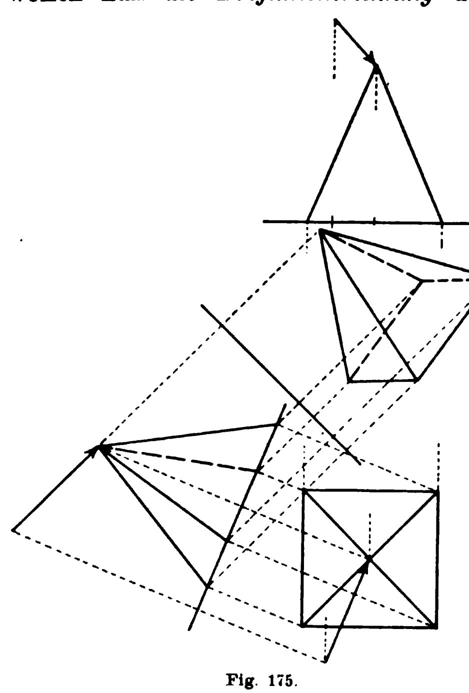


Fig. 175.

Horizontalprojektion der Pyramide bis der Pfeil parallel der Vertikalebene verläuft und überträgt die Höhen. Dann dreht man die neu erhaltene Vertikalprojektion bis der Pfeil senkrecht zur Horizontalebene steht und überträgt die durch die erste Drehung erhaltenen Ordinaten.

Dieselbe Aufgabe ist, wie schon erwähnt, auch mittels *Transformation* dadurch zu lösen, daß man durch zweimalige Transformation wieder erreicht, daß eine bestimmte Gerade — der Pfeil — senkrecht auf der letzten Projektionsebene steht (Fig. 175). Die Ausführung ist bereits früher besprochen und erfordert das Zeichnen von vier Projektionen, während beim Drehen deren sechs gezeichnet werden müssen. Bei der Transformation fällt nämlich das nochmalige Kopieren der gedrehten Projektionen fort. Daher ist diese Methode zwar einfacher, die Methode der Drehung aber anschaulicher.

58. Übersicht über das axonometrische Verfahren. Das in § 56 und 57 angegebene Verfahren kann nun dadurch wesentlich vereinfacht werden, daß man die Operation des zweimaligen Drehens oder des zweimaligen Transformierens *nicht mit sämtlichen Ecken* des Polyeders vornimmt, *sondern nur mit vieren*, und die übrigen Ecken auf andere Weise ermittelt. Wie dieses ausgeführt werden kann, lehrt die *Axonometrie; das Verfahren derselben besteht darin, daß man das ganze Objekt auf ein räumliches rechtwinkliges Koordinatensystem bezieht, zunächst die Projektion von diesem in der verlangten Stellung ermittelt und dann die Ecken des Polyeders mittels ihrer Koordinaten einträgt.*

Denken wir uns etwa ω, ξ, η, ζ (Fig. 176) sei das Bild eines räumlichen rechtwinkligen Koordinatensystems, bei dem alle drei Achsen gleich lang gemacht worden sind, so kann man die Bilder der Eckpunkte eines Polygons durch ihre Koordinaten mit Hilfe des Satzes eintragen, daß zwei parallele Strecken sich parallel und proportioniert projizieren. Der Satz lehrt nämlich, daß alle Koordinaten derselben Richtung sich parallel abbilden und sich im gleichen Verhältnis verkürzen, so daß die wahren Koordinaten eines Punktes x, y, z und ihre Abbilder ξ, η, ζ stets in der Beziehung stehen:

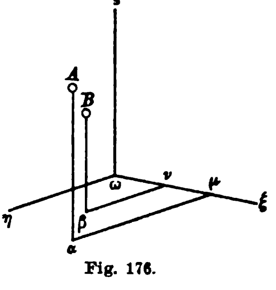


Fig. 176.

$$\xi = q_1 x, \quad \eta = q_2 y, \quad \zeta = q_3 z.$$

q_1, q_2, q_3 heißen die drei *axonometrischen Verkürzungsverhältnisse.* Durch sie und die drei *„scheinbaren Achsenwinkel"* w_{12}, w_{23}, w_{31} ist die Pro-

jektion des Achsenkreuzes oder des *„axonometrischen Dreibeins"* bestimmt. Ist daher die Lage der neuen Projektionsebene zum Objekte gegeben, *so kommt alles darauf an, diese sechs axonometrischen Grundkonstanten zu ermitteln,* weil nach dem oben angeführten Satze dann das Eintragen der Koordinaten keine Schwierigkeit mehr macht. Dabei können wir zweckmäßig annehmen, daß nicht die Lage der neuen Projektionsebene, sondern — wie früher bei der Pyramide — die Richtung der Projektionsstrahlen dadurch gegeben ist, daß die beiden Projektionen eines derselben im Grund- und Aufriß gegeben sind. Diesen Projektionsstrahl können wir auch als die *Sehrichtung* auffassen, *in welcher das Objekt aus unendlicher Ferne angesehen werden soll.*

Bei der Herstellung einer axonometrischen Abbildung sind demnach die in den folgenden vier Paragraphen genauer besprochenen vier Operationen nötig.

59. Aufstellung eines Bauplanes. Dazu gehört, daß man *das abzubildende Objekt in Beziehung zu einem Achsenkreuz setzt und die Richtung der Projektionsstrahlen so festlegt, daß man ein hübsches und zweckmäßiges Bild erhält* (Fig. 177). Bei der Wahl des Dreibeins wird man möglichst die drei Achsen parallel den drei vorhandenen Hauptrichtungen legen. Es ist dabei nicht nötig, daß die Achsen OX und OY in der Horizontalebene liegen; auch ist es häufig zweckmäßig, z. B. bei einem architektonischen Kranzgesimse, die nach unten gehende Richtung der vertikalen Z-Achse zu benutzen. Die verlangte Projektionsrichtung möge durch die Projektionen s und s' eines Projektionsstrahles festgelegt werden. Die Wahl der Horizontalprojektion desselben muß sich danach richten, ob man den Gegenstand mehr von der Seite oder mehr von vorn abbilden will. Ebenso wird man je nach der Annahme der Vertikalprojektion s' desselben mehr oder weniger Aufsicht auf den Körper erhalten. Der Winkel, den s' mit dem Grundschnitt bildet, kann auch negativ gewählt werden; man erhält dann keine Aufsicht mehr, sondern Untersicht, wie sie z. B. bei Deckenkonstruktionen verlangt wird.

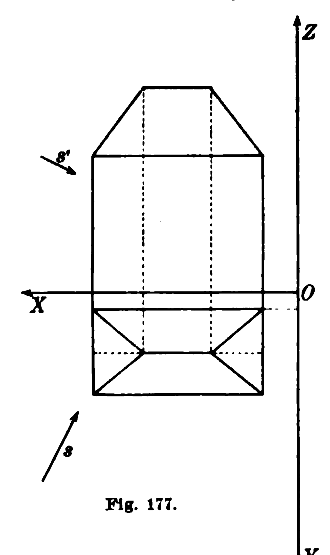


Fig. 177.

60. Errichtung des Baugerüstes. *Die sechs axonometrischen Grundkonstanten* $w_{12}, w_{23}, w_{31}, q_1, q_2, q_3$ für die nunmehr durch s und s' fest-

gelegte Projektionsrichtung können entweder durch Drehen des Dreibeins oder durch Transformation in ähnlicher Weise, wie wir die quadratische Pyramide drehten, bzw. transformierten, ermittelt werden. Am einfachsten verfährt man dabei etwa folgendermaßen (Fig. 178). Es sei das Achsenkreuz so angenommen, daß die X- und die Y-Achse in der Horizontalebene liegen, erstere parallel mit dem Grundschnitt nach links gerichtet, letztere nach vorn. Die Z-Achse weise nach oben. Außer den beiden Projektionen des Achsenkreuzes $oxyz$ und $o'x'y'z'$ sei noch die Richtung gegeben, in welcher das Dreibein von einem unendlich fernen Auge angesehen oder orthogonal projiziert werden soll, durch die Projektionen eines solchen Sehstrahles $s = ao$ und $s' = a'o'$. Dann wählt man zunächst eine neue Vertikalebene parallel dem Sehstrahl und überträgt auf diese die Höhen der einzelnen Punkte, so daß sich das Dreibein in $o''x''y''z''$ und der Sehstrahl in $a''o''$ projiziert. Senkrecht zu diesem wird nun eine letzte Projektionsebene eingeführt und auf diese die durch die erste Transformation erhaltenen Ordinaten übertragen, so daß sich $\omega\xi\eta\zeta$ als Projektion des Dreibeins in der verlangten Richtung ergibt. Natürlich

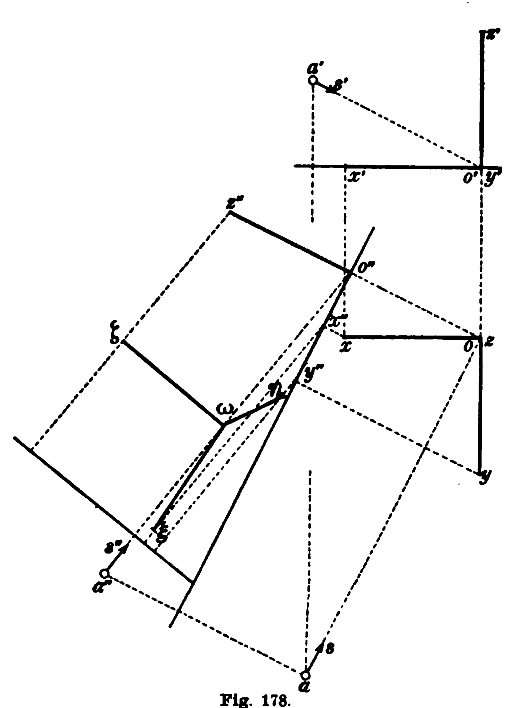


Fig. 178.

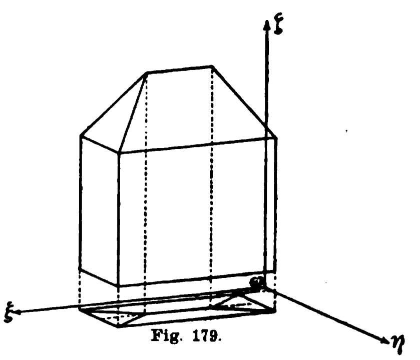


Fig. 179.

wird man diese Konstruktion in einer Nebenfigur in verkleinertem Maßstabe ausführen. Doch soll derselbe nicht so klein sein, daß die Genauigkeit darunter leiden könnte, denn von der Genauigkeit des Baugerüstes hängt die Genauigkeit des ganzen Baues ab. Hat man so das Bild des Achsenkreuzes $\omega\xi\eta\zeta$ ermittelt, so trägt man es in dem ver-

langten Maßstabe auf und zwar $\omega\zeta$ vertikal, weil das Bild an Anschaulichkeit gewinnt, wenn die ursprünglichen Höhen wieder vertikal erscheinen (Fig. 179).

61. Das Zuhauen der Bausteine. Ehe man die Koordinaten der einzelnen Punkte aufträgt, wird man gut tun, *ihre scheinbaren Längen alle fabrikmäßig zu ermitteln,* d. h. ihre wahren Längen so zu reduzieren, daß stets $\xi = q_1 x$, $\eta = q_2 y$ und $\zeta = q_3 z$ wird. Sind die wahren Längen der Koordinaten in Grund- und Aufriß gegeben, so bedient man sich am zweckmäßigsten eines *Diagrammaßstabes* (Fig. 180): bezeichnet l die wahre Länge der drei Achsen und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die scheinbaren Längen der X-, Y-, Z-Achse, so ziehe man in den Abständen λ_1, λ_2, λ_3 und l von einem Punkte c vier Parallelen und bezeichne diese mit ξ, η, ζ, $x-y-z$, so daß $c\omega_1 = \lambda_1$, $c\omega_2 = \lambda_2$, $c\omega_3 = \lambda_3$ und $co = l$ wird. Schneidet man dann auf der $x-y-z$-Linie die wahre Länge irgendeiner Koordinate ab und zieht durch ihre Endpunkte Geraden nach c, so schneiden diese auf einer der drei anderen Parallelen jedesmal die gesuchte scheinbare Länge

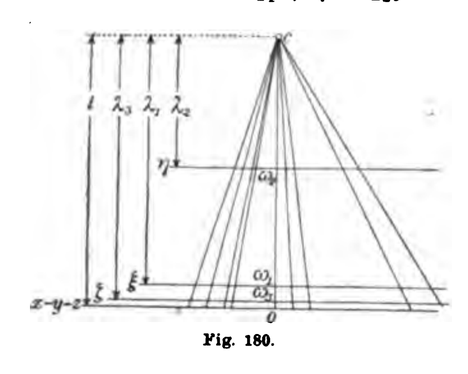


Fig. 180.

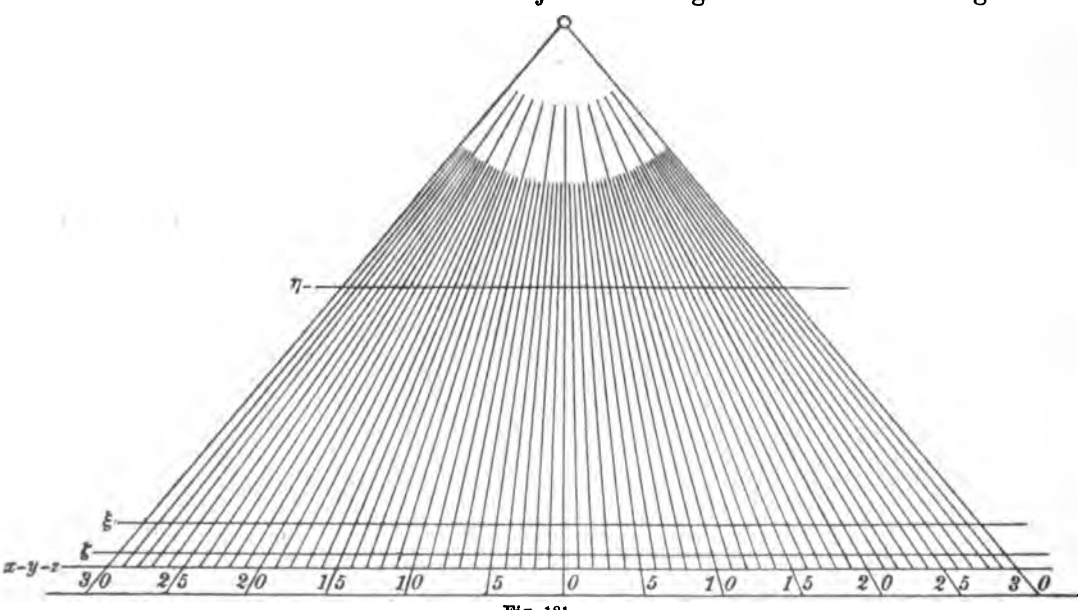


Fig. 181.

heraus, und zwar auf der ξ-Linie, wenn die betreffende Koordinate parallel der X-Achse ist, auf der η-Linie, wenn sie parallel der Y-Achse und auf der ζ-Linie, wenn sie parallel der Z-Achse ist.

Sind die wahren Längen in Zahlen gegeben, etwa dadurch, daß die Maßzahlen aller Koordinaten in einer Skizze eingezeichnet sind, so legt man von vornherein ein *Maßstabnetz* an, indem man durch c ein Strahlenbüschel zieht, das auf der $x—y—z$-Linie eine Maßskala, z. B. immer 2 mm, herausschneidet (Fig. 181). Man kann dann die scheinbaren Längen jedesmal direkt mit dem Zirkel abgreifen. Maße, die im Netz nicht selbst enthalten sind, werden abgeschätzt.

62. Zusammenfügen der Bausteine zum Bau. Nunmehr werden die reduzierten Koordinaten in das scheinbare Dreibein eingetragen.

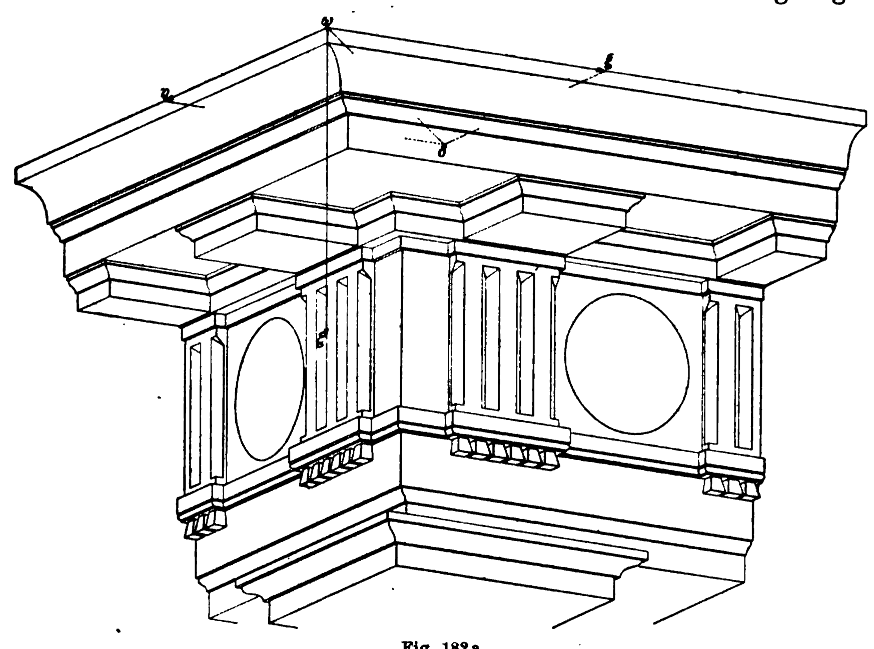


Fig. 182 a.

Dabei entsteht in der X-Y-Ebene ein axonometrischer Grundriß, der von dem Bild selbst überdeckt wird.

Um diesem Übelstande abzuhelfen, ist es zweckmäßig, von vornherein zu jeder Höhe noch ein konstantes Stück zu addieren, so daß das ganze Objekt um dieses Stück in die Höhe gerückt erscheint, gewissermaßen auf Stelzen steht. Handelt es sich um ein Gebäude, so kann man das hinzugefügte Stück auch als untergeschobenen Keller ansehen; daher

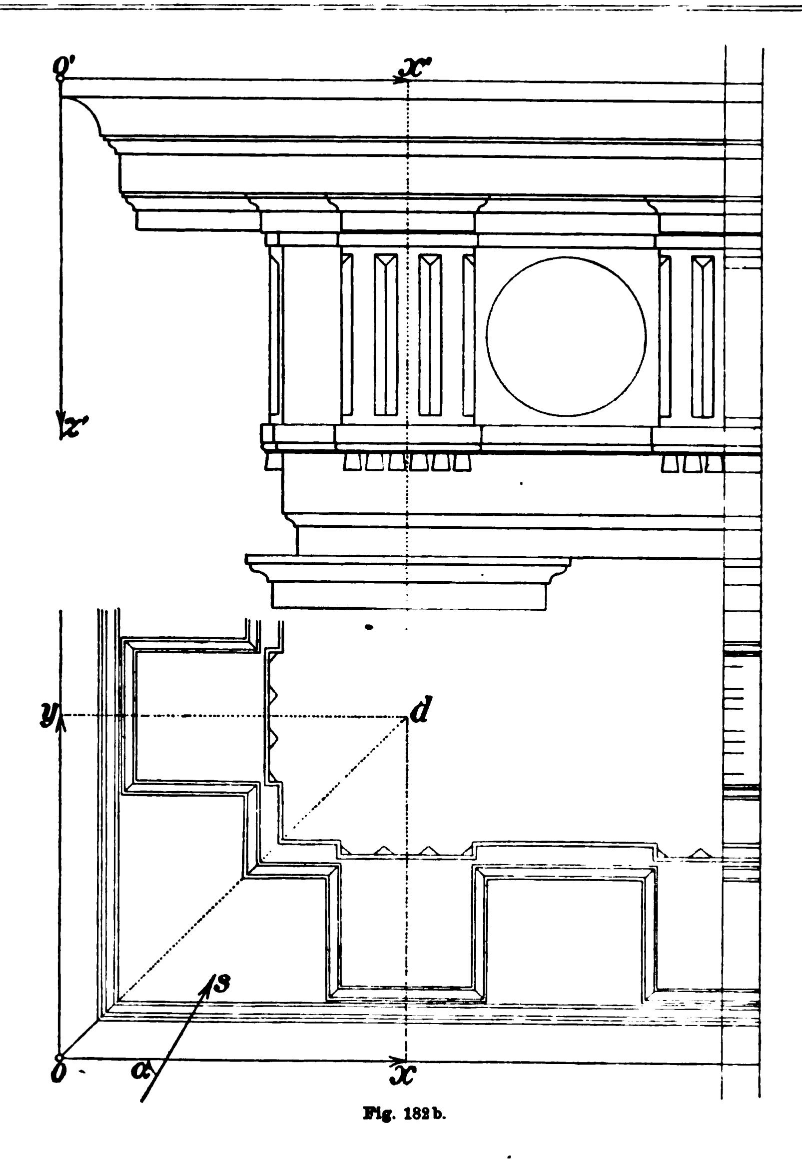


Fig. 182 b.

nennt man den in der X-Y-Ebene liegenden Grundriß auch *Kellergrundriß* (Fig. 179). Von dem eigentlichen Grundriß werden dann nur die sichtbaren Linien gezeichnet. Obwohl man die scheinbaren Koordinaten fabrikmäßig eintragen wird, wobei eine Stellschiene gute Dienste leistet, so darf man dabei doch nicht ganz pedantisch verfahren, man wird vielmehr *zunächst nur die Hauptpunkte* des Bildes festlegen, das Gerippe aufbauen, und erst *nachträglich die kleineren Details* hinzu-

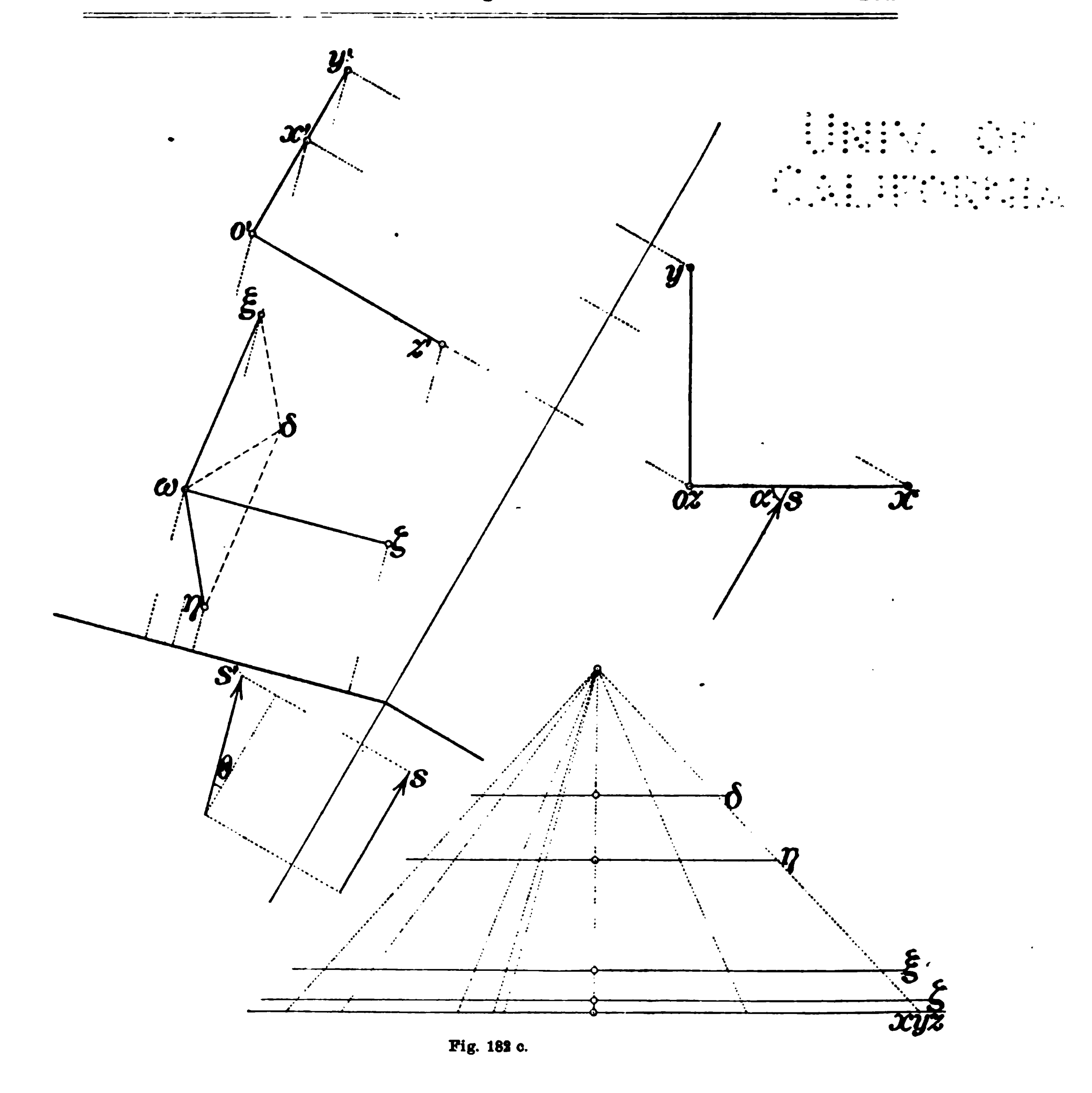


Fig. 182 c.

fügen, die sich dann häufig direkt einzeichnen lassen. Zu beachten ist, daß auch zwei Strecken, die nicht parallel einer Achse sind, aber unter sich parallel verlaufen, sich parallel und proportioniert abbilden. Überhaupt suche man alle Erleichterungen, die die spezielle Natur des Objektes bietet, auch auszunutzen.

In Fig. 182 ist eine kompliziertere axonometrische Perspektive — ein dorisches Kapitell — durchgeführt.

63. Würdigung der axonometrischen Methode. Die Axonometrie hat früher eine ziemliche Überschätzung erfahren, die darin ihren Grund hatte, daß man glaubte, in ihr eine Methode gefunden zu haben, die gleichzeitig ein plastisches Bild liefert und es ermöglicht, die wahren Längen leicht zu ermitteln. Die Grund- und Aufrißmethode, wie sie von Monge ausgebildet war, liefert zwar die wahren Dimensionen direkt, aber kein plastisches Bild, während umgekehrt eine beliebige Projektion eines Gegenstandes zwar ein anschauliches Bild desselben bietet, dabei aber die wahren Längen verloren gehen läßt. Bis zu einem gewissen Grade werden nun in der Tat beide Vorzüge durch die Axonometrie vereinigt. Zwar sind die wahren Längen nicht direkt in dem axonometrischen Bilde enthalten, doch können sie von denjenigen Strecken, die parallel den drei Achsen, also parallel den drei Hauptrichtungen sind, sofort abgegriffen werden, sobald das Bild des Koordinatensystems und des axonometrischen Grundrisses, sowie die Reduktionsmaßstäbe gezeichnet vorliegen. Auch *für eine schiefe Strecke AB* ist *die Ermittelung ihrer wahren Länge* nicht allzu umständlich (Fig. 183). Man hat ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen, dessen Katheten gleich dem Abszissenunterschiede $x_a - x_b$ der Punkte A und B und dem Ordinatenunterschiede $y_a - y_b$ derselben sind. Die Hypotenuse des Dreiecks liefert die wahre Länge der Horizontalprojektion der Strecke. Benutzt man diese als Kathete eines zweiten rechtwinkligen Dreiecks, dessen andere Kathete der Höhenunterschied $z_a - z_b$ ist, so ist seine Hypotenuse gleich der gesuchten wahren Streckenlänge l.

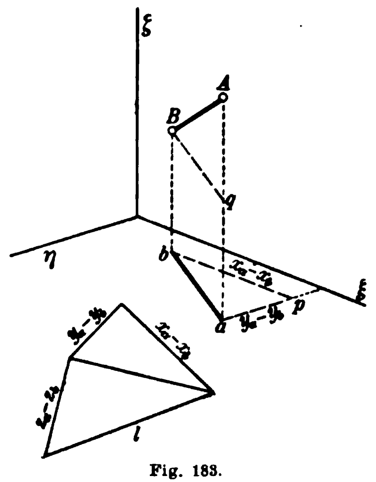


Fig. 183.

Als Weisbach im Jahre 1857 die axonometrische Methode ausbildete, glaubte man sogar einen vollständigen Ersatz für die Mongesche Grund- und Aufriß-Methode gewonnen zu haben. An Stelle des eigentlichen Grundrisses wurde der axonometrische gesetzt, und an Stelle des durch Auftragen der Höhen erhaltenen Mongeschen Aufrisses trat der ebenfalls durch Auftragen der Höhen erhaltene „axonometrische Aufriß“, d. h. das Bild.

Indessen haben sich die Hoffnungen, die die Axonometrie anfänglich erweckte, doch nicht erfüllt, denn schon die einfachsten metrischen Beziehungen, z. B. die senkrechte Lage einer Geraden zu einer Ebene

können nur sehr viel umständlicher dargestellt werden als durch die Grund- und Aufrißmethode. Man hat sich überzeugt, daß die letztere Methode schlechterdings nicht entbehrt werden kann. Dazu kommt noch, daß sich die Lehrmethode der Mongeschen darstellenden Geometrie, die damals in Deutschland nur wenig bekannt war, seither sehr viel verbessert hat und selbst in Handwerkerkreise eingedrungen ist.

64. Weitere Vereinfachungen. Über die weitere Ausbildung, die Weisbach der axonometrischen Methode gegeben hat, wollen wir noch einiges, wenn auch ohne Beweis, hinzufügen, da diese Dinge bei einigen Lehrern sich immer noch einer gewissen Beliebtheit erfreuen, *wenngleich sie als definitiv veraltet zu bezeichnen sind.*

In den meisten Fällen wird nicht eine Ansicht in ganz bestimmter Richtung verlangt, sondern es genügt, überhaupt ein gefälliges Bild herzustellen, so daß *die sechs Grundkonstanten* $q_1, q_2, q_3, w_{12}, w_{23}, w_{31}$ *bis zu einem gewissen Grade willkürlich* angenommen werden können. Es läßt sich nun zeigen, daß *durch zwei derselben die vier anderen bestimmt* sind. Am besten wählt man zwei der q-Größen willkürlich und ermittelt hieraus die vier anderen. Statt zweier q-Größen kann man auch die Verhältnisse von $q_1 : q_2 : q_3$ beliebig wählen, so daß also:

$$q_1 = \lambda \pi_1, \; q_2 = \lambda \pi_2 \text{ und } q_3 = \lambda \pi_3$$

ist. Ist beispielsweise $q_1 : q_2 : q_3 = 9 : 5 : 10$ oder $= \frac{9}{10} : \frac{1}{2} : 1$, so heißt das, der Reduktionsmaßstab für die Y-Richtung ist halb so groß wie der für die Z-Richtung, und der für die X-Richtung $\frac{9}{10}$ so groß. Da die Zeichnung im allgemeinen in verkleinertem Maßstabe ausgeführt wird, wird man also für die Originalmaßstäbe das Verjüngungsverhältnis zunächst willkürlich wählen, dieses im Verhältnis q_3 reduzieren, um so den ζ-Maßstab zu erhalten, und endlich hiervon $\frac{1}{2}$ als η-, und $\frac{9}{10}$ als ξ-Maßstab wählen. Statt dessen kann man auch direkt den ζ-Maßstab beliebig annehmen und hiervon $\frac{9}{10}$ und $\frac{1}{2}$ für die beiden anderen Maßstäbe nehmen. Im Interesse der Einfachheit wird man für die drei π-Größen ganze Zahlen annehmen, die übrigens insofern einer gewissen *Beschränkung* unterliegen, als $\pi_i^2 + \pi_k^2 > \pi_l^2$ sein muß. Weil man gewöhnt ist, die Gegenstände aufrecht stehend zu sehen, so wird man die Höhendimensionen am wenigsten verkürzen, also von den drei gewählten Zahlen die größte als π_3 annehmen; π_2 dagegen wird man am kleinsten wählen, weil die Tiefendimensionen zweckmäßig stärker verkürzt erscheinen als die Breiten. Hat man über π_1, π_2 und π_3 verfügt, so

lassen sich die zugehörigen drei scheinbaren Achsenwinkel berechnen mit Hilfe der Formel:

$$\cos w_{12} = -\frac{1}{2\pi_1\pi_2}\sqrt{(-\pi_1^2 + \pi_2^2 + \pi_3^2)\cdot(\pi_1^2 - \pi_2^2 + \pi_3^2)},$$

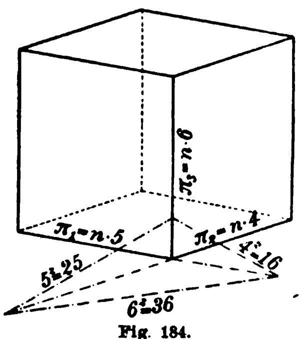


Fig. 184.

aus der sich die entsprechenden Formeln für w_{23} und w_{31} durch zyklische Vertauschung der Indizes ergeben.

Auch *konstruktiv lassen sich* w_{12}, w_{23} *und* w_{31} *ermitteln.* Zeichnet man nämlich ein Dreieck, dessen Seiten π_1^2, π_2^2 und π_3^2 sind, so bilden die drei Winkelhalbierungslinien desselben miteinander die drei gesuchten Winkel w (Fig. 184).

65. Die einfachsten axonometrischen Systeme. Eine weitere Vereinfachung kann noch dadurch erzielt werden, daß man zwei der

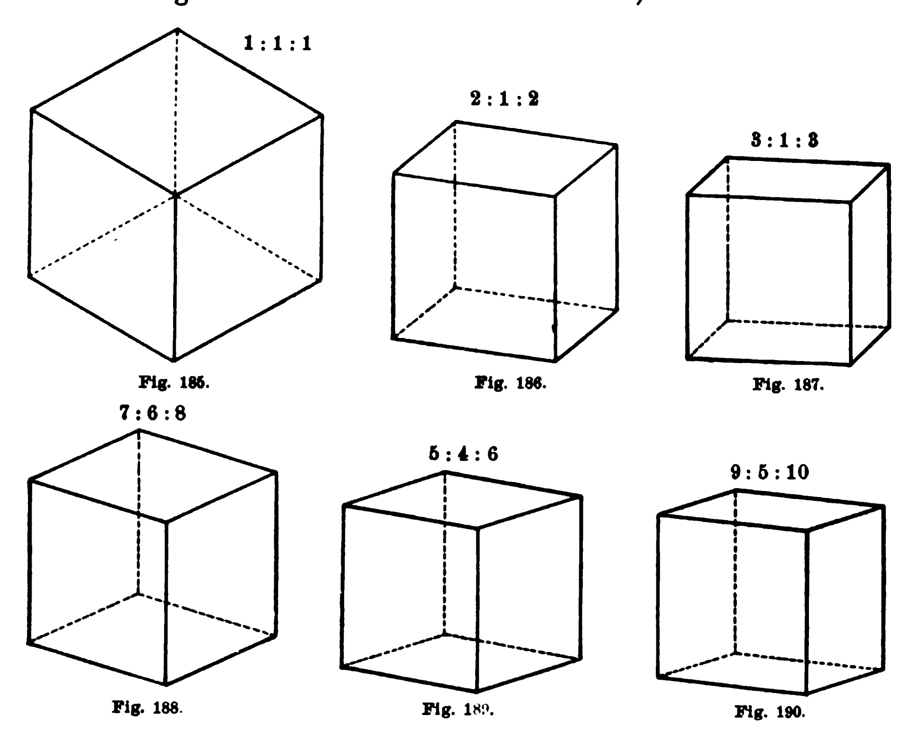


Fig. 185. Fig. 186. Fig. 187.
Fig. 188. Fig. 189. Fig. 190.

π-Größen gleich oder sogar alle drei gleich wählt. Die dadurch entstehenden Systeme bezeichnet man als *isometrisches, dimetrisches und trimetrisches.*

Innerhalb der beiden letzten sind noch verschiedene Einzelsysteme möglich. Die nachfolgende Tabelle stellt die einfachsten derselben zusammen.

Systeme:	$\pi_1 : \pi_2 : \pi_3$	$\frac{\pi_1}{\pi_3} : \frac{\pi_2}{\pi_3} : 1$	w_{12}	w_{23}	w_{31}	Figur
Isometrisch	1 : 1 : 1	1 : 1 : 1	120°	120°	120°	185
Dimetrisch	2 : 1 : 2	$1 : \frac{1}{2} : 1$	131°25′	131°25′	97°11′	186
	3 : 1 : 3	$1 : \frac{1}{3} : 1$	133°24,5′	133°24,5′	93°11′	187
Trimetrisch	7 : 6 : 8	$\frac{7}{8} : \frac{3}{4} : 1$	138°15′	114°46′	106°59′	188
	5 : 4 : 6	$\frac{5}{6} : \frac{2}{3} : 1$	150°37′	108°13′	101°10′	189
	9 : 5 : 10	$\frac{9}{10} : \frac{1}{2} : 1$	157°0′	107°49′	95°11′	190

Um eine bequeme Vorstellung davon zu haben, wie sie wirken, ist die Abbildung eines Würfels in den aufgeführten Systemen beigefügt (Fig. 185—190). Der Grund, weshalb unter den trimetrischen Systemen die Zahlen 1, 2, 3; 2, 3, 4; 3, 4, 5 fehlen, liegt darin, daß dieselben der Bedingung $\pi_i^2 + \pi_k^2 > \pi_l^2$ widersprechen.

Bei der Auswahl eines Systems für eine bestimmte Aufgabe sind drei Rücksichten maßgebend. Einmal die Einfachheit der Konstruktion, dann die Gefälligkeit des Bildes, das man erhält, und endlich die Deutlichkeit desselben, die etwa dadurch leiden würde, daß sich eine Gerade als Punkt oder eine Ebene als Gerade projiziert, wie es beispielsweise bei einer Diagonale und drei Diagonal-Ebenen im isometrischen System der Fall ist.

VIII. Kapitel.

Schiefe Projektion.

66. Schiefe Parallelprojektion und malerische Parallelperspektive. Wir haben bisher ausschließlich orthogonale Parallelprojektion benutzt. Die axonometrische Methode ist indessen nicht nur auf diese beschränkt, sondern wird mit Vorteil auch bei *schiefer Parallelprojektion* angewendet. Denn auch für diese bleibt der Hauptsatz, der zur Herstellung von Bildern in unsymmetrischer Stellung benutzt wurde, gültig: die Projektionen von parallelen Strecken sind parallel und proportioniert. Jedoch ist die Projektion einer Strecke nicht notwendig kleiner

als ihre wahre Größe, wie bei orthogonaler Projektion, sondern sie kann auch größer sein; und zwar ist dieses stets dann der Fall, wenn die projizierenden Strahlen mit der Projektionsebene einen kleineren Winkel bilden als mit der Strecke selbst (Fig. 191).

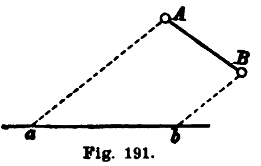
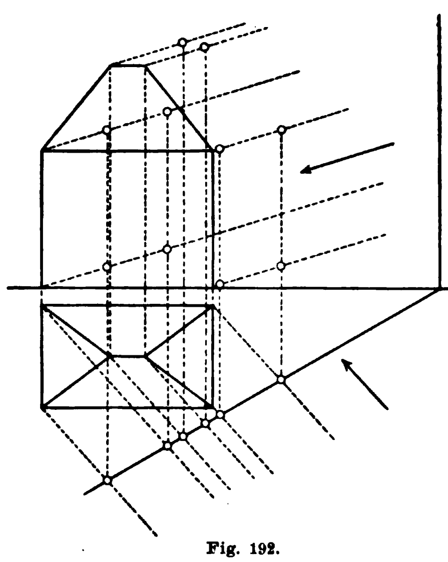
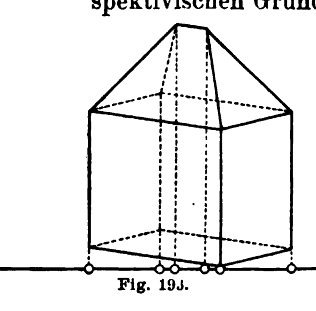


Fig. 191.

Um von einem beliebigen Körper, etwa einem Hause, *ein Bild durch schiefe Parallelprojektion* zu erhalten, wollen wir die Ebene, auf die wir projizieren, die Bildebene, vertikal annehmen. Unter dieser Voraussetzung nennt man das Verfahren der schiefen Parallelprojektion auch *malerische Parallelperspektive*. Die Bildebene sei durch ihre Spuren gegeben. Um die einzelnen Bildpunkte zu erhalten, bestimmen wir die Schnittpunkte der Projektionsstrahlen mit der Bildebene, indem wir die Horizontalprojektionen derselben zum Schnitt mit der Horizontalspur der Ebene bringen und von diesen Punkten senkrecht hoch gehen bis zum Schnitt mit den zugehörigen Vertikalprojektionen der Projektionsstrahlen (Fig. 192). Das Bild selbst wird dann nebenaus gezeichnet, indem man die Punktfolge der Horizontalspur auf eine horizontale Gerade überträgt und über den einzelnen Punkten die ermittelten Höhen der Bildpunkte aufträgt (Fig. 193). Dieses Verfahren heißt das *Durchschnittsverfahren*.

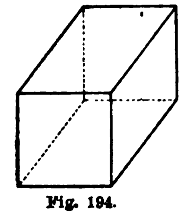

Fig. 192.

Da die Bildebene vertikal steht, so bilden sich *alle Vertikalen in wahrer Größe* ab. Man braucht daher *nur den Grundriß in Perspektive zu setzen* und in den Punkten des perspektivischen Grundrisses die Höhen in wahrer Größe aufzutragen. Damit sind wir aber wieder auf das axonometrische Verfahren zurückgekommen und können sogar noch einen Schritt weiter gehen, wenn wir auch *den perspektivischen Grundriß axonometrisch* herstellen, also obige Konstruktion nur mit dem Achsenkreuze ausführen, dadurch die sechs Grundkonstanten bestimmen und alles übrige axonometrisch ermitteln. Da $\omega\zeta$ vertikal steht und $q_3 = 1$ ist, so ist


Fig. 193.

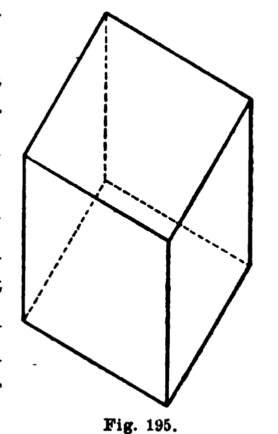
die Konstruktion nicht einmal mit dem ganzen Dreibein, sondern nur mit oxy auszuführen.

Wie bei schiefer Parallelperspektive die Projektion einer Strecke auch größer als sie selbst sein kann, so können q_1 und q_2 auch > 1 gewählt werden. Jedoch erhält man dann *verzerrte Bilder*, eben weil es bei dieser Annahme vorkommen wird, daß die Projektionen einiger Strecken größer als diese selbst ausfallen. Der unschöne Eindruck eines solchen „Zerrbildes" — Fig. 194 zeigt z. B. einen Würfel — rührt daher, daß das Bild nicht in der Richtung der Projektionsstrahlen betrachtet wird. Nur dann wird dasselbe richtig wirken, wenn man es in der genannten Richtung betrachtet. Man sieht aber ein Bild im allgemeinen, wenn nichts anderes, etwa durch Anbringen eines Guckloches, veranlaßt wird, von vorn, d. h. nicht in Übereinstimmung mit der Projektionsrichtung, an.


Fig. 194.

67. Militärperspektive. Ein wichtiger Spezialfall der malerischen Parallelperspektive ist die *Militärperspektive*, die man erhält, wenn der Winkel, den die Projektionsrichtung mit der vertikalen Bildebene bildet, 45^0 beträgt, und die Horizontalprojektion der Projektionsrichtung senkrecht auf der Bildebene steht. Es ist dann $w_{12} = 90^0$ und $q_1 = q_2 = 1$, so daß *der perspektivische Grundriß kongruent dem wahren Grundriß* wird.

Die Herstellung eines militärperspektivischen Bildes ist also außerordentlich einfach: man hat nur den Grundriß in wahrer Gestalt aufzutragen und in den einzelnen Punkten desselben die wahren Höhen zu errichten. Die Vorteile, die ein Grundriß in wahrer Gestalt und ein plastisches Bild bietet, sind also hierbei vereinigt. Daher findet diese Methode eine zweckmäßige Anwendung bei Festungs-, Städte- und Situationsplänen. Freilich ist das Bild nicht sehr natürlich; das rührt aber wieder nur daher, daß dasselbe von vorne betrachtet wird. Sieht man es von oben unter einem Winkel von 45^0 an, so macht es sofort einen natürlichen Eindruck. In Fig. 195 ist ein Würfel zur Übersicht, in Fig. 196 und 197 ein etwas komplizierteres Gebäude dargestellt.


Fig. 195.

68. Kavalierperspektive. Wichtiger noch als die Militärperspektive ist ein anderer Spezialfall der malerischen Parallelperspektive,

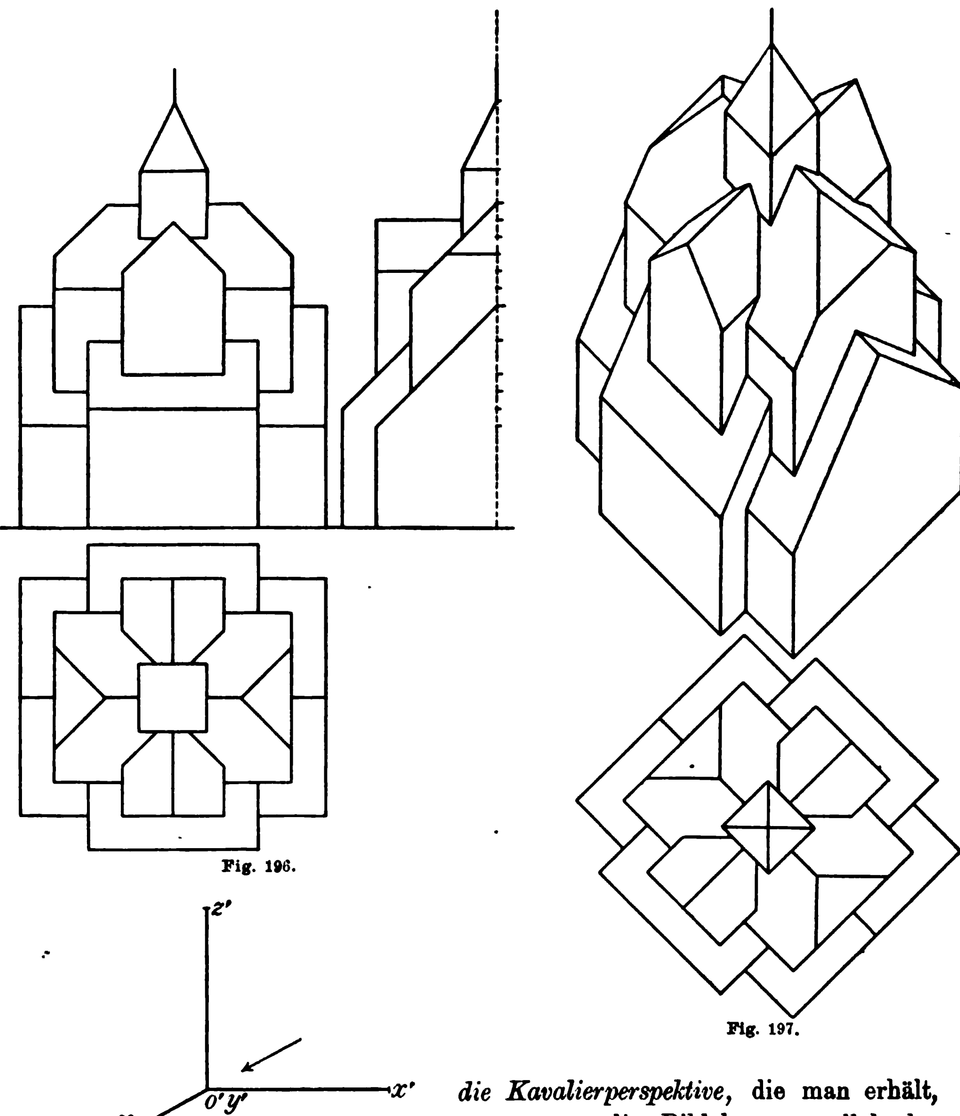


Fig. 196.

Fig. 197.

Fig. 198.

die Kavalierperspektive, die man erhält, wenn man die Bildebene parallel der X-Z-Ebene annimmt, so daß $q_1 = q_3 = 1$ und $w_{31} = 90^0$ wird. Ist die Projektionsrichtung gegeben, so wird das Dreibein nach der allgemeinen Konstruktion hergestellt, die sich besonders bequem gestaltet, wenn man die Bildebene mit der Vertikalebene zusammenfallen läßt und

auch die X-Z-Ebene in diese hineinfällt (Fig. 198). Die Ermittelung von q_2 und von w_{12}, um die es sich ja nur noch handelt, ergibt sich dann unmittelbar.

Umgekehrt kann auch q_2 und w_{12} ganz willkürlich gewählt werden;

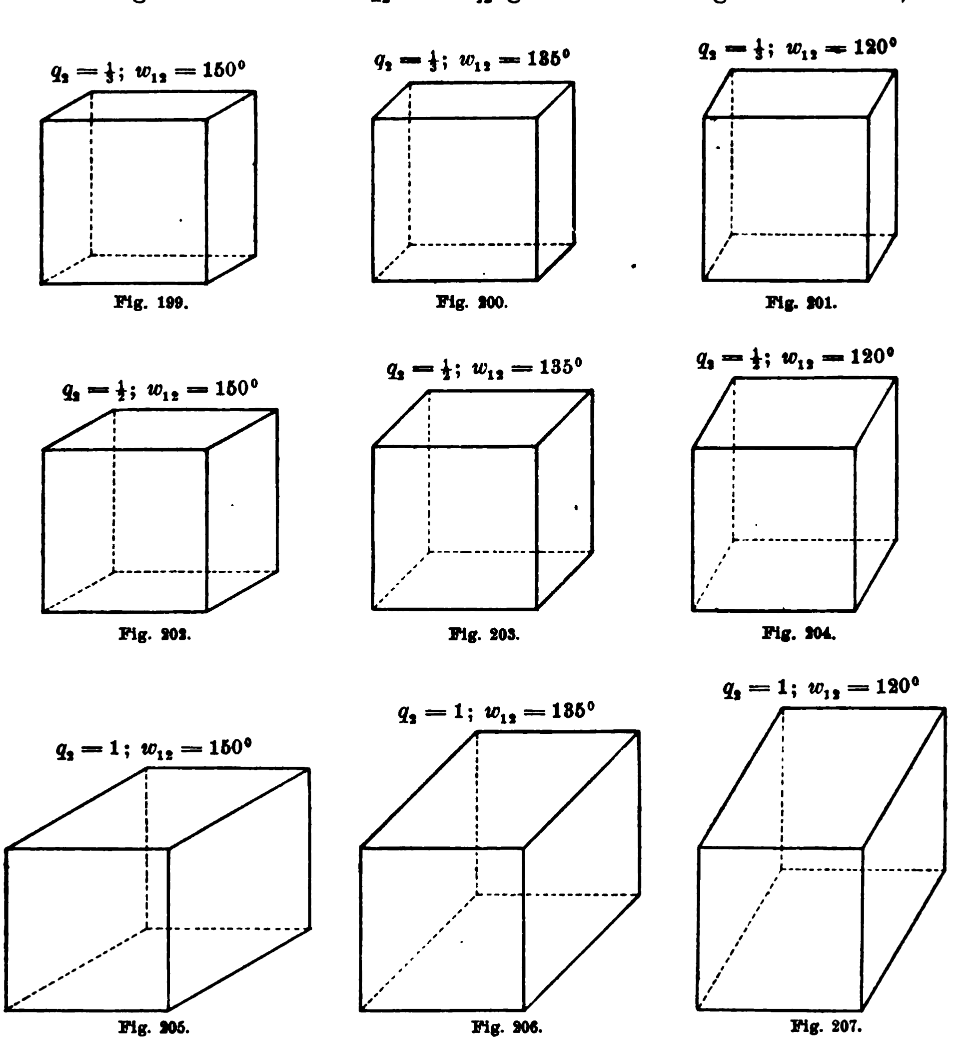


Fig. 199. Fig. 200. Fig. 201.

Fig. 202. Fig. 203. Fig. 204.

Fig. 205. Fig. 206. Fig. 207.

stets existiert eine zugehörige Projektionsrichtung. Erwähnt sei die Annahme $q_2 = 1$, bei welcher die Projektionsstrahlen mit der Projektionsebene einen Winkel von 45^0 bilden. Dieser *Spezialfall der Kavalierperspektive* findet häufig bei Werkzeichnungen, Holz- und Steinverbänden Anwendung. Er bietet gewissermaßen ein Analogon zur Militärperspek-

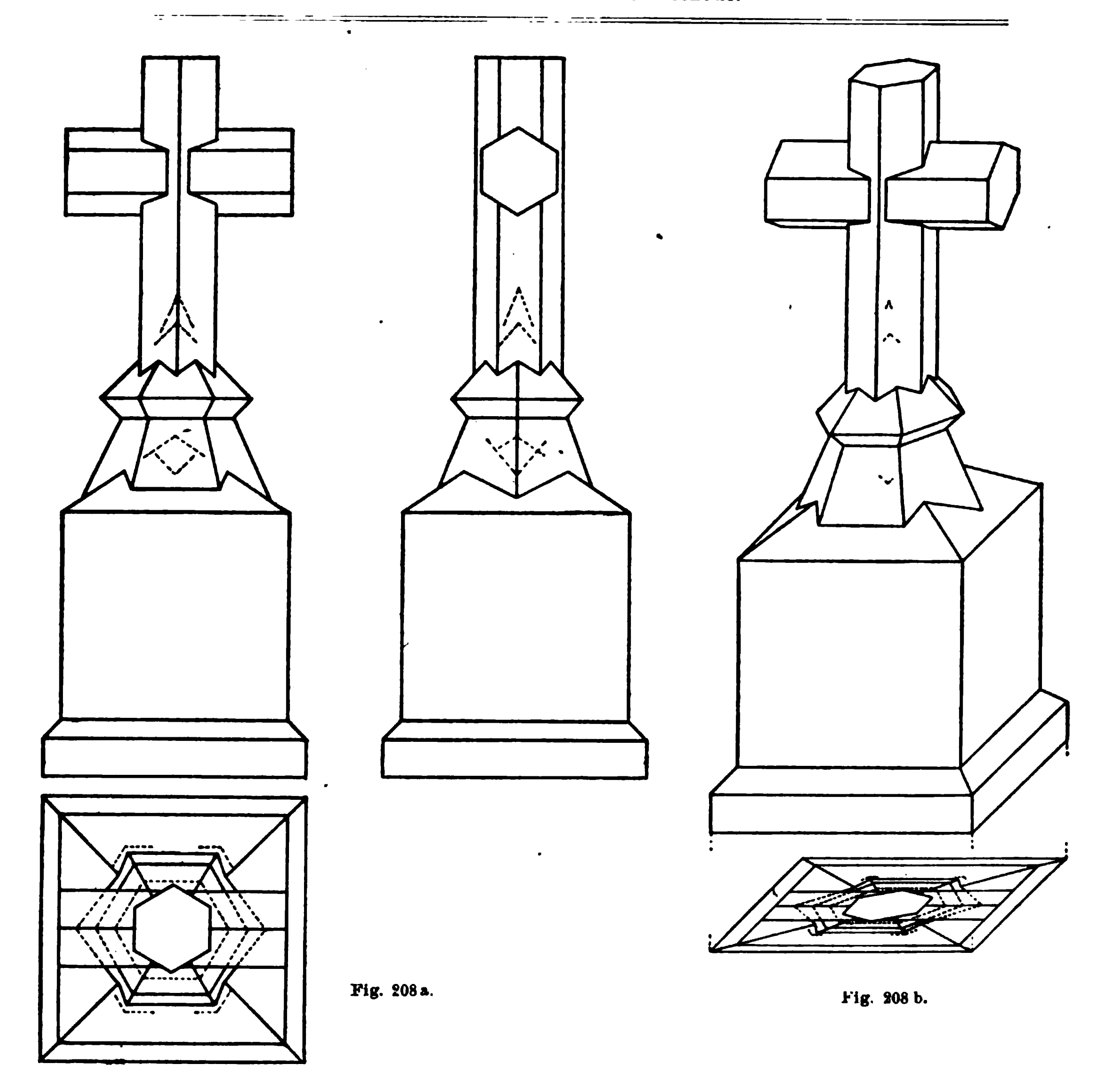


Fig. 208 a. Fig. 208 b.

tive; denn diese enthält den Grundriß in wahrer Gestalt und umgelegte wahre Höhen, während jene *den Aufriß in wahrer Gestalt* bietet *und umgelegte wahre Ordinaten.* Übrigens ist die Verkürzung $q_2 = \frac{1}{2}$ oder $= \frac{1}{3}$ kaum weniger einfach. Dabei wird dann der Winkel w_{12} zweckmäßig $= 120^0$ oder $= 150^0$ oder $= 135^0$ gewählt. Zur Beurteilung der Wirkungsweise der brauchbarsten Systeme ist ein Würfel in den Figuren 199—207 dargestellt. In Figur 208 ist ein größeres Beispiel aus dem Gebiete der Architektur behandelt. In Figur 209—215 sind die wichtigsten *Kristallformen des regulären Systemes* gezeichnet. Dasselbe besitzt be-

kanntlich drei gleichlange aufeinander senkrechtstehende Symmetralachsen. Legt man alle möglichen Ebenen, die von den drei Achsen Stücke abschneiden, die sich verhalten wie 1 : 1 : 1, so erhält man das Oktaeder

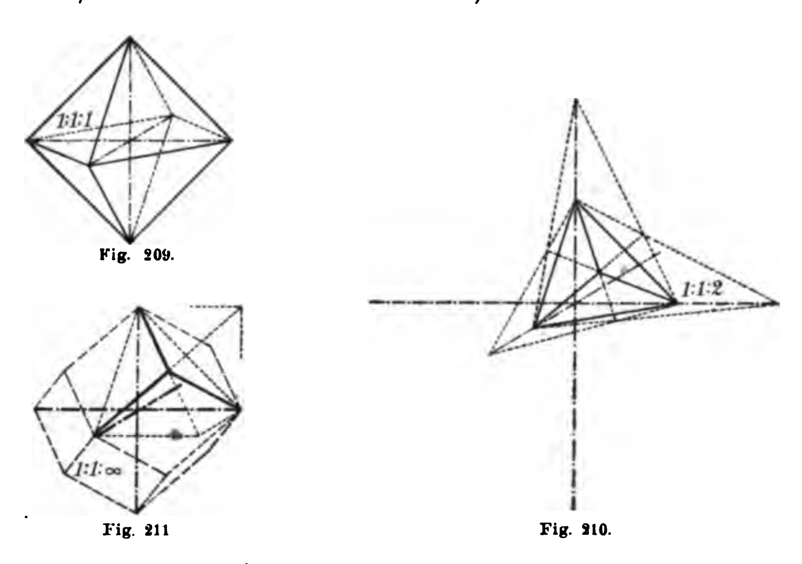


Fig. 209. Fig. 211 Fig. 210.

(Fig. 209). Verhalten sich die abgeschnittenen Achsenstücke jedesmal wie 1 : 1 : 2, so erhält man ein Pyramidenoktaeder (Fig. 210); das Verhältnis 1 : 1 : ∞ liefert das Granatoeder (Fig. 211); das Verhältnis 1 : 2 : 2

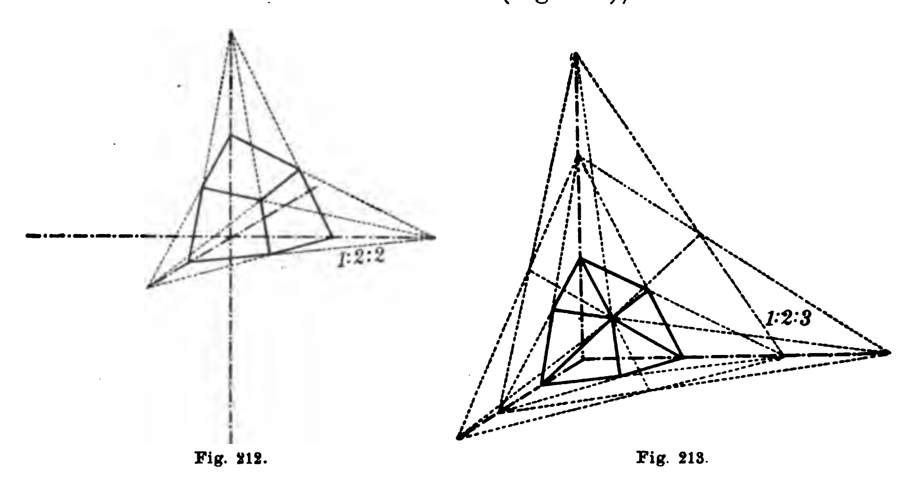


Fig. 212. Fig. 213.

bestimmt das Leucitoeder (Fig. 212), 1 : 2 : 3 das Diamantoeder (Fig. 213), 1 : 2 : ∞ einen Pyramidenwürfel (Fig. 214) und endlich 1 : ∞ : ∞ den Würfel (Fig. 215).

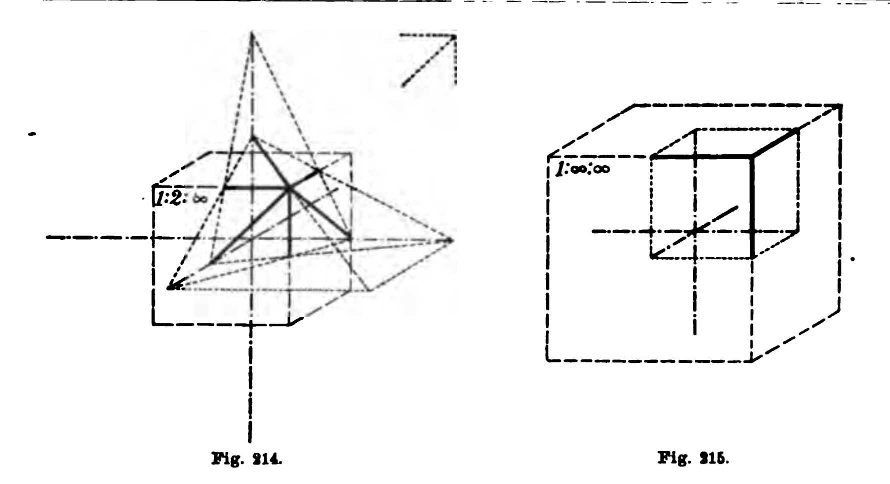
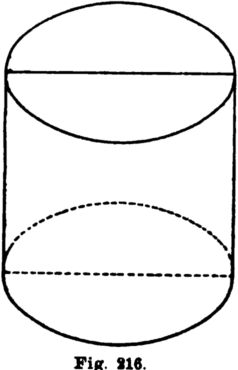


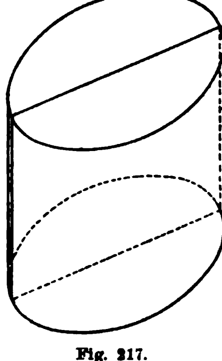
Fig. 214. Fig. 215.

69. Allgemeinste schiefe Parallelprojektion. Pohlkes Satz. Bisher hatten wir die Bildebene stets vertikal angenommen. Würde man eine ganz beliebige schief gelegene Bildebene wählen, so würde man die allgemeinste schiefe Parallelperspektive erhalten. Umgekehrt läßt sich beweisen, daß *irgend vier Punkte stets als schiefe Parallelprojektion der Ecken eines Dreibeines angesehen werden können, wenn sie nicht alle vier in gerader Linie liegen*, d. h. es existiert stets eine Bildebene und eine Projektionsrichtung, für welche sich die vier Ecken eines Dreibeines in vier beliebige aber nicht in gerader Linie liegende, vorgegebene Punkte projizieren. Damit ist aber *aller Zwang bei der Wahl der sechs Grundkonstanten gehoben;* dieselben können ganz beliebig nach Geschmack und Bedürfnis ausgewählt werden. Auf einen Beweis dieses *von Pohlke aufgestellten Satzes* wollen wir nicht eingehen.

70. Nachteile der schiefen Parallelprojektion. Nach dem Bisherigen ist die Frage wohl berechtigt, warum denn die Umständlichkeiten, die bei Anwendung von orthogonaler Parallelprojektion unvermeidlich sind, überhaupt nötig sind? Die Antwort lautet: solange es sich nur um ebenflächige und geradlinig begrenzte Objekte handelt, ist die ganz willkürliche Wahl der Grundkonstanten oder die Anwendung der Kavalierperspektive allerdings wesentlich einfacher. *Krumme Linien jedoch und Flächen bieten bei schiefer Projektion Schwierigkeiten.* Ein horizontaler Kreis z. B. bildet sich bei schiefer Projektion als Ellipse mit schiefer großer Achse ab, wie wir später sehen werden, während dieselbe bei orthogonaler Projektion horizontal liegt. Bei einem vertikalen Kreiszylinder macht sich das dadurch geltend, daß die geradlinige Kontur

desselben das eine Mal mit dem Achsenschnitt identisch ist, das andere Mal aber nicht (Fig. 216 und 217). Die Kontur einer Kugel ist nur bei orthogonaler Projektion kreisförmig, während sie bei schiefer Projektion im allgemeinen eine Ellipse ist. Aus diesem Grunde ist die Orthogonalprojektion nicht zu entbehren; namentlich im Maschinenzeichnen, wo viele


Fig. 216.


Fig. 217.

Rotationsflächen auftreten, wird man stets ein orthogonales axonometrisches System wählen. Da Weisbach selbst Maschineningenieur war, so ist es nunmehr auch verständlich, daß er der von ihm ausgebildeten Methode eine so große Bedeutung beilegte. Heutzutage hat jedoch gerade beim Maschinenzeichnen die Grund- und Aufrißmethode die Oberhand gewonnen, und jeder Arbeiter ist imstande, dieselbe zu verstehen dank den Erfolgen unserer Handwerkerschulen.

III. Teil.

Geometrische Verwandtschaften.

IX. Kapitel.

Geometrische Verwandtschaften.

71. Geometrische Verwandtschaften. Die Projektionslehre lehrt nicht nur, räumliche Objekte und Konstruktionen in einer Ebene abzubilden, sondern sie liefert auch die Mittel zur Auffindung neuer geometrischer Wahrheiten. Das Wesen der meisten geometrischen Untersuchungen besteht darin, daß man schwierigere geometrische Verhältnisse auf einfachere zurückführt. Dieses Zurückführen geschieht durch Vergleichen von Figuren, die in gewisser Beziehung zu einander stehen, und die man daher *geometrisch verwandte Figuren* nennt. Solche Figuren können am einfachsten durch Projektion hergestellt werden; man nennt sie dann *projektiv verwandt*.

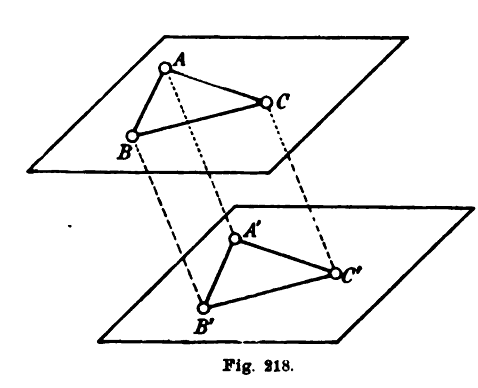


Fig. 218.

Eine ebene Figur kann nun entweder auf eine *parallele* oder auf eine *geneigte Ebene parallel-* oder *zentralprojiziert* werden. Dadurch ergeben sich die vier möglichen projektiven Verwandtschaften:

Kongruenz durch Parallelprojektion auf eine parallele Ebene (Fig. 218);

Ähnlichkeit durch Zentralprojektion auf eine parallele Ebene (Fig. 219);

Affinität durch Parallelprojektion auf eine geneigte Ebene (Fig. 220) und

Kollineation durch Zentralprojektion auf eine geneigte Ebene (Fig. 221).

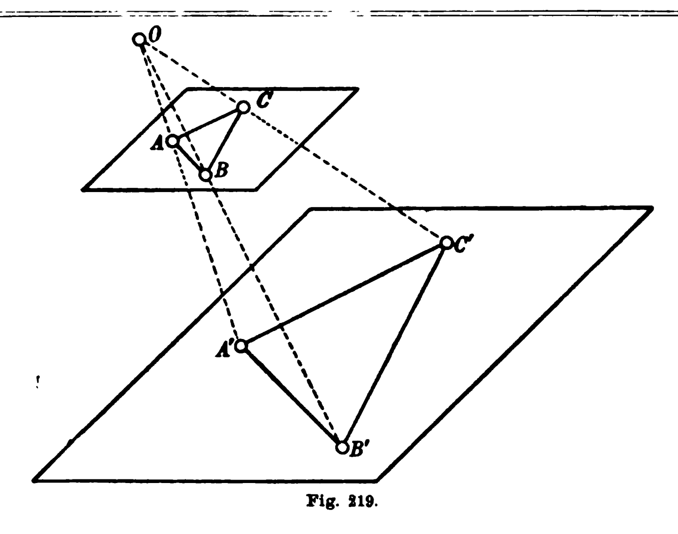


Fig. 219.

Man kann zwei projektiv verwandte ebene Figuren aus ihrer speziellen räumlichen Lage herausnehmen und etwa nebeneinanderlegen, ohne daß dabei gewisse Verwandtschaftseigenschaften verloren gehen. Für die Untersuchung der letzteren ist aber die spezielle räumliche, die perspektive Lage besonders bequem. Andererseits ist es aber auch vor-

Fig. 221.

Fig. 220

teilhaft, wenn man beide Figuren in derselben Ebene hat. Man kann nun leicht beide Vorteile dadurch vereinen, daß man eine der beiden Ebenen parallel verrückt oder dreht, bis sie in die andere hineinfällt.

72. Zwei kongruente Systeme. Verschiebt man von zwei kongruenten Figuren, die sich im Raume in perspektiver Lage befinden, eine derselben parallel mit sich selbst, so bleibt doch die Eigenschaft erhalten, daß die Verbindungsstrecken je zweier entsprechender Punkte einander parallel und gleich sind. Das gilt auch noch, wenn beide Figuren in dieselbe Ebene fallen (Fig. 222). Man sagt dann, sie befinden sich in derselben Ebene in perspektiver Lage. Von zwei kongruenten Figuren kann daher stets die eine als die Parallelverschiebung der anderen aufgefaßt werden. Demnach sind in kongruenten Figuren *die entsprechenden Strecken und Winkel gleich.* Letztere Eigenschaft ist unabhängig von der perspektiven Lage zweier kongruenter Figuren. *Es sind also zwei kongruente Systeme in beliebiger Lage in einer Ebene durch zwei entsprechende Punktepaare so bestimmt, daß zu jedem weiteren Punkte der entsprechende konstruiert werden kann.*

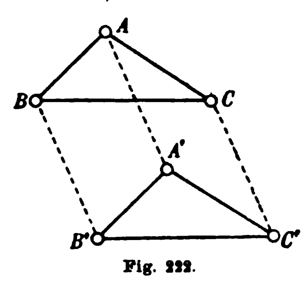


Fig. 222.

73. Zwei ähnliche Systeme. Verschiebt man von zwei ähnlichen Figuren, die sich im Raume in perspektiver Lage befinden, die eine derselben parallel mit sich selbst, so bleiben doch die Eigenschaften be-

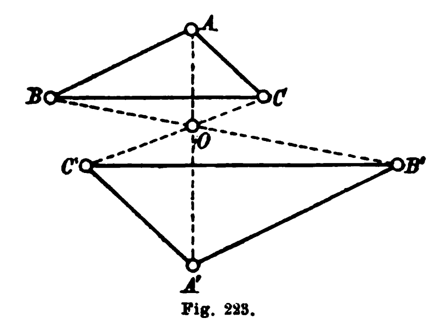


Fig. 223.

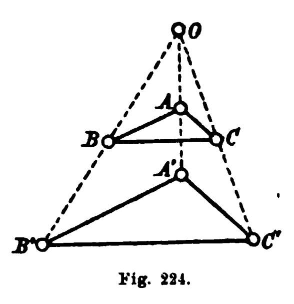


Fig. 224.

stehen, daß die Verbindungslinien je zweier entsprechender Punkte durch einen Punkt gehen, und daß je zwei entsprechende Geraden als Schnitte zweier paralleler Ebenen mit einer dritten parallel sind. Das gilt auch noch, wenn beide Figuren in dieselbe Ebene fallen. Man sagt dann, sie befinden sich in dieser Ebene in perspektiver Lage. Das Projektionszentrum heißt dann *Ähnlichkeitspunkt* und zwar *innerer* (Fig. 223) oder *äußerer* (Fig. 224), je nachdem entsprechende Strecken entgegengesetzt oder gleich gerichtet sind.

Zufolge der Parallelität entsprechender Strecken in perspektiver Lage stehen *die Entfernungen je zweier entsprechender Punkte vom Ähnlichkeitspunkt in demselben Verhältnis:*

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'}.$$

Im nämlichen Verhältnis stehen auch je zwei entsprechende Strecken:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

Man nennt dieses für je zwei ähnliche Figuren konstante Verhältnis das *charakteristische Verhältnis.* Da Winkel, deren Schenkel parallel und gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind, gleich sind, so sind *entsprechende Winkel* ähnlicher Figuren *gleich.* Die letzteren Eigenschaften ähnlicher Figuren sind unabhängig von ihrer perspektiven Lage. *Sind daher von zwei sich in beliebiger, nicht perspektiver, Lage befindenden ähnlichen Systemen zu zwei Punkten die entsprechenden bekannt, so kann zu jedem weiteren Punkte der entsprechende konstruiert werden.*

74. Zwei affine Systeme. Durch Parallelprojektion einer ebenen Figur auf eine zur Ebene derselben geneigte Ebene entsteht eine zur ersten affine Figur. Die Schnittlinie beider Ebenen heißt *Affinitätsachse. Alle Punkte der Affinitätsachse,* als gleichzeitig beiden Ebenen angehörend, *müssen sich selbst entsprechen. Entsprechende Geraden schneiden sich* daher *auf der Affinitätsachse. Die Verbindungslinien je zweier entsprechender Punkte sind einander parallel* (Fig. 225). Dreht man eine der beiden Ebenen um die Affinitätsachse, so bleiben diese Eigenschaften erhalten, auch wenn die beiden Ebenen zusammenfallen.

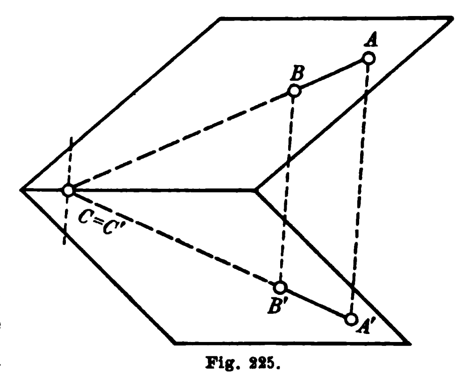


Fig. 225.

Man sagt dann, die beiden affinen Figuren liegen in dieser Ebene in perspektiver Lage. Das Drehen der einen Ebene bis zum Zusammenfallen mit der anderen kann nun um einen spitzen oder einen stumpfen Winkel erfolgen; man erhält daher die beiden affinen Figuren entweder auf der-

selben (Fig. 226) oder auf der entgegengesetzten (Fig. 227) Seite der Achse.

Die Projektion einer Figur und ihre innere oder äußere Umklappung sind beispielsweise affine Figuren, nur handelt es sich dabei um den speziellen Fall der orthogonalen Projektion, bei welcher die Projektionsstrahlen senkrecht zur Achse verlaufen.

Da in zwei affinen Figuren in räumlicher Lage einem unendlich fernen Punkte wieder ein unendlich ferner Punkt, oder der unendlich fernen Geraden der einen Ebene die unendlich ferne Gerade der anderen entspricht, so müssen *parallelen Geraden wieder parallele Geraden entsprechen und parallelen Strecken der einen Figur proportionierte Strecken der anderen* (Fig. 228). Ist also $AB \parallel CD$, so ist $A'B' \parallel C'D'$, und es ist $AB : CD = A'B' : C'D'$. Diese beiden Eigenschaften zweier affiner Figuren sind aber unabhängig von ihrer perspektiven Lage.

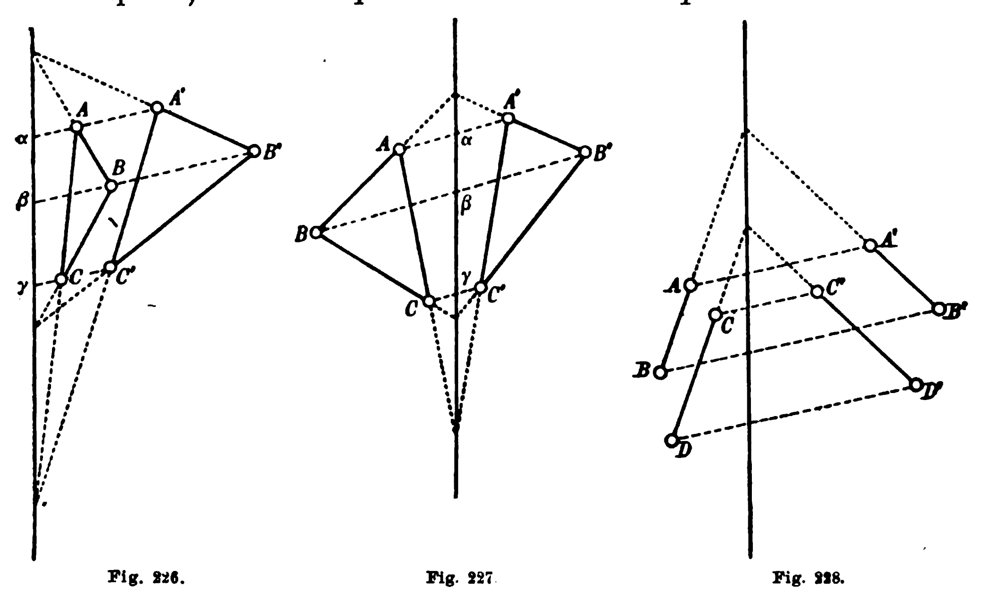


Fig. 226. Fig. 227 Fig. 228.

Daher sind *zwei affine Systeme, in beliebiger nicht perspektiver Lage bestimmt, wenn zu drei Punkten die entsprechenden drei gegeben sind* (Fig. 229). Denn zu jedem vierten Punkte ist dann der entsprechende eindeutig durch diese beiden Eigenschaften bestimmt und kann konstruiert werden. Sind nämlich die Punkte A, B und C und die ihnen entsprechenden A', B' und C' gegeben, so zieht man, um den zu D gehörenden Punkt D' zu finden, $DE \parallel BC$ und $DF \parallel AB$, macht

$A'E' : E'B' = AE : EB$ und $B'F' : F'C' = BF : FC$, zieht endlich durch E' eine Parallele zu $B'C'$ und durch F' eine Parallele zu $A'B'$ und bestimmt D' als Schnittpunkt dieser beiden Parallelen.

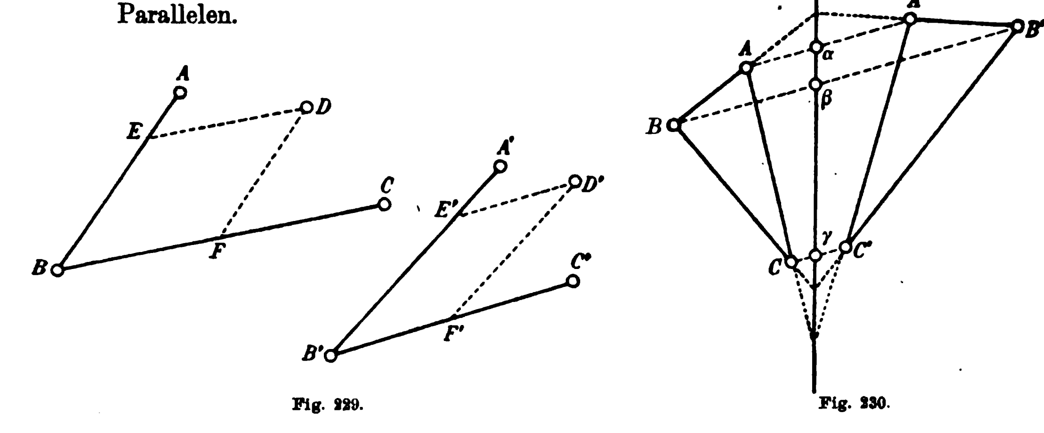


Fig. 229. Fig. 230.

75. Die Charakteristik der Affinität. Wegen der Parallelität der Projektionsstrahlen ist *das Abstandsverhältnis je zweier entsprechender Punkte von der Affinitätsachse konstant;* es heißt die *Charakteristik der Affinität* (Fig. 230). So ist

$$\frac{\alpha A'}{\alpha A} = \frac{\beta B'}{\beta B} = \frac{\gamma C'}{\gamma C}.$$

Werden *die Projektionsstrahlen senkrecht zur Achse,* handelt es sich also um Orthogonalprojektion, so wird *die Charakteristik dieser Affinität gleich dem Kosinus des Neigungswinkels beider Ebenen* (Fig. 231).

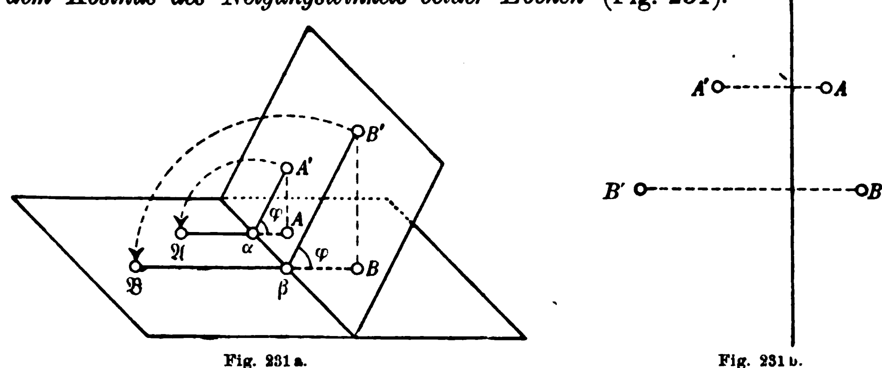


Fig. 231a. Fig. 231b.

Auch *das Inhaltsverhältnis zweier affiner Figuren ist gleich der Charakteristik.* Es genügt, diesen Satz für zwei affine Dreiecke nachzuweisen, da jede andere Figur sich in Dreiecke zerlegen läßt. Um zu beweisen, daß das Verhältnis der beiden Dreiecke ABC und $A'B'C'$

gleich der Charakteristik ist, zerlege man das Dreieck ABC in die algebraische Summe der drei Dreiecke $Bst + Ctu - Asu$ (Fig. 232). Ebenso das Dreieck $A'B'C'$ in $B'st + C'tu - A'su$. Je zwei entsprechende dieser Dreiecke haben aber gemeinsame Grundlinien, während ihre Höhen sich verhalten wie $B\beta : B'\beta$ bzw. wie $C\gamma : C'\gamma$ bzw. wie $A\alpha : A'\alpha$. Diese Verhältnisse sind aber gleich der Charakteristik; somit ist auch das Verhältnis der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ gleich dieser.

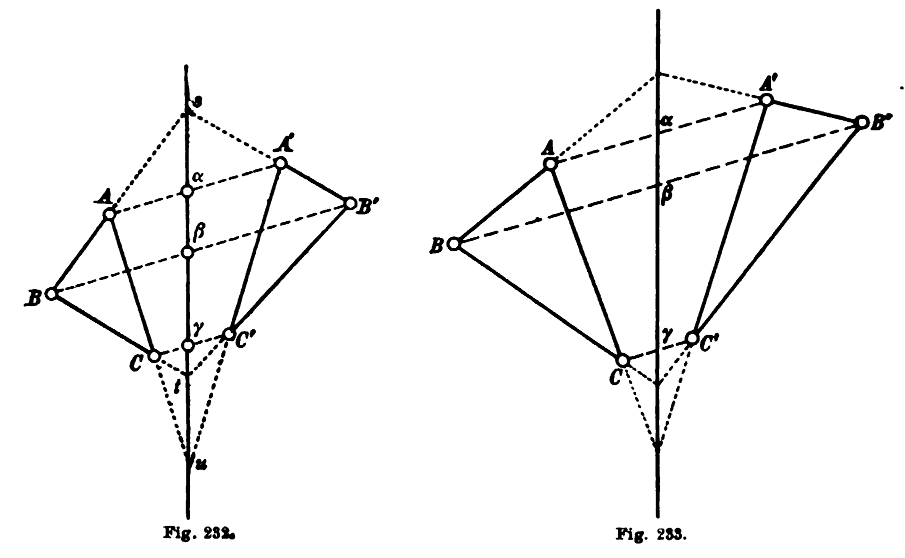


Fig. 232. Fig. 233.

76. Charakteristik = 1. *Wird die Charakteristik gleich 1, so werden entsprechende Figuren einander flächengleich.* Das kann auf *dreierlei* Weise möglich sein:

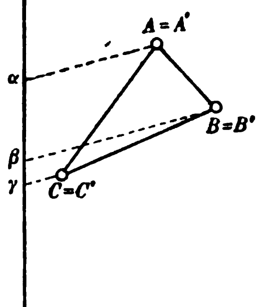


Fig. 234.

1. dadurch, daß die beiden Figuren auf verschiedener Seite der Affinitätsachse liegen und $A\alpha = A'\alpha$, $B\beta = B'\beta$ und $C\gamma = C'\gamma$ ist (Fig. 233); die Figuren sind dann *schief symmetrisch*;

2. dadurch, daß die beiden Figuren auf derselben Seite der Achse liegen und $A\alpha = A'\alpha$, $B\beta = B'\beta$ und $C\gamma = C'\gamma$ wird; die beiden Figuren *fallen dann zusammen*, d. h. sie sind kongruent (Fig. 234);

3. dadurch, daß die beiden Figuren auf derselben Seite der Achse liegen, die Projektionslote aber parallel der Affinitätsachse sind, so daß $A\alpha = A'\alpha = B\beta = B'\beta = C\gamma = C'\gamma = \infty$ und *die Charakteristik* $= \frac{\infty}{\infty} = 1$ wird (Fig. 235).

An die Affingleichheit zweier Figuren schließt sich die Lehre des Euklid von der Gleichheit ebener Figuren an, jedoch ist bei ihm der Begriff „gleich“ weiter gefaßt, da bei affingleichen Figuren auch eine Gleichheit in den einzelnen Teilen stattfindet.

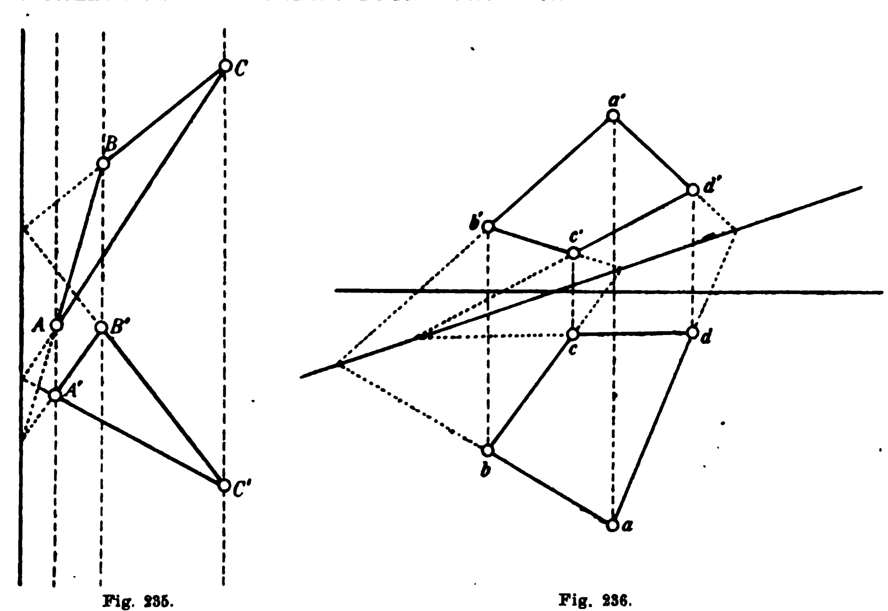


Fig. 235. Fig. 236.

77. Grund- und Aufriß als affine Figuren in perspektiver Lage. Als *Beispiel zweier affiner Figuren* wollen wir noch *Grund- und Aufriß einer Figur* betrachten (Fig. 236). Die Risse sind affin, weil beide Parallelprojektionen derselben Figur sind auf zwei zu dieser geneigten Ebenen. Sie befinden sich aber auch in perspektiver Lage, da entsprechende Punkte sich auf Parallelen befinden. Daher müssen sich je zwei entsprechende Geraden, d. h. *der Grund- und Aufriß der nämlichen Geraden, stets auf einer Geraden, der Affinitätsachse schneiden.* Diese hat dabei folgende Bedeutung: Jeder ihrer Punkte ist sowohl Vertikal-, als auch Horizontalprojektion eines und desselben Punktes der Figur. Nun decken sich aber die Horizontal- und Vertikalprojektion nur jedes Punktes der Halbierungsebene des II. und IV. Raumes (Fig. 237), also müssen alle Punkte der Affinitätsachse gleichzeitig auf dieser liegen. Mit anderen Worten: *Die Affinitätsachse ist die zusammenfallende Vertikal- und*

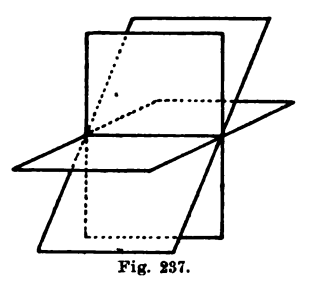


Fig. 237.

Horizontalprojektion der Schnittlinie der Figurenebene mit der Halbierungsebene des II. und IV. Raumes.

Man kann diesen Satz von den Schnittpunkten der zusammengehörenden Horizontal- und Vertikalprojektionen auch dazu benutzen, um *die Projektionen eines durch drei Punkte gegebenen Polygons zu vervollständigen.* Indessen wird die Konstruktion nicht einfacher, als wenn man die Diagonalenschnittpunkte benutzt (vgl. § 6).

78. Zwei kollineare Systeme in perspektiver Lage im Raume. Durch Zentralprojektion einer ebenen Figur auf eine zu ihrer Ebene geneigten Ebene entsteht eine zu der ersten kollineare Figur (Fig. 238). Das Projektionszentrum heißt *Kollineationszentrum,* die Schnittlinie beider Ebenen *Kollineationsachse. Alle Punkte derselben,* als gleichzeitig beiden Ebenen angehörend, *entsprechen sich selbst.* Daher *schneiden sich entsprechende Geraden auf der Kollineationsachse. Die Verbindungslinien je zweier entsprechender Punkte gehen alle durch einen Punkt, das Kollineationszentrum.*

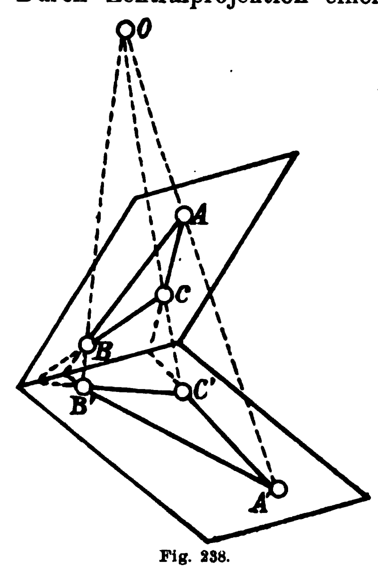


Fig. 238.

Die Projektion oder das Abbild f der unendlich fernen Geraden der Originalebene ist der Schnitt der Bildebene mit einer Ebene, die durch das Zentrum O parallel der Originalebene gelegt ist, und heißt *Fluchtlinie* (Fig. 239). Da die unendlich fernen Punkte aller Geraden der Originalebene auf der unendlich fernen Geraden derselben liegen, so müssen ihre Abbilder alle auf der Fluchtlinie liegen; sie heißen *Fluchtpunkte.* Die Gerade g der Originalebene, deren Abbild ins Unendliche fällt, heißt *Gegenlinie.* Sie ist die Schnittlinie der Originalebene mit einer Ebene, die durch O parallel der Bildebene gelegt ist. Die Originalebene und die Bildebene entsprechen sich übrigens gegenseitig und sind in der Vorstellung miteinander vertauschbar. Faßt man die Originalebene als Bildebene auf, so wird die Gegenlinie zur Fluchtlinie, die Fluchtlinie zur Gegenlinie, usw.; die verschiedenen Bezeichnungen sind nur der Anschaulichkeit und der bequemeren Ausdrucksweise wegen eingeführt.

Schneidet man Bild- und Originalebene durch eine zu ihnen senkrechte und durch O gehende Ebene, und schneidet diese die Gegenlinie g

in G, die Fluchtlinie f in F und die Kollineationsachse c in C, *so bilden die vier Punkte O, G, C, F ein Parallelogramm.* Ist also O nicht bekannt, so läßt es sich leicht finden, wenn F und G bekannt sind.

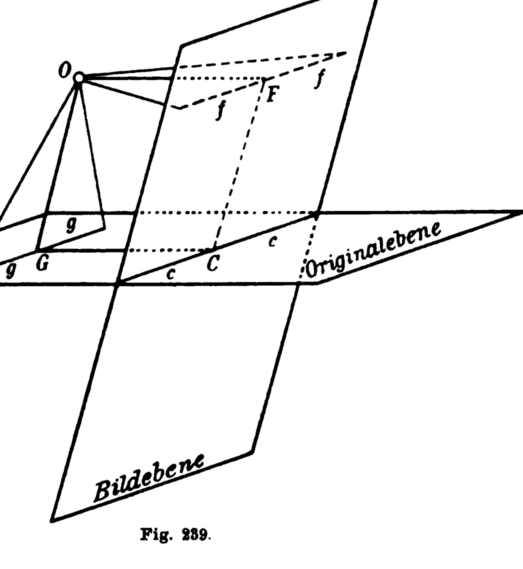


Fig. 239.

Durch f und c ist die Bildebene, durch g und c die Originalebene in drei Abschnitte geteilt, die sich folgendermaßen entsprechen (Fig. 240):

das Stück der Originalebene zwischen c und ∞ drängt sich auf der Bildebene zwischen c und f zusammen;

das Stück der Originalebene zwischen g und c dehnt sich auf der Bildebene von c bis ∞ aus;

das Stück endlich der Originalebene von g bis ∞ erstreckt sich auf der Bildebene von ∞ bis f.

Um *eine Gerade a abzubilden* (Fig. 241), bestimmt man ihren Spurpunkt S, d. h. ihren Schnitt mit der Bildebene, und ihren Fluchtpunkt A durch eine Parallele durch O. Die Verbindungslinie SA beider Punkte ist dann ihr Abbild.

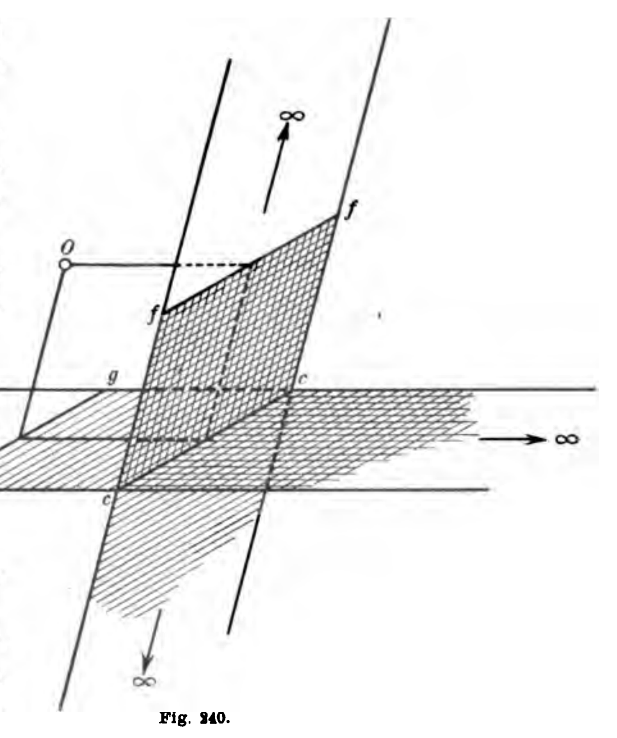


Fig. 240.

Die Abbilder einer Schar von Parallelen gehen alle durch einen Punkt, ihren gemeinsamen

Fluchtpunkt. Nur, wenn die Parallelen mit der Kollineationsachse parallel sind, bilden sie sich wieder unter sich parallel ab, da dann ihr Fluchtpunkt ins Unendliche fällt.

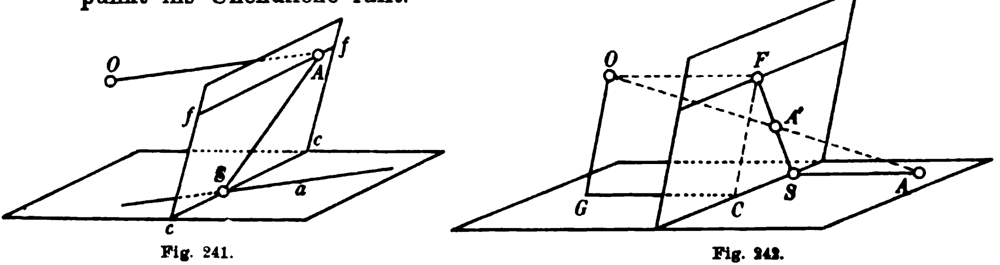


Fig. 241. Fig. 242.

Um *einen Punkt A abzubilden* (Fig. 242), legt man durch ihn eine Gerade, am bequemsten senkrecht zur Achse, und bildet sie ab, indem man ihren Spurpunkt S mit ihrem Fluchtpunkt, der in diesem Falle mit F zusammenfällt, verbindet. Der Schnitt A' dieser Verbindungslinie mit dem Projektionsstrahl OA ist dann das Abbild von A.

79. Zwei kollineare Systeme in perspektiver Lage in der Ebene. Dreht man die Bildebene um die Kollineationsachse, so muß nach wie vor jeder Punkt der Achse sich selbst entsprechen, und entsprechende Geraden müssen sich daher auf dieser schneiden; auch die Verbindungslinien je zweier entsprechender Punkte gehen noch durch einen Punkt, das Zentrum. Das ist auch dann noch so, wenn die Bildebene in die Originalebene fällt. Je nachdem nun die Bildebene um einen spitzen oder stumpfen Winkel in die Originalebene gelegt wird, können zwei Lagen von O, c, f und g eintreten: entweder (Fig. 243) liegen O und c zwischen g und f oder (Fig. 244) g und f liegen zwischen O und c. Stets muß $OG = FC$ sein.

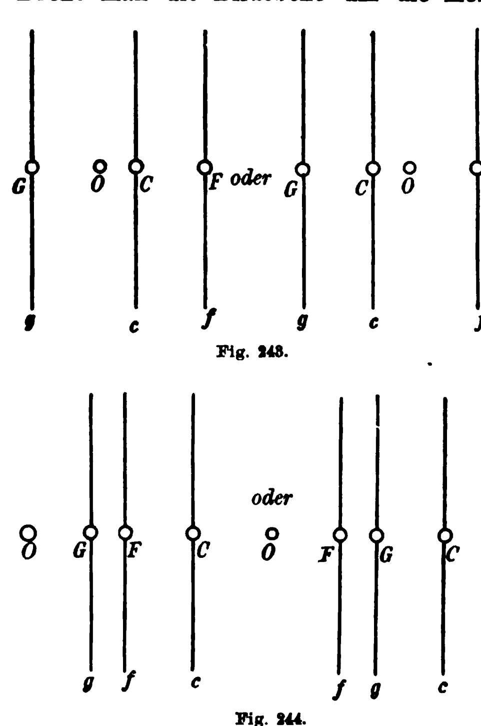


Fig. 243.

Fig. 244.

Die Abbildung einer Geraden erfolgt genau wie früher bei räumlicher Lage der beiden Ebenen (Fig. 245). Man bestimmt den Spurpunkt S der abzubildenden Geraden a und ihren Fluchtpunkt A durch eine Parallele durch O zu a. AS ist dann das Abbild von a. Auch *die Abbildung eines Punktes* erfolgt wie früher, indem man eine Gerade durch den Punkt, am bequemsten senkrecht zur Kollineationsachse, dadurch abbildet, daß man ihren Spurpunkt S mit ihrem Fluchtpunkt F verbindet und den Schnitt A' von SF und OA bestimmt (Fig. 246). A' ist dann das gesuchte Abbild von A.

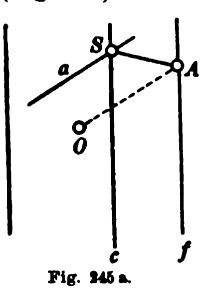


Fig. 245 a.

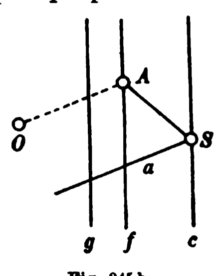


Fig. 245 b.

Bewegt man von zwei kollinearen Systemen, die sich in einer Ebene in perspektiver Lage befinden, das eine derselben aus dieser Lage heraus, so *bleiben alle Eigenschaften der Lage bestehen,* also z. B.: zwei parallelen Geraden entsprechen Geraden, die sich in einem endlichen Punkte schneiden. Es bleiben aber *auch gewisse metrische Eigenschaften* bestehen. Um diese bequem aussprechen zu können, sollen zunächst die wichtigsten Eigenschaften der Punktreihen und Strahlbüschel besprochen werden.

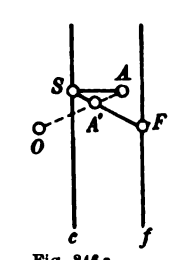


Fig. 246 a.

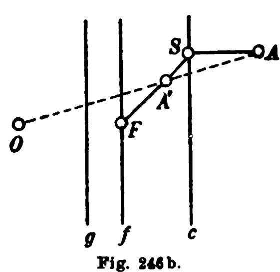


Fig. 246 b.

80. Punktreihen und Strahlbüschel. Doppelverhältnis. Unter einer ebenen *Punktreihe* versteht man die Gesamtheit aller Punkte einer Geraden. Unter einem ebenen *Strahlbüschel* versteht man die Gesamtheit aller Geraden einer Ebene, die durch einen Punkt, das Zentrum, gehen.

Wählt man *auf einer Punktreihe* zwei Punkte A und B als Grundpunkte (Fig. 247), so ist die Lage eines dritten Punktes X durch das Verhältnis der Strecken AX und XB noch nicht ohne weiteres bestimmt, denn X kann sowohl innerhalb, als auch außerhalb von AB liegen. Um seine Lage eindeutig

A X M B

Fig. 247.

zu fixieren, berücksichtigen wir noch die *Richtung der einzelnen Strecken* dadurch, daß wir etwa die Richtung von A nach B als positiv wählen und dann die umgekehrte Richtung von B nach A als negativ bezeichnen, so daß $AB = -BA$ ist. *Nunmehr ist in einer Punktreihe nach Festlegung zweier Grundpunkte A und B die Lage jedes dritten Punktes X durch das Verhältnis $v = \frac{AX}{XB}$ seiner Abstände von den Grundpunkten eindeutig bestimmt.* Liegt X zwischen A und B, so ist v positiv, und zwar $= +0$, wenn X auf A liegt, $= +1$, wenn X auf der Mitte M liegt, $= +\infty$, wenn X auf B liegt. Liegt X außerhalb von AB, so ist v negativ, und zwar $= -\infty$, wenn X auf B liegt, $= -1$, wenn X ins Unendliche fällt, und $= -0$, wenn X auf A fällt. *Umgekehrt ist zu jeder Lage von X das Verhältnis $\frac{AX}{XB}$ eindeutig bestimmt.*

Hat man zwei beliebige Punkte X und Y, die die Strecke AB in vier Strecken teilen (Fig. 248), so kann man das Verhältnis der Verhältnisse derselben $\frac{AX}{XB} : \frac{AY}{YB}$ oder das *Doppelverhältnis der vier Punkte $ABXY$*, das man kurz auch $(ABXY)$ schreibt, bilden. Dann ist wieder unter Berücksichtigung der Vorzeichen *für jedes X und Y der Wert $(ABXY)$ eindeutig bestimmt.* Dabei können übrigens auch X und Y als Grundpunkte und A und B als Teilpunkte aufgefaßt werden. Liegen die Punkte X und Y so, daß $\frac{AX}{XB} = -\frac{AY}{YB}$ ist, daß also die Strecke AB durch X und Y *innen und außen im selben Verhältnis geteilt wird*, so heißen diese vier Punkte *harmonische Punkte. Das Doppelverhältnis derselben ist* demnach $= -1$. Im besonderen bilden also *zwei Punkte A und B mit dem Halbierungspunkt ihrer Verbindungsstrecke und dem unendlich fernen Punkte vier harmonische Punkte.*

A X B Y

Fig. 248.

Wählt man *aus einem Strahlbüschel* zwei Strahlen a und b als Grundstrahlen (Fig. 249), so ist die Lage jedes dritten Strahles x durch das Verhältnis der senkrechten Abstände irgendeines seiner Punkte X von den Strahlen a und b oder — was dasselbe ist — durch das Verhältnis $v = \frac{\sin(ax)}{\sin(xb)}$ seiner Winkel mit

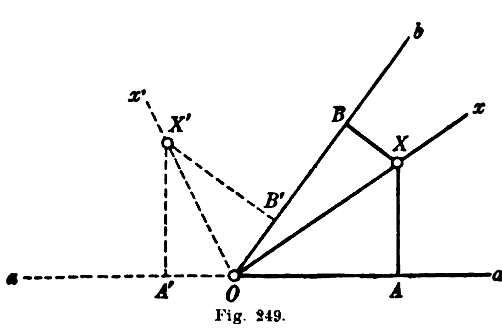


Fig. 249.

den Grundstrahlen noch nicht ohne weiteres bestimmt, denn x kann sowohl in dem spitzen Winkel (ab) als auch in dessen Nebenwinkel, dem stumpfen Winkel (ba) liegen. Um seine Lage eindeutig zu fixieren, berücksichtigen wir *die Richtung, in der ein Winkel* (ab) *durchlaufen wird*, dadurch, daß wir ihn etwa dann positiv wählen, wenn a durch Drehung im entgegengesetzten Sinne der Drehung eines Uhrzeigers nach b gelangt. Im anderen Falle ist dann der Winkel negativ zu bezeichnen, so daß $(ab) = -(ba)$ ist. *Nunmehr ist in einem Strahlbüschel nach Festlegung zweier Grundstrahlen a und b die Lage jedes dritten Strahles x durch das Verhältnis* $v = \frac{\sin(ax)}{\sin(xb)}$ *eindeutig bestimmt* (Fig. 250). Liegt x zwischen a und b, so ist v positiv, und zwar $= +0$, wenn x auf a fällt, $= +1$, wenn x auf die Halbierungslinie m von (ab)

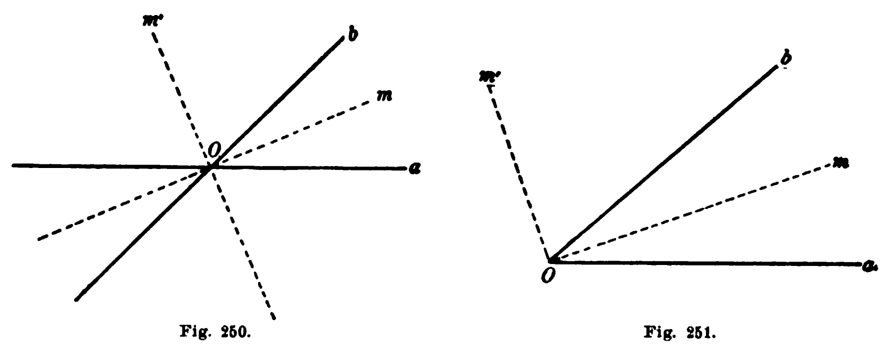


Fig. 250. Fig. 251.

fällt und $= +\infty$, wenn x auf b fällt. Liegt x in dem Nebenwinkel zu (ab) in (ba), so ist v negativ, und zwar $= -\infty$, wenn x auf b fällt, $= -1$, wenn x auf die Halbierungslinie m' von (ba) fällt, und $= -0$, wenn x auf a fällt. *Umgekehrt ist zu jeder Lage von x das Verhältnis* $\frac{\sin(ax)}{\sin(xb)}$ *eindeutig bestimmt.*

Hat man zwei beliebige Strahlen x und y, die den Winkel ab teilen, so kann man das Verhältnis der Verhältnisse $\frac{\sin(ax)}{\sin(xb)} : \frac{\sin(ay)}{\sin(yb)}$ oder kurz das *Doppelverhältnis der vier Strahlen abxy*, das man auch $(abxy)$ schreibt, bilden. Dann ist wieder, unter Berücksichtigung der Vorzeichen, *für jedes x und y der Wert* $(abxy)$ *eindeutig bestimmt.* Liegen vier Strahlen $abxy$ so, daß $\frac{\sin(ax)}{\sin(xb)} = -\frac{\sin(ay)}{\sin(yb)}$ ist, d. h. daß Winkel (ab) durch x und sein Nebenwinkel (ba) durch y im selben Verhältnis geteilt werden, so heißen diese vier Strahlen *vier harmonische Strahlen. Das Doppelverhältnis derselben ist* demnach $= -1$. *Im besonderen bilden*

also zwei Strahlen a und b mit den beiden aufeinander senkrecht stehenden Halbierungslinien m und m' ihrer Winkel vier harmonische Strahlen (Fig. 251).

81. Zwei kollineare Systeme in beliebiger Lage. Der Fundamentalsatz der projektiven Geometrie. Nunmehr sind wir imstande *die metrischen Beziehungen zweier in beliebiger nicht perspektiver Lage sich befindenden kollinearen Systeme* auszusprechen. Sie sind enthalten in dem *Fundamentalsatz der projektiven Geometrie,* der lautet: *In zwei kollinearen Punktreihen ist das Doppelverhältnis von vier Punkten gleich dem Doppelverhältnis der vier ihnen entsprechenden Punkte.* Es ist nämlich (Fig. 252):

$$\text{Dreieck } AOX = \tfrac{1}{2}h \cdot AX = \tfrac{1}{2}ax \sin(ax)$$

und

$$\text{Dreieck } BOX = \tfrac{1}{2}h \cdot XB = \tfrac{1}{2}bx \sin(xb).$$

Durch Division erhält man die Gleichung:

$$1)\quad \frac{AX}{XB} = \frac{a \cdot \sin(ax)}{b \cdot \sin(xb)}.$$

Ebenso ist

$$\text{Dreieck } AOY = \tfrac{1}{2}h \cdot AY = \tfrac{1}{2}ay \sin(ay)$$

und

$$\text{Dreieck } BOY = \tfrac{1}{2}h \cdot YB = \tfrac{1}{2}by \sin(yb).$$

Durch Division erhält man die Gleichung:

$$2)\quad \frac{AY}{YB} = \frac{a \cdot \sin(ay)}{b \cdot \sin(yb)}.$$

Durch Division der Gleichungen 1) und 2) folgt schließlich:

$$\frac{AX}{XB} : \frac{AY}{YB} = \frac{\sin(ax)}{\sin(xb)} : \frac{\sin(ay)}{\sin(yb)}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist aber das Doppelverhältnis $(ABXY)$ der vier Punkte A, B, X und Y. Dieses ist gleich einem Ausdruck, in

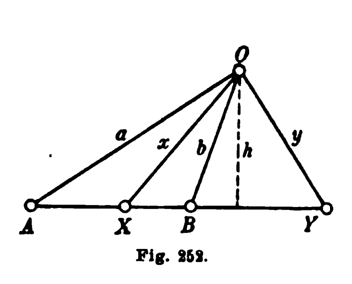


Fig. 252.

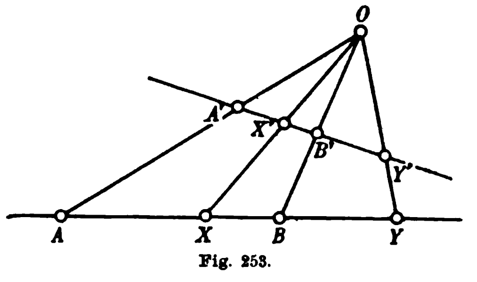


Fig. 253.

welchem nur die Sinus der Winkel (ax), (xb), (ay) und (yb) vorkommen, d. h. gleich einem Werte, der nur von diesen Winkeln abhängig ist. Schneidet man also die vier Strahlen a, b, x und y durch eine zweite

Gerade in den Punkten A', B', X', Y', wobei die Strahlenwinkel unverändert bleiben, so muß auch das Doppelverhältnis von A', B', X' und Y' gleich dem Doppelverhältnis von a, b, x und y sein (Fig. 253). Somit sind die Doppelverhältnisse $(ABXY)$ und $(A'B'X'Y')$ einander gleich. Die vier Punkte $ABXY$ sind aber die Zentralprojektionen der vier Punkte $A'B'X'Y'$, so daß sich dieselben paarweise kollinear entsprechen.

Man erkennt sofort, daß *die nämliche Beziehung auch für zwei kollineare Strahlbüschel* gilt. Denn bei perspektiver Lage der beiden Büschel ist das Doppelverhältnis eines Strahlenquadrupels gleich demjenigen des entsprechenden, weil sie beide gleich dem Doppelverhältnis ihrer vier Schnittpunkte auf der Kollineationsachse sind.

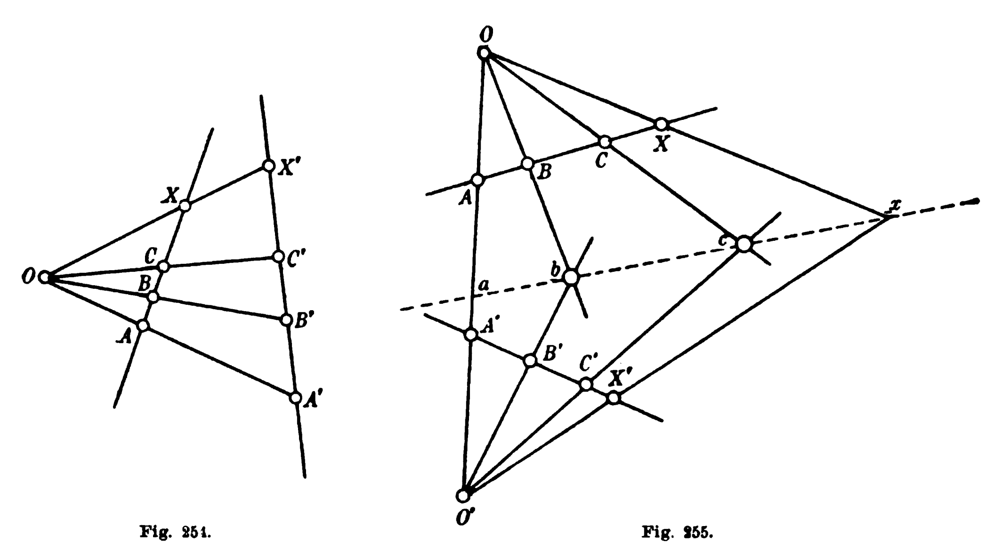


Fig. 254. Fig. 255.

Nach dem Fundamentalsatze der projektiven Geometrie sind *durch drei Punktepaare zwei kollineare Punktreihen bestimmt*, so daß zu jedem vierten Punkte der einen Reihe der entsprechende der anderen konstruiert werden kann. Diese *Konstruktion* bietet keine Schwierigkeit, wenn sich die beiden Punktreihen bereits in perspektiver Lage befinden (Fig. 254). Ist dieses nicht der Fall, so können sie dadurch in perspektive Lage gebracht werden, daß man zwei entsprechende Punkte aufeinander fallen läßt. Man kann die vorliegende Aufgabe aber auch dadurch lösen, daß man eine dritte Punktreihe, die zu beiden gegebenen perspektiv liegt, zu Hilfe nimmt (Fig. 255). Diese wird dadurch gewonnen, daß man zunächst auf der Verbindungslinie zweier entsprechender Punkte A und A' zwei Zentren O und O' wählt und von diesen die beiden anderen gegebenen Punkte-

paare B, C und B', C' projiziert. Durch die hierdurch erhaltenen Punkte b und c ist die Hilfspunktreihe bestimmt.

Auch *zwei kollineare Strahlbüschel sind durch drei Strahlenpaare bestimmt.* Soll zu einem beliebigen vierten Strahl der entsprechende *konstruiert* werden, so kann dieses bei perspektiver Lage der beiden Büschel ohne weiteres geschehen (Fig. 256). Liegen dieselben nicht perspektiv, so können sie in diese Lage dadurch gebracht werden, daß man zwei ge-

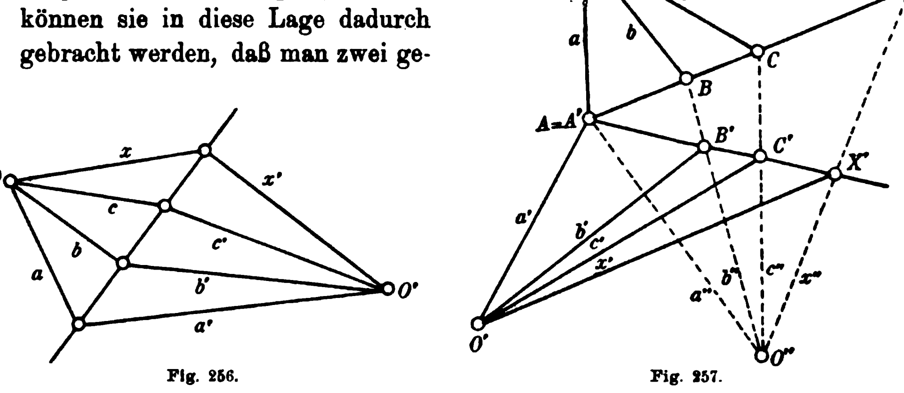


Fig. 256.

Fig. 257.

gebene entsprechende Strahlen zusammenfallen läßt. Die vorliegende Aufgabe läßt sich aber auch dadurch lösen, daß man ein drittes Strahlbüschel, das zu beiden gegebenen perspektiv liegt, zu Hilfe nimmt (Fig. 257). Dieses wird dadurch gewonnen, daß man zunächst durch den Schnittpunkt zweier entsprechender Strahlen a und a' zwei Punktreihen $ABC\ldots$ und

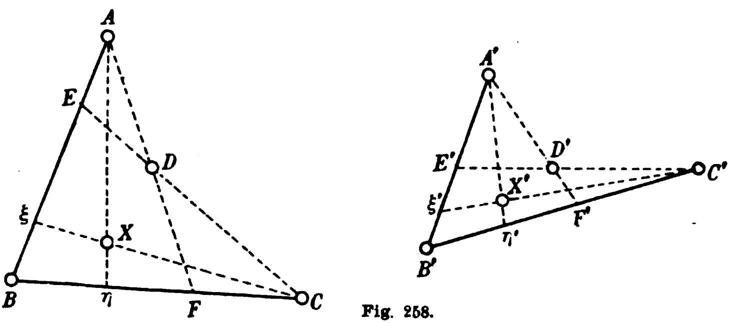


Fig. 258.

$A'B'C'\ldots$ legt. Da in diesen ihr Schnittpunkt $A = A'$ sich selbst entspricht, so liegen sie perspektiv, es kann also ihr Projektionszentrum O'' als Schnitt von BB' und CC' bestimmt werden.

Zwei kongruente oder zwei ähnliche Systeme in beliebiger Lage in derselben Ebene waren durch zwei Punktepaare, zwei affine durch drei gegeben. *Zwei kollineare Systeme sind nun durch vier entsprechende Punkte-*

paare so gegeben, daß zu jedem weiteren Punkte der entsprechende konstruiert werden kann (Fig. 258). Entsprechen z. B. den vier Punkten $ABCD$ des einen Systems die Punkte $A'B'C'D'$ des anderen, und soll zu X der entsprechende Punkt X' gefunden werden, so ziehe man etwa CX und AX, welche auf BA den Punkt ξ und auf BC den Punkt η ausschneiden. Bestimmt man nun die beiden Punkte ξ' und η' so, daß das Doppelverhältnis $(ABE\xi) = (A'B'E'\xi')$ und ebenso $(CBF\eta) = (C'B'F'\eta')$ wird, so erhält man X' als Schnitt von $\xi'C'$ und $\eta'A'$.

82. Verwandte Punktreihen und Strahlbüschel. (Zusammenstellung). Wir wollen nun noch einmal *zusammenstellen*, in welcher Beziehung verwandte Punktreihen und Strahlbüschel bei den vier projektiven Verwandtschaften zueinander stehen.

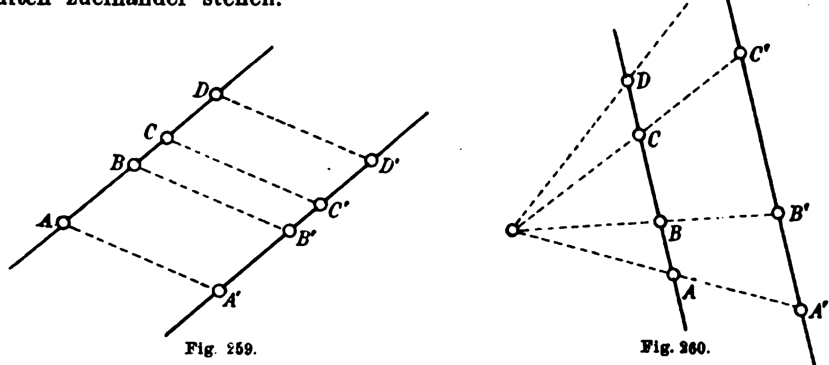


Fig. 259. Fig. 260.

Bei *kongruenten Punktreihen* sind entsprechende Strecken jedesmal gleich: die eine Punktreihe ist die genaue Wiederholung der anderen (Fig. 259).

Bei *ähnlichen Punktreihen* ist das Verhältnis je zweier Strecken der einen gleich dem Verhältnis der entsprechenden Strecken der anderen: die eine Punktreihe ist die vergrößerte oder verkleinerte Wiederholung der anderen (Fig. 260).

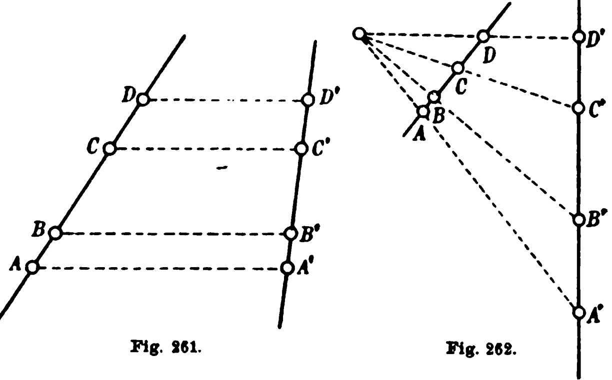


Fig. 261. Fig. 262.

Affine Punktreihen sind gleichfalls ähnlich (Fig. 261).

Bei *kollinearen Punktreihen* ist das Doppelverhältnis von je vier

Punkten der einen gleich dem Doppelverhältnis der entsprechenden vier Punkte der anderen: die eine Punktreihe ist die allgemeinste projektive Wiederholung der anderen (Fig. 262); zwei kollineare Punktreihen heißen daher auch *projektive Punktreihen*.

Daher ist in kongruenten Punktreihen durch ein — in ähnlichen Punktreihen durch zwei — und in kollinearen Punktreihen durch drei Punktepaare zu jedem weiteren Punkte der entsprechende Punkt bestimmt.

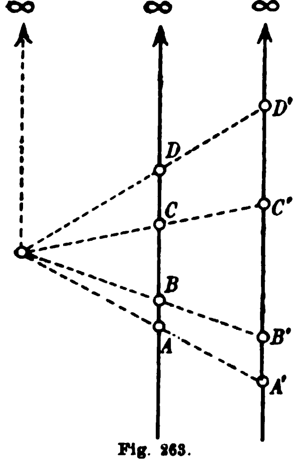


Fig. 263.

Beachtenswert ist der sukzessive Fortschritt: Gleichheit der Strecken (Kongruenz), Gleichheit der Verhältnisse der Strecken (Ähnlichkeit und Affinität), Gleichheit der Verhältnisse der Verhältnisse der Strecken (Kollineation).

Bemerkt sei noch, daß *kollineare Punktreihen dann ähnlich sind, wenn sich ihre unendlich fernen Punkte gegenseitig entsprechen* (Fig. 263).

In zwei *kongruenten* Strahlbüscheln sind je zwei entsprechende Winkel einander gleich: das eine Strahlbüschel ist die genaue Wiederholung des anderen.

Dieselbe Beziehung findet auch bei Strahlbüscheln zweier *ähnlicher* Systeme statt.

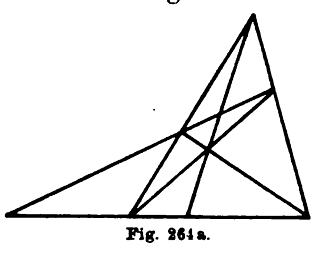
In zwei *kollinearen* Strahlbüscheln ist das Doppelverhältnis von je vier Strahlen des einen Büschels gleich dem Doppelverhältnis der entsprechenden vier Strahlen des anderen: das eine Büschel ist die allgemeinste projektive Wiederholung des anderen; zwei kollineare Strahlbüschel heißen daher auch *projektive Strahlbüschel*.

Dieselbe Beziehung findet auch bei entsprechenden Strahlbüscheln zweier *affinen* Systeme statt.

83. Das vollständige Vierseit. Wir wollen noch als Anwendung den wichtigen *Satz* beweisen, *daß in einem vollständigen Vierseit je zwei Ecken und die beiden Schnittpunkte ihrer Verbindungslinie mit den beiden anderen Diagonalen vier harmonische Punkte bilden* (Fig. 264a). Der Beweis wird durch Vergleichen der Figur mit einer speziellen Zentralprojektion derselben geführt, nämlich mit einer solchen, bei der sich zwei Punkte der Figur ins Unendliche projizieren (Fig. 264b). Bei dieser Projektion wird die Entfernung zweier im Endlichen liegenden Eckpunkte durch die betreffenden beiden Diagonalen in der Mitte und im unendlich fernen Punkte derselben geschnitten. Die beiden Eckpunkte bilden

also mit diesen beiden Diagonalschnittpunkten vier harmonische Punkte. Diese Eigenschaft der genannten vier Punkte ist aber unabhängig von der durch Projektion hervorgerufenen speziellen Lage, gilt also auch für das vollständige Vierseit mit sechs im Endlichen liegenden Eckpunkten.

Dieser Satz läßt sich dazu verwerten, um *zu drei gegebenen Punkten einer Punktreihe den vierten harmonischen nur mit Hilfe eines Lineals zu konstruieren.* Es sei noch bemerkt, daß der Satz gewöhnlich am Schlusse der euklidischen Geometrie recht mühsam bewiesen wird. Der Grund hierfür ist darin zu suchen, daß Euklid zu seinen Beweisen nur die Verwandtschaften Kongruenz, Ähnlichkeit und Flächengleichheit benutzt, daß also der Beweis eines Satzes, dessen Natur entschieden auf die Verwandtschaft der Kollineation hinweist, nur unter Benutzung der dem Euklid bekannten Verwandtschaften unnatürlich und daher schwerfällig ausfallen muß.


Fig. 264 a.

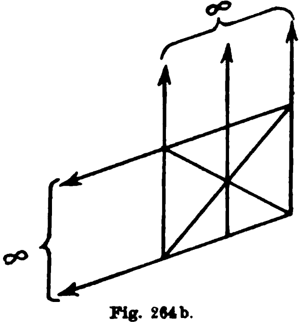


Fig. 264 b.

IV. Teil.

Kurven.

X. Kapitel.

Ebene Kurven.

84. Begriff der ebenen Kurve. *Eine ebene Kurve wird durch Bewegung eines Punktes in einer Ebene erzeugt.* Damit sie einer mathematischen Behandlung fähig sei, muß die Bewegung des sie erzeugenden Punktes nach einem bestimmten, mathematisch ausdrückbaren Gesetze derart verlaufen, daß in keinem Momente der Bewegung ein Zweifel über die unmittelbar folgende Lage des Punktes herrscht. Ist das Bewegungsgesetz eines Punktes gegeben, so kann man eine beliebige An-

zahl von Lagen des Punktes konstruieren. Unter der Aufgabe: eine Kurve zu ermitteln, versteht man also, ein Gesetz zu finden, durch welches einem Punkte vorgeschrieben wird, sich auf der gesuchten Kurve zu bewegen. Dieses Gesetz wird am besten mit den Hilfsmitteln der analytischen Geometrie durch eine Gleichung in x und y ausgedrückt. Kann aus der Gleichung nicht direkt eine geometrische Konstruktion einzelner Kurvenpunkte abgeleitet werden, so müssen einzelne Punkte durch Berechnung von y zu einzelnen Werten — etwa 0, 0,5, 1, 1,5 usw. — von x bestimmt werden. Hat man einzelne Kurvenpunkte konstruiert, so verbindet man dieselben nach später anzugebenden Gesichtspunkten.

85. Die Tangente. Dreht man eine Sekante einer Kurve um einen ihrer Schnittpunkte, bis der nächstbenachbarte Schnittpunkt mit dem Drehpunkte zusammenfällt, so ist insofern eine Grenzlage der Sekante erreicht, als bis dahin der Schnittpunkt immer auf derselben Seite vom Drehpunkt blieb, während er bei stetigem Weiterdrehen der Sekante über die Grenzlage hinaus auf die andere Seite derselben rückt (Fig. 265). In der beschriebenen Grenzlage heißt die Sekante *Tangente* der Kurve. Eine Tangente hat also mit der Kurve im Berührungspunkte zwei zusammengefallene Punkte gemein; da aber beim Zusammenfallen der beiden Punkte die Richtung, in der dieses geschieht, nicht gleichgültig, die Richtung der durch die beiden Punkte bestimmten Sekante nicht willkürlich geworden ist, so drückt man dieses dadurch aus, daß man sagt: Die beiden Punkte sind (in bestimmter Richtung) einander unendlich nahe gerückt. Dabei stellt man sich die Kurve vor als eine bestimmte Aufeinanderfolge ihrer unendlich nahen Punkte.

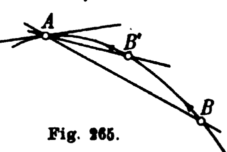
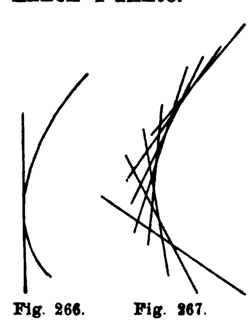


Fig. 265.

Das unendlich kleine Kurvenstückchen zwischen zwei unendlich benachbarten Kurvenpunkten heißt *Kurven-Element*. Dasselbe kann als *geradlinig* angesehen werden, und man kann sich die Kurve als aus ihren Elementen zusammengesetzt vorstellen, d. h. als polygonalen Zug ihrer Elemente. *Die Tangente ist* dann nichts anderes als *die Verlängerung eines Elementes* (Fig. 266), und die Kurve erscheint als von ihren sämtlichen Tangenten umhüllt (Fig. 267). *Sie kann daher auch dadurch erzeugt werden, daß sich eine Gerade gesetzmäßig bewegt und die Kurve dabei umhüllt.*


Fig. 266. Fig. 267.

Diejenige Gerade, die auf der Tangente im Berührungspunkte senkrecht steht, heißt *Normale* (Fig. 268).

Fig. 268.

86. Singularitäten und Besonderheiten. Je nachdem man eine Kurve von der Seite, auf welcher die Tangente eines Punktes liegt, betrachtet, oder von der entgegengesetzten, sagt man, sie sei im Berührungspunkte *konvex* oder *konkav*.

Ein Punkt, in dem ein Wechsel von Konvexität und Konkavität stattfindet, heißt ein *Wendepunkt* oder ein Inflexionspunkt (Fig. 269). In einem solchen Punkte muß daher die Tangente, die dann Wendetangente heißt, von der einen Seite der Kurve auf die andere übergehen, was ohne Unterbrechung der Stetigkeit nur möglich ist, *wenn sie mit der Kurve drei aufeinanderfolgende Punkte gemein hat, oder wenn zwei benachbarte Kurvenelemente in gerader Linie liegen* (Fig. 270). Die Kurve schmiegt sich daher in diesem Punkte besonders innig an ihre Tangente an. Betrachtet man in der Nähe eines solchen Punktes die Kurve als erzeugt durch Umhüllung ihrer Tangenten, so ändert sich in ihm der Drehungssinn derselben: Der Winkel zweier aufeinanderfolgender Tangenten wird immer kleiner, erreicht im Wendepunkt selbst den Wert 0 und wird dann negativ. Die Bewegung der Tangente ist also im Wendepunkte stationär geworden.

Fig. 269. Fig. 270. Fig. 271. Fig. 272. Fig. 273.

Auch der die Kurve erzeugende Punkt kann in seiner Bewegung stationär werden, d. h. seine Geschwindigkeit wird immer kleiner, nimmt den Wert 0 an und wird von hier ab negativ, wobei der Punkt selbst sich rückläufig bewegt. An einer solchen Stelle der Kurve tritt dann eine *Spitze* oder ein *Rückkehrpunkt* auf (Fig. 271).

Es können endlich noch gleichzeitig der die Kurve erzeugende Punkt und die sie umhüllende Tangente in ihrer Bewegung stationär werden. Es entsteht dann ein *Schnabel* (Fig. 272). Wegen des Stationärwerdens der Tangente müssen sich in einem Schnabel die beiden Zweige der Kurve berühren; andernfalls wäre die Kurve aus zwei verschiedenen Kurven zusammengesetzt.

Dadurch, daß eine Kurve eine Schleife bildet, entsteht ein *Doppelpunkt* oder auch ein mehrfacher Punkt, in dem natürlich die Tangenten an die verschiedenen Zweige verschieden sind (Fig. 273).

Eine Kurve kann eine Doppeltangente mit zwei getrennten Berüh-

rungspunkten besitzen; sie hat dann entweder eine *Schleife* oder eine *Undulation* (Fig. 274). Fallen bei letzterer die beiden Berührungspunkte der Doppeltangente zusammen, so entsteht ein *Undulationspunkt.* In diesem steht die Kurve mit ihrer Tangente *in einer vierpunktigen Berührung* (Fig. 275).

Eine Kurve kann so beschaffen sein, daß zu jedem ihrer Punkte ein in bezug auf eine Gerade — die Symmetralachse — symmetrisch gelegener Kurvenpunkt existiert. Durchschneiden die Verbindungslinien je zweier symmetrischer Punkte die Achse rechtwinklig, so heißt

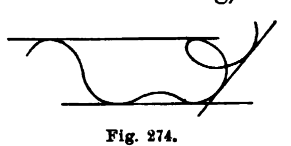


Fig. 274.

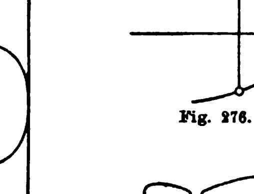


Fig. 275. Fig. 276. Fig. 278.

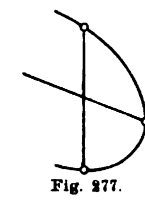
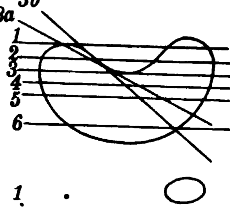


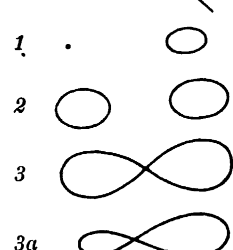
Fig. 277.

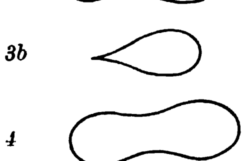


Fig. 279.

die *Symmetrie rechtwinklig* (Fig. 276). Bei schiefem Durchschnitt nennt man sie *schiefe Symmetrie* (Fig. 277). Der Schnittpunkt der Symmetralachse mit der Kurve heißt im ersteren Falle kurzweg *Scheitel*, im letzteren *schiefer Scheitel.*







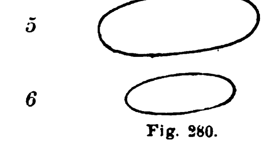


Fig. 280.

Eine Kurve kann in zwei *Zweige* oder *Äste* zerfallen, so daß beide zusammen erst die ganze Kurve ausmachen (Fig. 278). Ein Zweig kann auch zu einem Punkte zusammenschrumpfen, der dann *isolierter Punkt* heißt (Fig. 279).

Von dem *Übergang der einzelnen Singularitäten in einander* kann man sich eine gute Vorstellung machen, wenn man die Schnittkurve einer Fläche mit einer sich stetig verändernden Ebene betrachtet. Als Beispiel diene die Bohnenfläche. In Figur 280 sind die verschiedenen Lagen, der die Bohne schneidenden Ebene und die entsprechenden Schnittkurven mit gleichen Zahlen bezeichnet.

Auch dadurch, daß man das Bewegungsgesetz des Punktes, der eine Kurve erzeugt, stetig ändert, kann man einzelne Singularitäten in andere überführen. Als Beispiel hierfür diene *die gemeine Zykloïde.* Dieselbe wird von einem Punkte der Peripherie eines Kreises beschrieben, wenn dieser

ohne zu gleiten auf einer Geraden entlang rollt (Fig. 281, mittlere Kurve).

Um die Zykloïde zu zeichnen, denkt man sich *die rollende Bewegung in eine drehende und eine fortschreitende zerlegt.* Nach einem einmaligen Umlauf hat sich der Kreisumfang einmal auf der Bahn abgewickelt. Der hierbei zurückgelegte Weg des Kreismittelpunktes ist ebenso groß, also auch gleich $2r\pi$ oder gleich $\frac{22}{7}$ des Kreisdurchmessers. Teilt man diese Strecke in acht gleiche Teile, so geben die Teilpunkte die Lage des Zentrums von Achtels- zu Achtelsumdrehung. Der Radius, an dessen Ende

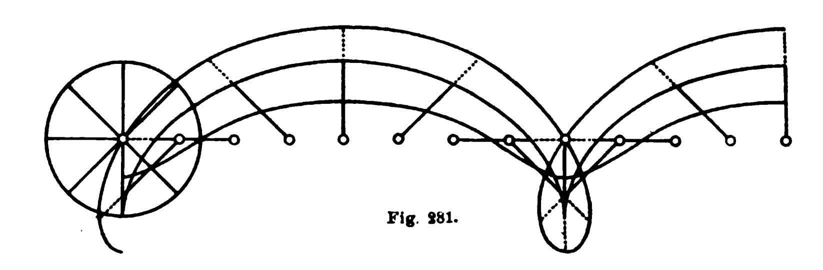


Fig. 281.

sich der erzeugende Punkt befindet, hat sich dabei jedesmal um $\frac{1}{8} \cdot 360^0$ weiter gedreht. Man braucht also nur den Kreis in acht gleiche Teile zu teilen und zu den durch diese Teilpunkte bestimmten Radien der Reihe nach Parallelen zu ziehen, um die Lagen des erzeugenden Punktes nach je einer Achteldrehung des Kreises zu erhalten. Die ganze Kurve besteht aus unendlich vielen solcher Bögen, deren jeder eine Symmetralachse hat. Je zwei benachbarte Bögen stoßen in einem Rückkehrpunkte zusammen.

Die Kurve, die von einem Punkte innerhalb eines Kreises beschrieben wird, wenn dieser wie vorhin rollt, heißt *verlängerte Zykloïde* (Fig. 281, untere Kurve). Ihre Konstruktion bietet nach dem Vorangegangenen keine Schwierigkeit. Die Rückkehrpunkte der gemeinen Zykloïde haben sich hier zu Scheitelpunkten verflacht; die Kurve besteht aus einer Aufeinanderfolge von Undulationen.

Ein Punkt endlich auf der Verlängerung eines Radius beschreibt eine *verkürzte Zykloïde* (Fig. 281, obere Kurve). Statt der Spitzen treten hier Schleifen auf.

87. Die Krümmung ebener Kurven. *Jeder Kreis hat in allen seinen Punkten dieselbe Krümmung, die durch den Wert* $\frac{1}{r}$ *gemessen wird.* In einer Kurve nimmt dieselbe von Punkt zu Punkt ab oder zu. Sie

kann aber in jedem Punkte verglichen werden mit der Krümmung eines Kreises, der sich der Kurve in dem betrachteten Punkte besonders innig anschmiegt. Zieht man nämlich in einem Punkte A einer Kurve die Normale und zeichnet einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf dieser liegt, und der die Kurve in A berührt, also zwei unendlich nahe oder zusammenfallende Punkte mit ihr gemein hat, so wird der Kreis die Kurve im allgemeinen noch in einem Punkte B schneiden (Fig. 282). Bei geeigneter Veränderung des Kreisradius nähert sich B dem Punkte A und fällt bei einer bestimmten Größe mit A zusammen, um bei noch weitergehender Veränderung des Radius auf der anderen Seite von A aufzutreten. In der beschriebenen Grenzlage hat der Kreis außer den beiden unendlich nahen Punkten in A noch einen dritten mit diesem zusammenfallenden Punkt mit der Kurve gemein. Er schmiegt sich daher der Kurve inniger an als jeder andere, der nur zwei zusammenfallende Punkte mit der Kurve gemein hat. Er heißt Oskulationskreis oder *Krümmungskreis* des betrachteten Kurvenpunktes A. Sein Halbmesser ϱ heißt *Krümmungshalbmesser* und die *Krümmung* der Kurve in A mißt man durch den Wert $\frac{1}{\varrho}$. Der Mittelpunkt des Krümmungskreises wird *Krümmungsmittelpunkt* genannt. *Der Krümmungskreis geht im Berührungspunkte von einer Seite der Kurve zur anderen über,* während jeder andere Berührungskreis auf derselben Seite der Kurve bleibt.

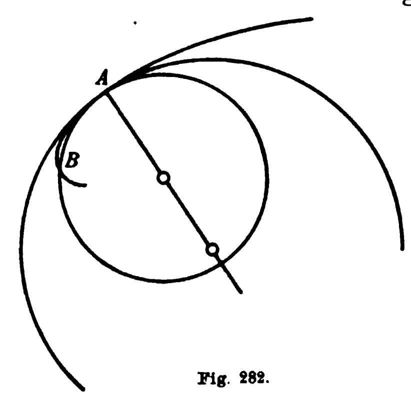


Fig. 282.

In einem Scheitelpunkte fällt gleichzeitig mit dem vorhin betrachteten Punkte B auch noch der symmetrische Schnittpunkt B' mit A zusammen, so daß also *in einem Scheitelpunkte der Krümmungskreis mit der Kurve eine vierpunktige,* noch innigere *Berührung* hat und daher auf derselben Seite der Kurve bleibt (Fig. 283).

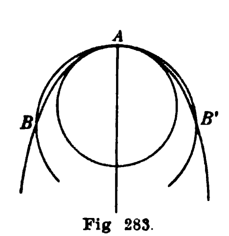


Fig 283.

Auch wenn man sich die Kurve wieder aus ihren Elementen zusammengesetzt denkt, läßt sich die Bedeutung des Krümmungskreises für einen Kurvenpunkt leicht erkennen. Die Krümmung einer Kurve ist nämlich umso größer oder kleiner, je größer oder kleiner die Richtungsänderung des sich bewegenden Punktes an der betreffenden Stelle ist. Die Richtung aber wird durch die jedesmalige Tangente angezeigt,

also die Richtungsänderung durch den Winkel zweier aufeinanderfolgender Tangenten oder Elemente, den man den *Kontingenzwinkel* oder *Krümmungswinkel* nennt (Fig. 284). In einem Kreise sind nun alle Kontingenzwinkel gleich groß (Fig. 285). Umgekehrt entspricht einem bestimmten Kontingenzwinkel ein ganz bestimmter Kreis. Daher kann derjenige Kreis, dessen Kontingenzwinkel ebensogroß ist wie derjenige eines be-

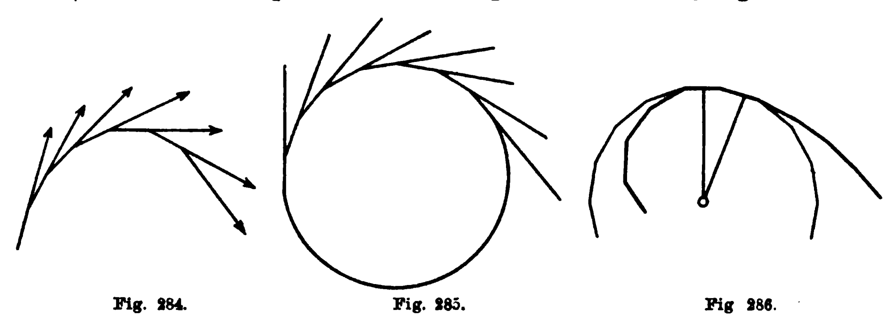


Fig. 284. Fig. 285. Fig 286.

stimmten Kurvenpunktes, so gelegt werden, daß die beiden Elemente des betrachteten Kurvenpunktes mit zwei Elementen des Kreises zusammenfallen (Fig. 286). Dieser *Kreis, der* also *mit der Kurve zwei Elemente gemein hat, ist* wieder *der Krümmungskreis.*

Der Krümmungsmittelpunkt erscheint bei dieser Betrachtung als Schnittpunkt der Mittellote der beiden Elemente oder als Schnittpunkt zweier unendlich naher Normalen.

Fig. 287.

88. Die Evolute. Ein besonders anschauliches Bild von den Krümmungsverhältnissen einer Kurve gewährt *der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte der Kurve: die Evolute.* Da jeder Krümmungsmittelpunkt als Schnittpunkt zweier unendlich benachbarter Normalen aufgefaßt werden kann, so kann *die Evolute durch Umhüllung sämtlicher Normalen* erzeugt werden (Fig. 287).

Interessant ist *der Einfluß einer Singularität einer Kurve auf den Verlauf ihrer Evolute.* Bei einem Scheitel erlangt der Krümmungsradius ϱ entweder ein Maximum oder ein Minimum. Dieses hat einen Rückkehrpunkt der Evolute zur Folge (Fig. 288). In einem Wendepunkte wird $\varrho = \infty$ oder $= 0$. Die Evolute geht dabei von einer Seite der Kurve zur anderen über und zwar bei $\varrho = \infty$ durchs Unendliche

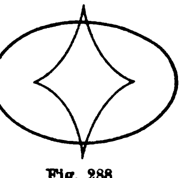


Fig. 288.

hindurch (Fig. 289), während sie bei $\varrho = 0$ die Kurve schneidet (Fig. 290). Ähnlich sind die Verhältnisse bei einem Rückkehrpunkte (Fig. 291 und 292).

Nach der Erklärung der Evolute steht sie mit ihrer Kurve in der Beziehung, daß die Normalen einer Kurve Tangenten ihrer Evolute, und

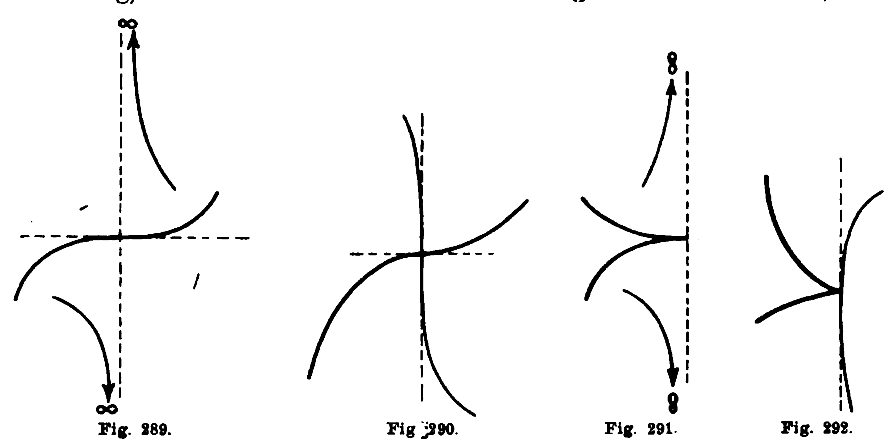
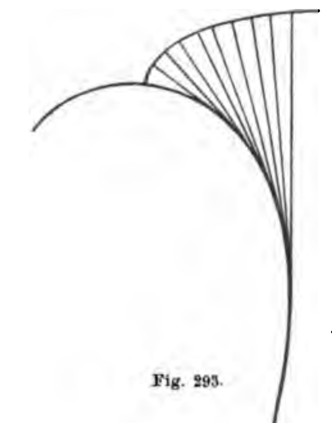


Fig. 289. Fig. 290. Fig. 291. Fig. 292.

Punkte der Evolute Krümmungsmittelpunkte der Kurve sind. Es kann nun die Evolute als ursprüngliche Kurve betrachtet und die andere, die dann *Evolvente* heißt, aus ihr dadurch abgeleitet werden, daß man sich die Evolute als Scheibe denkt, um die ein Faden gewickelt ist. Wickelt man diesen so ab, daß er stets gespannt bleibt, so beschreibt sein Endpunkt die Evolvente, denn dieses Abwickeln kann als sukzessives Drehen um die aufeinanderfolgenden Berührungspunkte der Evolute mit ihren Tangenten aufgefaßt werden (Fig. 293). Diese Vorstellung ist die ursprüngliche; auch die Namen Abgewickelte oder Evolute und Abwickelnde oder Evolvente kommen daher.


Fig. 293.

Denkt man sich den Faden ersetzt durch eine Tangente, die sich auf der Evolute ohne zu gleiten abwälzt, so erkennt man, *daß sich die Evolvente mit einer Spitze, auch Ursprung der Evolvente genannt, auf die Evolute aufsetzt.* Da ferner jeder Punkt der sich wälzenden Tangente eine Evolvente beschreibt, so folgt, daß *jede Kurve unendlich viele Evolventen hat. Dagegen gehört zu jeder Evolvente nur eine ganz bestimmte Evolute.*

89. Die Evolvente. Liegt irgend eine Kurve vor und soll ihre Evolvente gezeichnet werden, so kann dieses durch Rektifikation dadurch

geschehen, daß man mittelst einer kleinen Zirkelöffnung das abgewickelte Stück der Kurve auf einer Anzahl von Tangenten abträgt. Die Zirkelöffnung ist dabei so klein zu wählen, daß das zwischen den Zirkelspitzen liegende Bogenstück als geradlinig angesehen werden kann; sie muß daher desto kleiner sein, je stärker die Krümmung ist.

Als Beispiel möge *die Evolvente eines Kreises* gezeichnet werden (Fig. 294). Um einzelne Punkte derselben zu finden, verfährt man etwa so, daß man auf der Kreistangente im Ursprung der zu zeichnenden Evolvente den Kreisumfang, also $\frac{22}{7}$ des Durchmessers, abträgt und diese Strecke ebenso wie den Kreis selbst in 12 gleiche Teile teilt. In jedem Kreisteilpunkte wird dann die Tangente gezeichnet und auf dieser das betreffende abgewickelte Stück des Kreises, das man auf der Tangente im Ursprung bereits bestimmt hat, abgetragen.

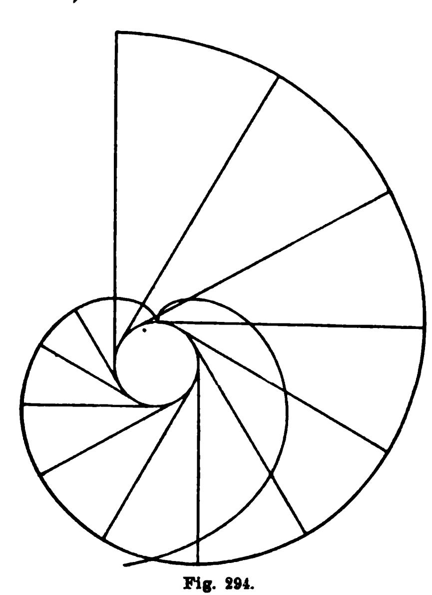


Fig. 294.

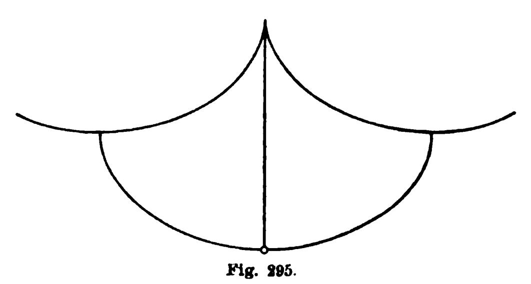


Fig. 295.

Die Kreisevolvente hat unendlich viele Umgänge, die spiralig ins Unendliche verlaufen. Jede Kreistangente ist gemeinschaftliche Normale an sämtliche Umgänge, die auf einer Kreistangente den Abstand $2r\pi$ voneinander haben. Im Ursprung der Kreisevolvente setzt sich ein symmetrischer Zweig an. Ihre Gestalt ist vom Ursprung unabhängig; daher sind alle Evolventen desselben Kreises einander kongruent.

Eine Kurve kann sich durch Evolution selbst reproduzieren. Dieses ist z. B. *bei der Zykloide* der Fall und hat praktisch dadurch eine besondere Bedeutung, daß ein Fadenpendel, das in einer Spitze einer nach unten konvexen Zykloide aufgehängt ist, nicht wie ein gewöhnliches Pendel in einem Kreise, sondern in einer Zykloide schwingt. Ein solches Pendel schwingt stets — unabhängig von der Größe des Ausschlages — isochron.

90. Einteilung der ebenen Kurven. Eine Kurve heißt *algebraisch* oder *transzendent*, je nachdem die Gleichung, durch die sie mit den Hilfsmitteln der analytischen Geometrie in Punktkoordinaten dargestellt wird, algebraisch oder transzendent ist. Eine algebraische Kurve heißt *von der n^{ten} Ordnung,* wenn ihre Gleichung vom n^{ten} Grade ist. Die Kurve hat dann mit einer geraden Linie n Schnittpunkte gemein. Dabei ist es freilich nötig, *von der Analysis den Begriff des Imaginären zu entlehnen.* Denn einzelne Schnittpunkte können für die greifbare Wirklichkeit verschwinden, existieren aber in der Idee fort; sie sind im gewöhnlichen Sinne latent geworden. Ändert man die Lage der schneidenden geraden Linie allmählich, so werden stets *zwei* reelle Schnittpunkte gleichzeitig imaginär, nachdem sie vorher zusammengefallen sind (Fig. 296). — Transzendente Kurven haben mit einer Geraden unendlich viele Schnittpunkte gemein.

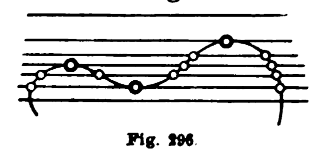


Fig. 296.

Auch wenn eine Kurve durch Umhüllung einer Geraden erzeugt wird, also ihre Gleichung in Linienkoordinaten ausgedrückt ist, heißt dieselbe transzendent oder algebraisch, je nach der Beschaffenheit der Gleichung. Ist eine Kurve als Punktkurve transzendent, so ist sie es auch als Tangentengebilde. Eine algebraische Kurve heißt *von der k^{ten} Klasse,* wenn ihre Gleichung in Linienkoordinaten vom k^{ten} Grade ist. Es lassen sich dann von einem Punkte k Tangenten an die Kurve legen, von denen natürlich auch einige imaginär werden können. — An eine transzendente Kurve lassen sich von einem Punkte unendlich viele Tangenten legen.

Zwischen der Ordnung n und der Klasse k einer Kurve besteht die Beziehung: $n = k(k-1)$. Ist demnach eine Kurve von der zweiten Klasse, so ist sie auch von der zweiten Ordnung, und umgekehrt.

Dieses Einteilungsprinzip der Kurven ist für die projektive Geometrie außerordentlich wichtig. Denn projiziert man eine Kurve mit schneidender Geraden, so projiziert sich jeder Schnittpunkt wieder als Schnittpunkt, d. h. eine Kurve n^{ter} Ordnung projiziert sich wieder als Kurve n^{ter} Ordnung; *die Ordnungszahl ist also eine projektive Eigenschaft. Dasselbe gilt von der Klassenzahl,* da sich eine Tangente stets wieder als Tangente projiziert.

Von einer algebraischen Kurve n^{ter} Ordnung existieren nun *verschiedene Typen.* Von diesen sind die einzelnen nach dem vorigen *aus einander durch Projektion ableitbar* und haben gewisse Eigenschaften, nämlich die projektiven, gemeinsam. *Die einzelnen Typen sind dabei wesentlich durch ihr Verhalten im Unendlichen gekennzeichnet.* Da näm-

lich eine Kurve im Unendlichen nicht aufhören — im Sande verlaufen — kann, denn sonst würde sie ja bei ihrer Projektion in der Fluchtlinie aufhören, also eine Unterbrechung ihrer Stetigkeit haben, so sind nur drei Möglichkeiten vorhanden. Entweder liegt ein Kurvenzweig ganz im Endlichen (hat *elliptischen Charakter*) oder er berührt die unendlich ferne Gerade seiner Ebene (hat *parabolischen Charakter*) oder er schneidet diese (hat *hyperbolischen Charakter*). Im letzten Falle hat die Kurve eine Tangente, deren Berührungspunkt im Unendlichen liegt. Eine solche Tangente in einem unendlich fernen Punkte einer Kurve heißt *Asymptote* (Fig. 297). Diese ist also für die Kurve durchaus nichts Besonderes oder Singuläres. Bemerkt sei noch, daß jede algebraische Kurve eine geschlossene ist oder sich aus geschlossenen Teilen zusammensetzt.

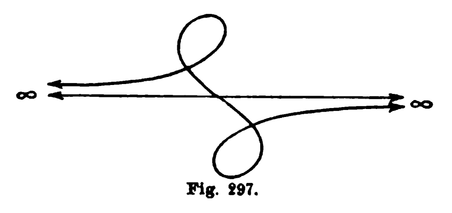
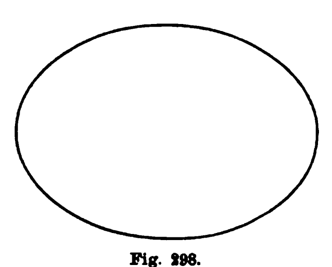
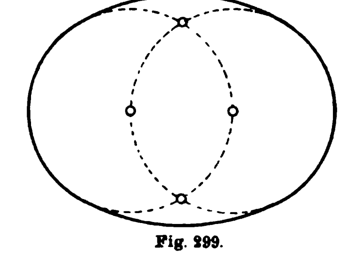


Fig. 297.

91. Das Zeichnen von Kurven. Um eine Kurve möglichst genau zeichnen zu können, muß eine hinlängliche Zahl ihrer Punkte und Tangenten konstruiert werden. Man darf aber nicht annehmen, daß die Genauigkeit um so größer wird, je mehr Punkte und Tangenten bekannt sind. Denn das Auge ist für den schönen Verlauf einer Kurve außerordentlich empfindlich und wird durch eine nicht stetige, also sprungweise Änderung der Krümmung, die es als unschön empfindet, sofort verletzt. Wenn daher zwei schon konstruierte Kurvenpunkte nicht zu weit auseinander liegen, so *interpoliert das Auge* zwischen ihnen weitere Punkte im allgemeinen viel genauer, als solche mit Zirkel und Lineal konstruiert werden können. Wie empfindlich das Auge für eine plötzliche Änderung der Krümmung ist, zeigt deutlich der Vergleich einer Ellipse (Fig. 298) mit einer aus vier Kreisbögen zusammengesetzten ähnlichen Linie, die man Korbbogen (Fig. 299) nennt. Auch für Symmetrie-


Fig. 298.


Fig. 299.

verhältnisse ist das Auge sehr empfindlich; existiert also eine Symmetralachse, so muß diese gezeichnet werden. Man tut daher gut, *zunächst nicht allzuviel Punkte* der Kurve zu konstruieren, unter denen natürlich alle wichtigen, z. B. die singulären, sein sollen. In geeigneten Punkten fügt man noch die *Tangenten* hinzu und schaltet erst später da, wo es notwendig sein sollte, noch weitere Kurvenpunkte und Tangenten ein.

Das Verbinden der einzelnen Punkte unter Berücksichtigung der gezeichneten Tangenten geschieht *aus freier Hand* mit weichem Bleistift. *Keinesfalls darf dabei das Kurvenlineal benutzt werden*, da dabei sehr leicht gänzlich verkehrte Krümmungsänderungen entstehen könnten. Dagegen ist bei sehr langen und wenig gekrümmten Kurven, wie sie im Schiffbau häufig vorkommen, die Anwendung einer biegsamen Latte von Nutzen. Erst wenn die Kurve in Bleistift sorgfältig gezeichnet ist, wird sie mit Tusche ausgezogen. Dieses geschieht entweder gleichfalls aus freier Hand, indem man mit einem Zeichenfederchen strichelnd die Kurve nachzieht, oder indem man unter Benutzung eines Kurvenlineals mit der Reißfeder zeichnet. Ersteres ist bei starken Krümmungen das einzig mögliche Verfahren. — Wird eine Kurve durch Umhüllung ihrer Tangenten erzeugt, so wird die Kurve selbst überhaupt nicht gezeichnet. — Beim Ausziehen größerer Zeichnungen ist es, wenn nicht andere Rücksichten dagegen sprechen, im allgemeinen zweckmäßig, *zuerst die vorkommenden Kreise, dann die Kurven und zuletzt die Geraden zu zeichnen.*

XI. Kapitel.

Kurven II. Ordnung.

92. Die drei Typen der Kurven II. Ordnung. Die weitaus wichtigsten Kurven für den Techniker sind die *Kurven zweiter Ordnung, d. h. diejenigen Kurven, die von einer Geraden in zwei und nur zwei reellen oder imaginären Punkten geschnitten werden.* Nach dem in § 90 Gesagten kann es nur *drei Typen* derselben geben, denn auch die unendlich ferne Gerade kann mit einer solchen Kurve nur zwei reelle, zwei zusammenfallende oder zwei imaginäre Schnittpunkte besitzen. Im ersten Falle heißt die Kurve *Hyperbel*, im zweiten *Parabel* und im dritten *Ellipse.*

Ist ein Typus von diesen dreien bekannt, so sind die andern durch Zentralprojektion desselben ableitbar. Da nun der Kreis zu den

Kurven zweiter Ordnung gehört — er hat einen elliptischen Typus — so *müssen durch geeignete Projektionen des Kreises die übrigen Typen herstellbar sein.*

93. Zentralprojektion eines auf der Zeichenebene senkrecht stehenden Kreises und Erzeugung der drei Typen durch verschiedene Lagen des Projektionszentrums. Wir wollen die Horizontalebene als Zeichenebene benutzen, und es stehe die Ebene des zu projizierenden Kreises senkrecht auf beiden Projektionsebenen, so daß sich der Kreis in beiden Projektionen als gerade Linie darstellt. Wir teilen denselben in zwölf gleiche Teile und projizieren diese zwölf Punkte von einem Projektionszentrum aus auf die Bildebene. Um die zwölf Punkte des Kreises in beiden Projektionen markieren zu können, klappen wir denselben in die Zeichenebene um und übertragen aus der Umklappung die Teilpunkte auf die Projektionen. Das Projektionszentrum möge der Einfachheit halber in einer vertikalen Ebene liegen, die senkrecht auf der Kreisebene steht und durch den Mittelpunkt des Kreises hindurchgeht.

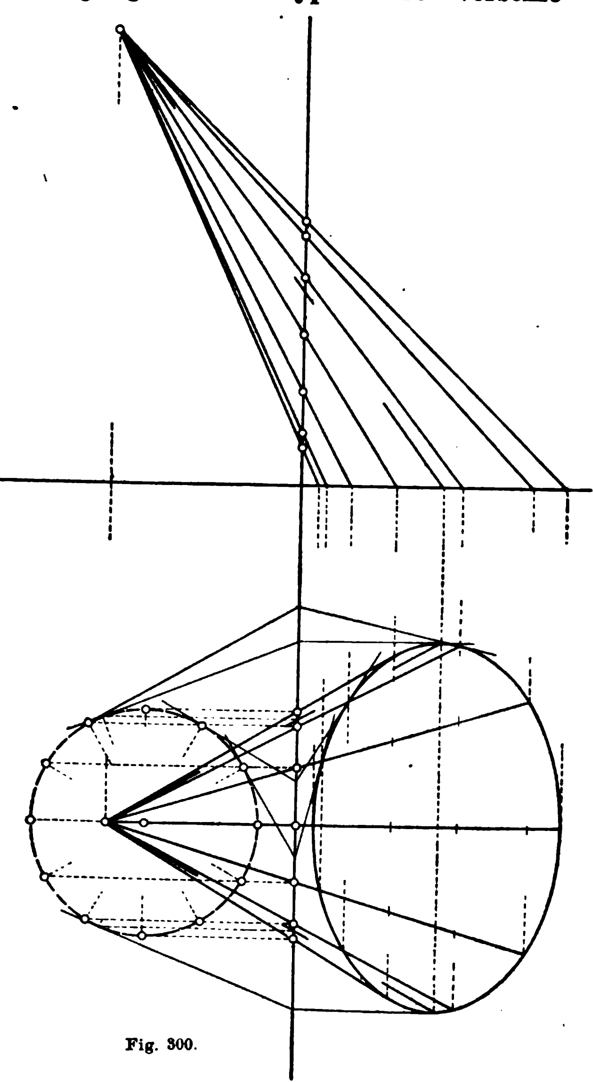


Fig. 300.

Wir wählen *das Projektionszentrum* zunächst *so hoch, daß eine durch*

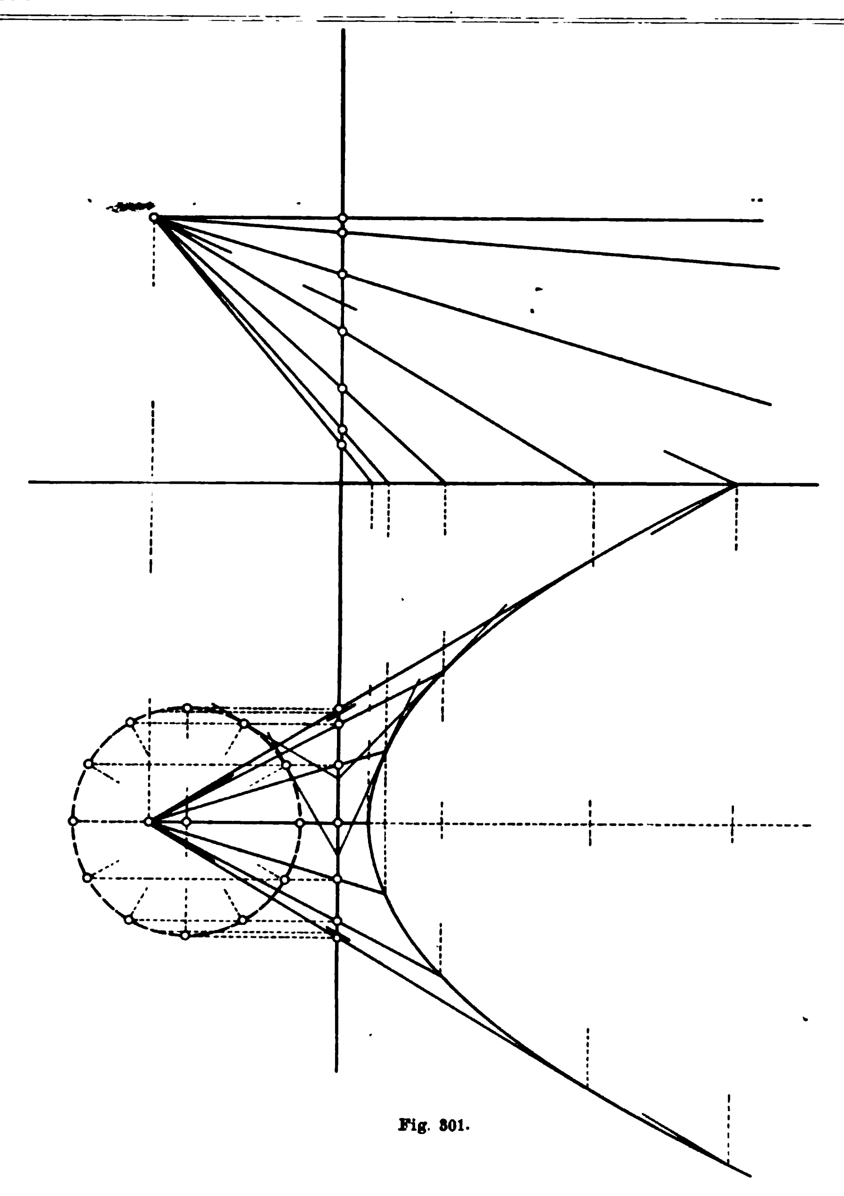


Fig. 301.

dasselbe gelegte Ebene parallel zur Zeichenebene den Kreis nicht mehr schneidet und bestimmen die Schnittpunkte der durch die zwölf Kreispunkte gezogenen Projektionsstrahlen mit der Zeichenebene (Fig. 300). In diesem Falle trifft jeder derselben die Zeichenebene in einem endlichen Punkte, man erhält den allgemeinen *elliptischen Typus* der Kurven zweiter Ordnung, kurz eine Ellipse.

Wählt man zweitens *das Projektionszentrum so hoch, daß die durch dasselbe gelegte Ebene parallel zur Zeichenebene den Kreis in seinem höchsten Punkte berührt* und führt dieselbe Konstruktion aus wie bei der ersten Lage des Projektionszentrums, so projiziert sich der höchste Punkt des Kreises, aber auch nur dieser, ins Unendliche (Fig. 301). Die Projektion der Tangente im höchsten Punkte des Kreises wird dann zur unendlich fernen Geraden, diese ist also Tangente an die Kurve in deren unendlich fernem Punkte. In diesem Falle erhält man den *parabolischen Typus* der Kurven zweiter Ordnung, kurz eine Parabel.

Wählt man endlich *das Projektionszentrum so tief, daß die durch dasselbe gelegte Ebene parallel zur Zeichenebene den Kreis schneidet* und

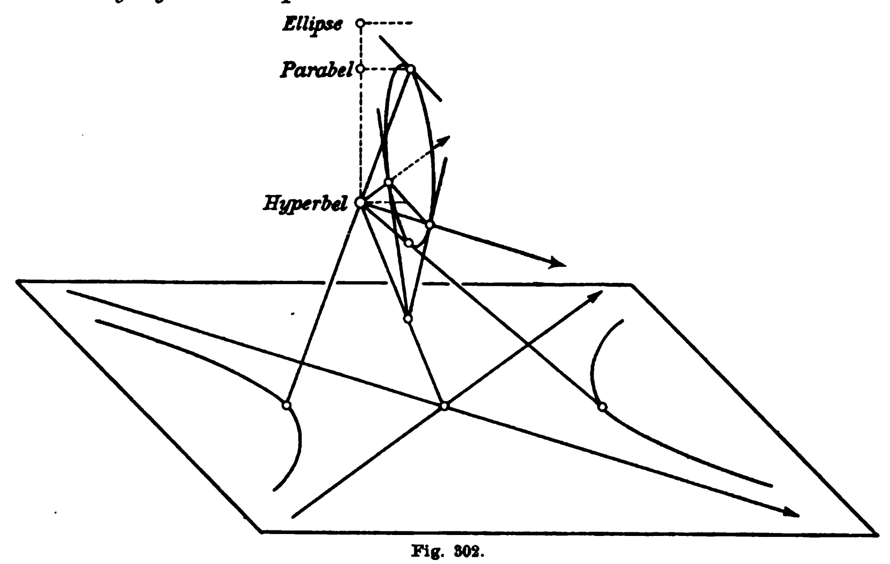


Fig. 302.

in einen oberen und unteren Bogen teilt (Fig. 302), und führt man mit den Kreispunkten, besonders auch mit den Endpunkten der beiden Bögen wiederum dieselbe Konstruktion aus, so projizieren sich eben diese beiden Endpunkte der beiden Kreisbögen ins Unendliche (Fig. 303). Die Verbindungslinie derselben projiziert sich als unendlich ferne Gerade, und die Projektionen der beiden Tangenten in ihnen berühren die Kurve in ihren beiden unendlich fernen Punkten, sind also *Asymptoten*. Man erhält in diesem Falle den *hyperbolischen Typus* der Kurven zweiter Ordnung, kurz die Hyperbel.

Während die Ellipse eine ganz im Endlichen liegende geschlossene Kurve ist, sind Parabel und Hyperbel zwar auch geschlossene Kurven, indessen schließt sich die Parabel erst im Unendlichen, die unendlich

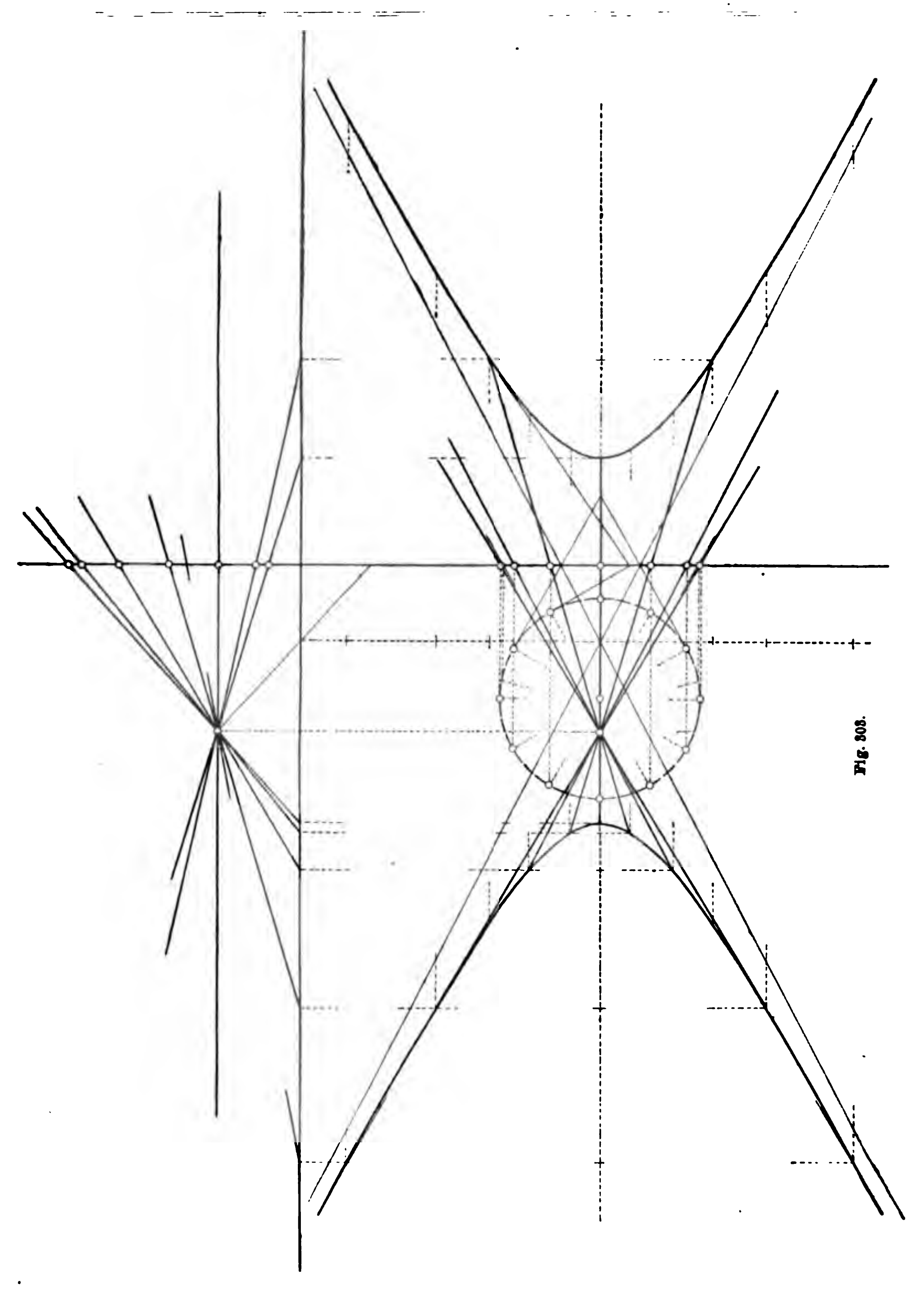


Fig. 303.

ferne Gerade berührend, während die Hyperbel im Endlichen in zwei getrennte Zweige zerfällt, die aber im Unendlichen miteinander zusammenhängen, die unendlich ferne Gerade in zwei Punkten schneidend.

Um den Verlauf der Kurve in der Zeichenebene möglichst korrekt zu erhalten, ist es zweckmäßig in den einzelnen Kurvenpunkten *die Tangenten hinzuzufügen.* Es ist das mit Rücksicht darauf nicht schwierig, daß die beiden Tangenten in einem Kreispunkte und in seiner Projektion sich auf der Umklappungsspur der Kreisebene — der Kollineationsachse — schneiden müssen. Auch berücksichtige man *Symmetrieverhältnisse,* die durch die Achsen der Kurven entstehen und übertrage mit Rücksicht hierauf direkt einzelne Punkte von der einen Seite der Kurve nach der anderen. Zwar wird das Vorhandensein von Symmetrieachsen bei den Kurven II. Ordnung erst später entwickelt, doch darf für das Zeichnen der Kurven der Begriff „Achse“ als bekannt vorausgesetzt werden. Man beachte ferner, daß die äußersten Projektionsstrahlen die Kurve berühren müssen.

Zum korrekten Zeichnen der Hyperbel ist endlich das vorherige Zeichnen ihrer Asymptoten unerläßlich; deren Schnittpunkt ist die Projektion des Schnittpunktes der beiden Kreistangenten, die sich als Asymptoten projizieren; ihre Richtung ist dadurch bekannt, daß sie parallel verlaufen mit denjenigen Projektionsstrahlen, die durch die sich ins Unendliche projizierenden Kreispunkte hindurchgehen (Fig. 302). Als Genauigkeitsprobe kann noch die Bedingung benutzt werden, daß ihr Schnittpunkt in der Mitte zwischen den beiden Scheitelpunkten liegt.

Schließlich ist es nicht unwichtig, sich klar zu machen, *in welcher Weise die drei Typen ineinander übergehen.* Man wähle zu diesem Zwecke das Projektionszentrum etwa wieder da, wo es sich befand, als die Ellipse entstand (Fig. 302), und lasse nunmehr allmählich das Projektionszentrum tiefer und tiefer heruntersinken. Es wird dann die Ellipse immer mehr langgestreckt, bis schließlich einer ihrer Punkte ins Unendliche fällt, sie ist in diesem Momente zur Parabel geworden. Es kann also eine Parabel als Ellipse aufgefaßt werden, deren einer Punkt im Unendlichen liegt. Läßt man das Projektionszentrum noch weiter sinken, so rückt gewissermaßen der unendlich ferne Punkt der Ausgangsellipse über die unendlich ferne Gerade hinaus und erscheint wieder im Endlichen, aber auf der entgegengesetzten Seite. Somit kann eine Parabel auch aufgefaßt werden als eine Hyperbel, deren einer Zweig ins Unendliche gerückt ist.

94. Erzeugung der Kurven II. Ordnung durch ebene Schnitte eines Kreiskegels. Wir wollen zweitens die Kurven II. Ordnung dadurch erzeugen, daß wir das Projektionszentrum und den projizierenden Kreis festhalten, dafür aber die Bildebene andere und andere Lagen einnehmen lassen. Es kann das auch so aufgefaßt werden, daß wir die verschiedenen ebenen Schnitte bestimmen, die bei dem von den Projektionsstrahlen gebildeten Kreiskegel möglich sind. Legt man die Schnittebene so, daß kein Punkt ins Unendliche fällt, so erhält man eine *Ellipse*. Es ist das dann der Fall, wenn eine durch die Spitze des Kegels zu der Schnittebene parallel gelegte Ebene den Kegel, außer in seiner Spitze, nicht schneidet (Fig. 304). Legt man zweitens die Schnitt-

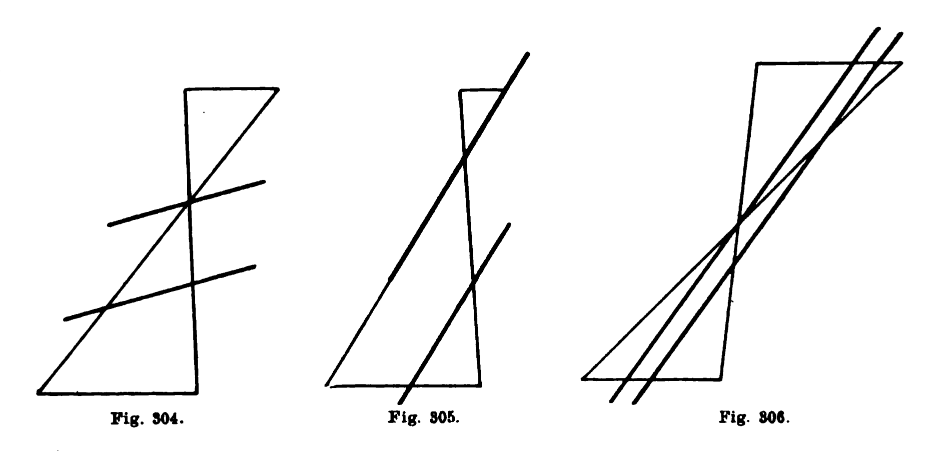
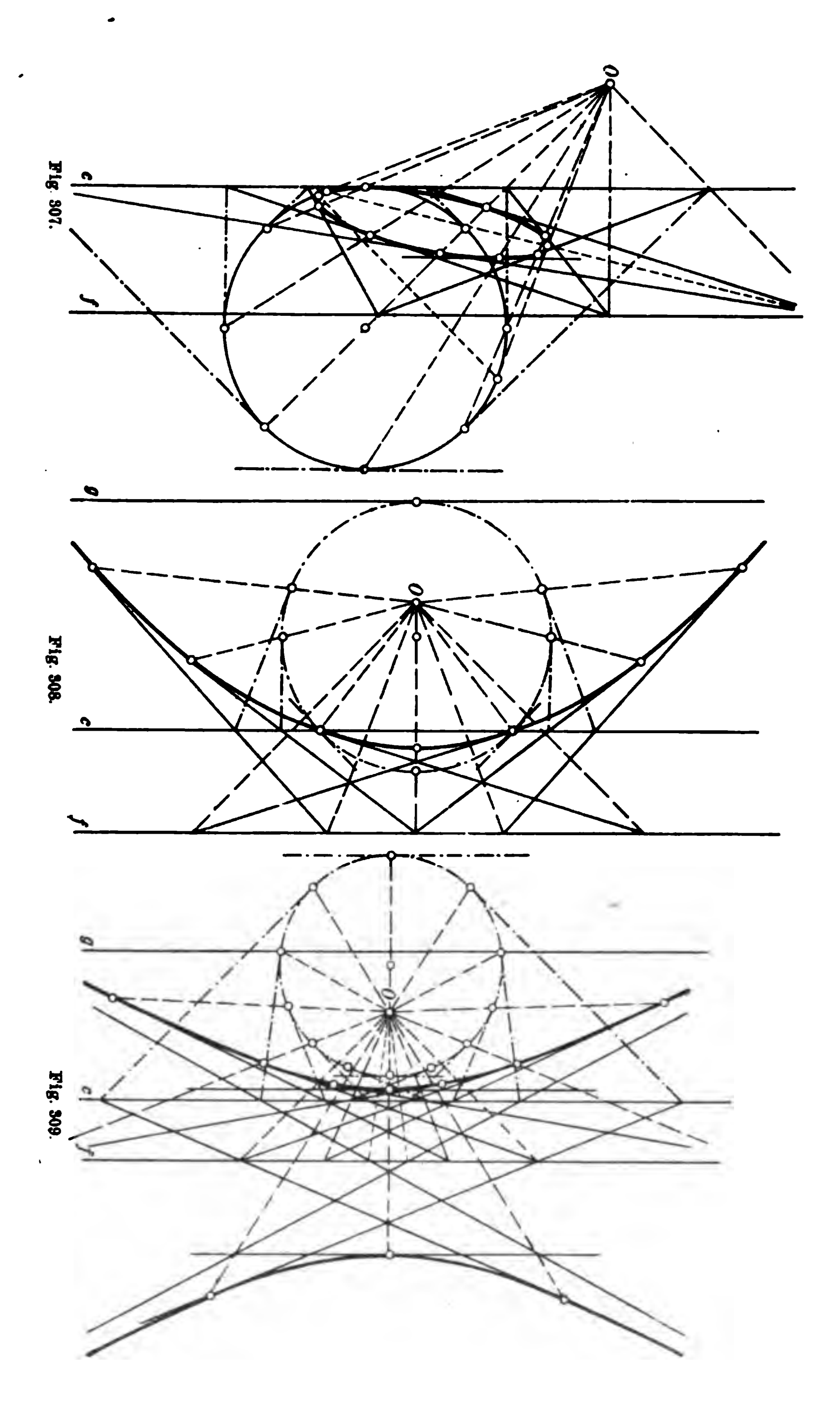


Fig. 304. Fig. 305. Fig. 306.

ebene so, daß eine Parallelebene durch die Kegelspitze den Kegel berührt, so erhält man als Schnittkurve die *Parabel* (Fig. 305), und wenn man endlich den Kegel so schneidet, daß die zur Schnittebene parallele Ebene durch die Spitze den Kegel schneidet, so erhält man die *Hyperbel* (Fig. 306). Die beiden Zweige derselben entstehen dadurch, daß außer dem eigentlichen Projektionskegel auch dessen *Scheitelkegel* geschnitten wird.

Da sich alle Typen der Kurven II. Ordnung als ebene Schnitte eines Kreiskegels ergeben, andererseits auch jeder Schnitt eines Kreiskegels eine Kurve II. Ordnung ist, so bezeichnet man dieselben auch als Kegelschnitte.

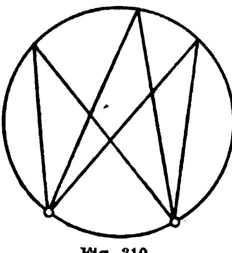
Auch hier bietet die deskriptive Ausführung keine Schwierigkeiten. Der Kreis wird dabei zweckmäßig in der Horizontalebene liegend gewählt; indessen ist die Konstruktion umständlicher und infolge häufigen Auftretens langer Schnitte weniger genau.

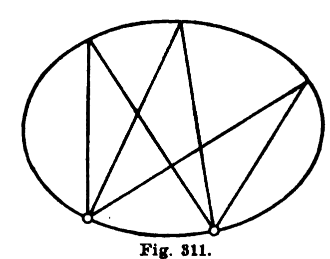

Fig. 307.
Fig. 308.
Fig. 309.

95. Erzeugung der Kegelschnitte durch kollineare Abbildung eines Kreises. Endlich wollen wir zur Darstellung der drei Typen der Kegelschnitte ein ebenes Kollineationssystem benutzen, in welchem wir den Kreis erstens die Gegenlinie nicht schneiden lassen — die kollineare Abbildung desselben ist dann eine *Ellipse* (Fig. 307) —, zweitens die Gegenlinie berühren — man erhält die *Parabel* (Fig. 308) — und drittens die Gegenlinie schneiden lassen — es entsteht eine *Hyperbel* (Fig. 309). Die Konstruktion erfolgt in allen drei Fällen durch kollineare Abbildung einzelner Tangenten und ihrer Berührungspunkte. Die Ausführung im einzelnen ist bereits in § 79 mitgeteilt.

96. Erzeugung der Kegelschnitte durch projektive Strahlenbüschel und der Satz des Pascal. In den folgenden Paragraphen wollen wir *die wichtigsten Eigenschaften der Kegelschnitte* kennen lernen, *die allen drei Typen gemeinsam sind.* Da sie infolgedessen projektive Eigenschaften sind, müssen sie *ableitbar* sein *aus bekannten Eigenschaften des Kreises.*

Wir wollen zunächst von der ausgezeichneten Eigenschaft des Kreises ausgehen, daß die Peripheriewinkel über demselben Bogen alle einander gleich sind. Betrachtet man die Endpunkte des Bogens als die Zentren zweier Strahlenbüschel, so kann man diesen Satz auch in der Form aussprechen, die Punkte eines Kreises werden von irgend zweien seiner Punkte durch kongruente Strahlenbüschel projiziert (Fig. 310). Daraus ergibt sich sofort für jeden Kegelschnitt der äußerst wichtige Satz:


Fig. 310.


Fig. 311.

Die Punkte eines Kegelschnittes werden von irgend zweien seiner Punkte durch projektive Strahlenbüschel projiziert. Das kann man auch in der folgenden Form aussprechen:

Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier projektiver Strahlenbüschel liegen auf einem Kegelschnitt oder kurz, *zwei projektive Strahlenbüschel erzeugen einen Kegelschnitt* (Fig. 311).

Faßt man diese Erzeugungsweise als Definition der Kegelschnitte auf, so geht daraus unmittelbar hervor, daß die so erzeugten Kurven von der II. Ordnung sein müssen.

Da zwei projektive Strahlenbüschel durch drei Paare entsprechender Strahlen so bestimmt sind, daß zu jedem weiteren Strahle des einen Büschels der entsprechende Strahl des anderen eindeutig feststeht, so folgt weiter, *daß jeder Kegelschnitt durch fünf Punkte eindeutig bestimmt ist*, d. h. durch fünf gegebene Punkte läßt sich nur ein einziger Kegelschnitt legen.

Es entsteht sofort die *Aufgabe, zu fünf gegebenen Punkten eines Kegelschnittes einen beliebigen sechsten zu konstruieren*, eine Aufgabe, die in der Technik nicht selten vorkommt. Die Ausführung beruht darauf, daß man zu zwei durch drei Strahlenpaare gegebenen Strahlenbüscheln ein drittes konstruiert, das mit beiden perspektiv liegt (Fig. 312). Seien etwa 0 und 0′ die Zentren zweier projektiver Strahlenbüschel, so lege man

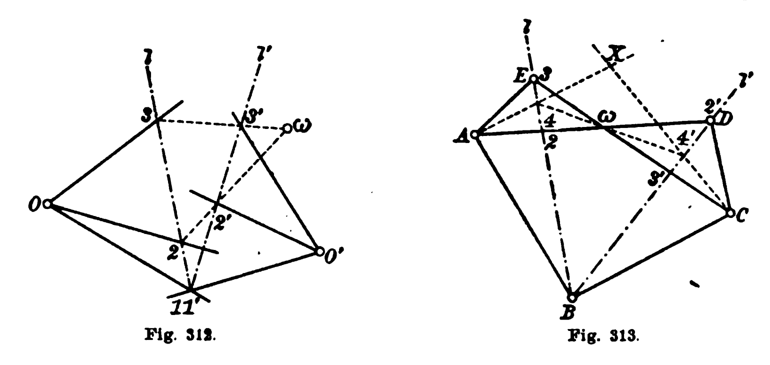


Fig. 312. Fig. 313.

durch den Schnittpunkt 1 1′ zweier entsprechender Strahlen zwei beliebige Linien l und l', welche die beiden Büschel in den Punkten 2 und 3, bzw. 2′ und 3′ schneiden. Der Schnittpunkt ω der Linien 2 2′ und 3 3′ ist das Zentrum des Hilfsstrahlenbüschels, mit Hilfe dessen zu jedem Strahle des Büschels 0 der entsprechende Strahl des Büschels 0′ bestimmt werden kann.

Sind also 5 Punkte $ABCDE$ eines Kegelschnittes gegeben (Fig. 313), so verlege man die Punkte 0 und 0′ etwa nach A und C, den Punkt 1 1′ nach B und die Linien l und l' nach BE, bzw. BD; dann geben die Linien 2 2′ und 3 3′ durch ihren Schnittpunkt wieder den Punkt ω. Ein sechster Punkt X ist dann durch die Punkte 4 4′ eindeutig bestimmt.

Diese Konstruktion ist sehr einfach und zeichnet sich besonders dadurch aus, daß sie nur mit Benutzung eines Lineals ohne Zirkel ausführbar ist.

Läßt man den Punkt X mit C zusammenfallen, so geht die Sekante CX in die Tangente über; es ergibt sich daraus eine sehr einfache *Tangentenkonstruktion*, die ebenfalls linear ist (Fig. 314).

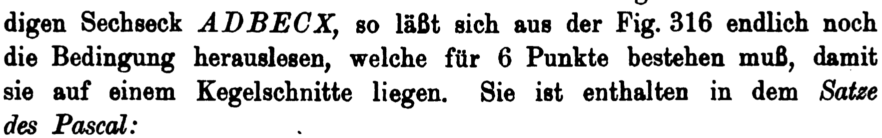
Läßt man den Punkt X wandern, wobei sich die Linie $4\,4'$ um den Punkt ω dreht, und betrachtet man dabei die Veränderung des Konstruktionsmechanismus, insbesondere das Dreieck $X\,4\,4'$, so ergibt sich sofort der *Satz des Mac Laurin:*

Bewegt sich ein veränderliches Dreieck so, daß seine drei Seiten sich um drei feste Punkte drehen, während zwei seiner Ecken auf zwei festen Geraden gleiten, so beschreibt die dritte Ecke einen Kegelschnitt (Fig. 315).



Fig 314. Fig. 315.

Betrachtet man die sechs Punkte $ABCDEX$ und verbindet sie durch einen fortlaufenden geschlossenen Linienzug zu einem vollständigen Sechseck $ADBECX$, so läßt sich aus der Fig. 316 endlich noch die Bedingung herauslesen, welche für 6 Punkte bestehen muß, damit sie auf einem Kegelschnitte liegen. Sie ist enthalten in dem *Satze des Pascal:*



Die drei Schnittpunkte je zweier Gegenseiten eines einem Kegelschnitte eingeschriebenen Sechsecks liegen auf einer Geraden.

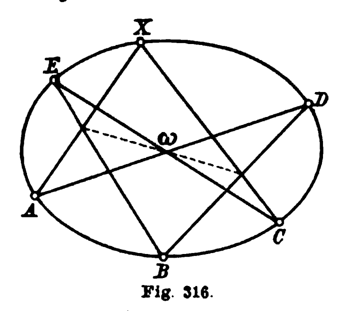


Fig. 316.

An diesen berühmten Satz lassen sich eine ganze Reihe anderer Sätze anknüpfen; wir wollen nur erwähnen, sechs gegebene Punkte lassen sich auf 60 verschiedene Weisen zu einem geschlossenen Sechseck gruppieren. Diese 60 Sechsecke haben 60 Pascallinien; von diesen gehen je 3 durch einen Punkt und von diesen 20 Punkten liegen 15 mal 4 in einer Geraden.

Auch dadurch lassen sich weitere Sätze ableiten, daß man *das Sechseck in ein Fünfeck, Viereck oder Dreieck degenerieren* läßt, *indem man zwei benachbarte Punkte einander unendlich nahe rücken, d. h. zusammenfallen läßt.* Auf diese Weise haben wir bereits die Tangentenkonstruktion (Fig. 314) in einem Punkte eines Kegelschnittes erhalten.

97. Erzeugung der Kegelschnitte durch projektive Punktreihen und der Satz des Brianchon. Wir wollen in diesem Paragraphen genau die reziproken Betrachtungen zu denen des vorigen Para-

graphen anstellen. Wir gehen wieder aus vom Kreise und betrachten zwei feste Tangenten in den Punkten T und T' desselben, die von einer beweglichen Tangente in den Punkten X und X' geschnitten werden (Fig. 317). Man sieht sofort, daß der Winkel TOT' gleich 2 Rechten vermindert um den konstanten Winkel der beiden Tangenten ist. Da aber der Winkel XOX' gleich $\frac{1}{2}TOT'$ ist, so ist dieser für verschie-

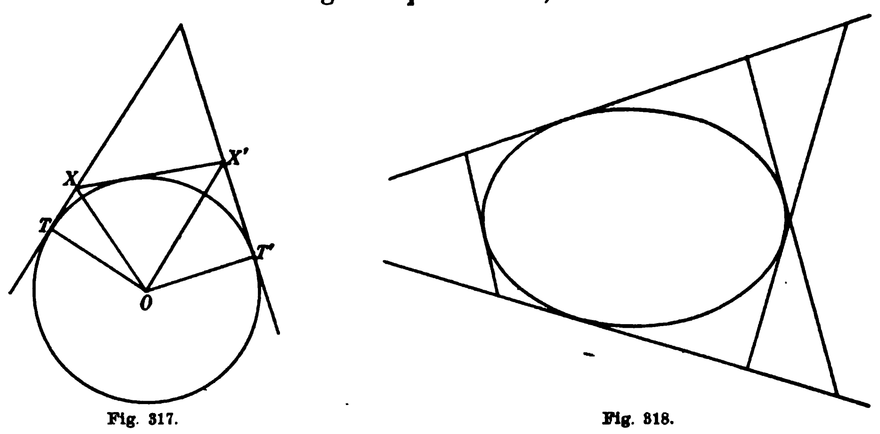


Fig. 317. Fig. 318.

dene Lagen der Tangente XX' gleichfalls konstant; daraus folgt, daß die durch verschiedene Lagen der beweglichen Tangente auf den festen Tangenten erzeugten Punktreihen X und X' von O aus durch kongruente Strahlenbüschel projiziert werden; die beiden Punktreihen sind also projektiv. Daraus ergibt sich für jeden Kegelschnitt der Satz:

Irgendzwei Tangenten eines Kegelschnittes werden von den übrigen Tangenten in projektiven Punktreihen geschnitten (Fig. 318). Dafür kann man auch sagen:

Die Verbindungslinien je zweier entsprechender Punkte zweier projektiver Punktreihen umhüllen einen Kegelschnitt, oder kurz:

Zwei projektive Punktreihen erzeugen einen Kegelschnitt.

Da zwei projektive Punktreihen durch drei Punktepaare so bestimmt sind, daß zu jedem vierten Punkte der einen Reihe der entsprechende der anderen eindeutig festliegt, so ergibt sich unmittelbar, *daß ein Kegelschnitt durch fünf Tangenten eindeutig bestimmt ist*, d. h. es gibt nur einen einzigen Kegelschnitt, der fünf gegebene gerade Linien berührt.

Wieder entsteht sofort *die Aufgabe, wenn fünf Tangenten eines Kegelschnittes gegeben sind, eine beliebige sechste zu konstruieren.* Die Lösung beruht auf der allgemeinen Konstruktion eines vierten Punktepaares auf zwei durch drei Punktepaare gegebenen projektiven Punktreihen dadurch, daß man eine dritte Punktreihe zu Hilfe nimmt, die zu den beiden an-

deren perspektiv liegt (Fig. 319). Es geschieht das dadurch, daß man auf der Verbindungslinie AA' zweier entsprechender Punkte der Punktreihen l und l' die beiden Projektionszentren O und O' beliebig wählt. Durch die Schnittpunkte β und γ der Strahlen OB und $O'B'$, bzw. OC und $O'C'$ wird die dritte Punktreihe λ bestimmt, mit deren Hilfe zu jedem Punkte X der entsprechende Punkt X' ermittelt werden kann.

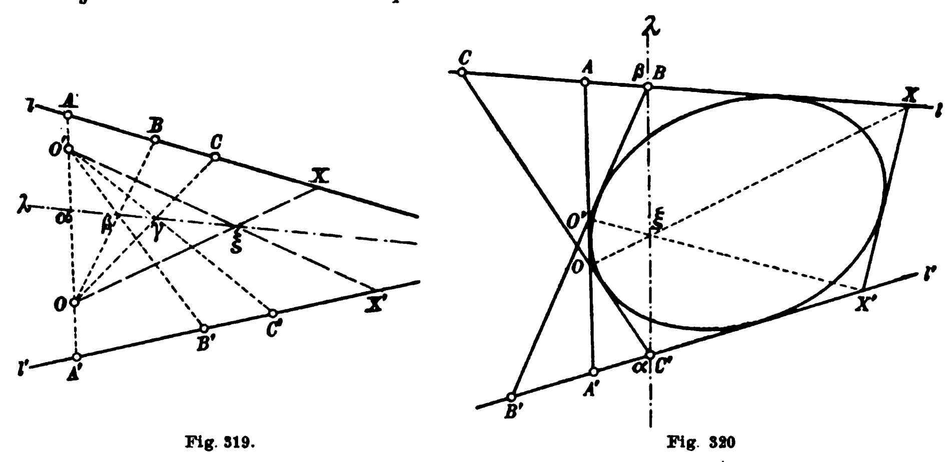


Fig. 319. Fig. 320

Handelt es sich also darum, eine sechste Tangente zu konstruieren (Fig. 320), so verlegt man zweckmäßig die Zentren O und O' in die Schnittpunkte zweier der gegebenen Tangenten, etwa der Tangenten BB' und CC', mit einer dritten AA'; es fällt dann β nach B und α nach C', die Verbindungslinie dieser beiden Punkte ist demnach die Hilfspunktreihe, mit deren Hilfe zu jedem Punkte X der Punktreihe l der entsprechende Punkt X' der Punktreihe l' dadurch ermittelt wird, daß die Strahlen OX und $O'X'$ sich auf BC' schneiden müssen. Die Verbindungslinie XX' ist dann gleichfalls eine Tangente an den Kegelschnitt.

Diese einfache Konstruktion ist wiederum dadurch bemerkenswert, daß sie ohne Zirkel nur mit Hilfe eines Lineals ausführbar ist.

Betrachtet man wieder die Veränderung des Konstruktionsmechanismus beim Wandern des Punktes ξ auf der Geraden BC' (Fig. 321), insbesondere das Dreieck $XX'\xi$, so erhält man den *Satz des Mac Laurin*:

Bewegt sich ein veränderliches Dreieck so, daß die drei Ecken auf drei festen Geraden gleiten, während zwei seiner Seiten sich um zwei feste Punkte drehen, so umhüllt die dritte Seite einen Kegelschnitt.

Faßt man endlich das Sechseck $OO'BXX'C'$ und seine drei Diagonalen ins Auge (Fig 322), so ergibt sich der *Satz des Brianchon*:

Die drei Verbindungslinien je zweier Gegenecken eines einem Kegelschnitt umschriebenen Sechsecks gehen durch einen Punkt.

Dieser Satz bildet das reziproke Gegenstück zu dem Satze des

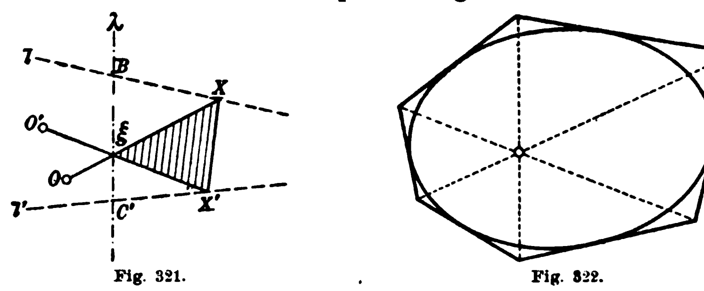


Fig. 321. Fig. 322.

Pascal, an den sich wiederum eine ganze Reihe anderer Sätze anknüpft. Wieder gibt es 60 Sechsecke, zu denen 60 Brianchonpunkte gehören usw.

Auch dadurch, daß man *das Sechseck durch Zusammenfallen zweier Tangenten in eine gerade Linie in ein Fünf-, Vier- oder Dreieck degene-*

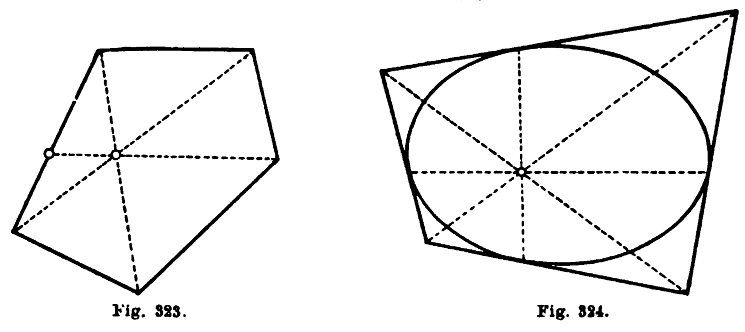


Fig. 323. Fig. 324.

rieren läßt, lassen sich weitere Sätze ableiten, so *gibt der Satz für ein Fünfeck die Konstruktion des Berührungspunktes* für jede Tangente (Fig. 323), der Viereckssatz würde lauten:

In einem einem Kegelschnitt umschriebenen Viereck schneiden sich die Diagonalen und die Verbindungslinien je zweier gegenüberliegender Berührungspunkte in einem Punkte (Fig. 324).

98. Pol und Polare. Der fruchtbarste Begriff für die Eigenschaften der Kegelschnitte ist der Begriff Pol und Polare. *Die polaren Beziehungen sind gleichfalls Lagebeziehungen und daher projektiv*; sie können also auch aus den Eigenschaften des Kreises abgeleitet werden.

Jeder Kreisdurchmesser hat die Eigenschaft, daß er die zu ihm senkrecht stehenden Sehnen halbiert, daß die beiden Tangenten, die par-

allel zu diesen Sehnen verlaufen, ihren Berührungspunkt auf ihm haben, und daß je zwei Tangenten in den Endpunkten einer dieser Sehnen sich auf ihm schneiden (Fig. 325). Da alle diese Sehnen und die zu ihnen parallelen beiden Tangenten durch einen unendlich fernen Punkt gehen, und da die Endpunkte, der Mittelpunkt und der unendlich ferne Punkt einer Strecke vier harmonische Punkte bilden, so kann man diese Eigenschaften auch so aussprechen, der vierte harmonische Punkt zu den Endpunkten einer Sehne und dem unendlich fernen Punkte liegt auf derjenigen Sehne, welche die beiden Berührungspunkte der zu der Sehne parallelen Tangenten miteinander verbindet, kurz auf der *Berührungssehne.* Zentralprojiziert man die ganze Figur, so fällt der unendlich ferne Punkt ins Endliche, die Berührungssehne bleibt in dem Sinne Berührungssehne, als sie die Berührungspunkte der durch den Punkt gehenden beiden Tangenten miteinander verbindet. *Sie hat die Eigenschaften, daß auf ihr der*

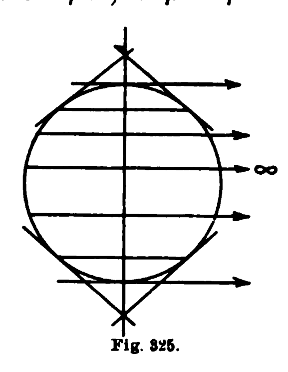


Fig. 325.

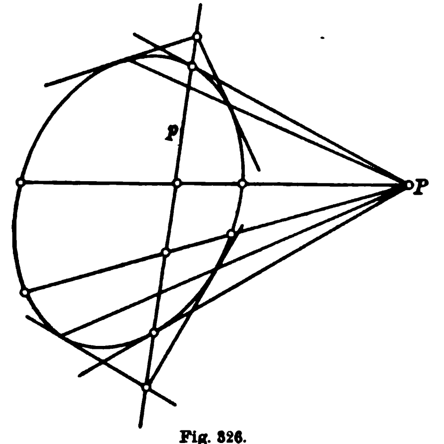


Fig. 326.

vierte harmonische Punkt zu den Schnittpunkten einer durch P gezogenen Geraden mit dem Kegelschnitt und dem Punkt P selbst liegt, und daß ferner auf ihr sich die beiden Tangenten schneiden, die in den Schnittpunkten jeder durch P gezogenen Geraden mit dem Kegelschnitt gezeichnet sind (Fig. 326).

Zu jedem Punkte außerhalb des Kegelschnittes gehört eine Gerade mit der angegebenen Eigenschaft; man nennt den Punkt P den *Pol* der Berührungssehne p und die Berührungssehne p die *Polare* des Punktes P.

Dieselben polaren Beziehungen finden auch dann statt, wenn der Pol innerhalb des Kreises liegt, denn der Mittelpunkt eines Kreises, die beiden Endpunkte eines Durchmessers und der unendlich ferne Punkt desselben bilden vier harmonische Punkte. Alle unendlich fernen Punkte aber von sämtlichen Durchmessern liegen auf der unendlich fernen Ge-

raden, und da die beiden in den Endpunkten eines Durchmessers gezogenen Tangenten einander parallel sind, so liegt ihr Schnittpunkt gleichfalls auf der unendlich fernen Geraden. Mittelpunkt eines Kreises und die unendlich ferne Gerade werden also durch den Kreis in derselben Weise zueinander in Beziehung gesetzt, wie es für einen Pol außerhalb des Kreises und seine Polare der Fall war (Fig. 327).

Fig. 327.

Projiziert man wiederum die ganze Figur, so wird aus dem Kreis ein Kegelschnitt, aus dem Kreismittelpunkt je nach der Lage des Projektionszentrums irgendein Punkt im Innern des Kegelschnittes und aus der unendlich fernen Geraden eine den Kegelschnitt nicht schneidende endliche Gerade. Für diese Gerade p und den zugehörigen Punkt P im Innern des Kegelschnittes bleiben die Eigenschaften bestehen, daß auf jeder durch den Pol gezogenen Geraden durch diesen, die beiden Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt und durch den Schnittpunkt mit der Polaren, vier harmonische Punkte bestimmt werden, und daß die beiden in den

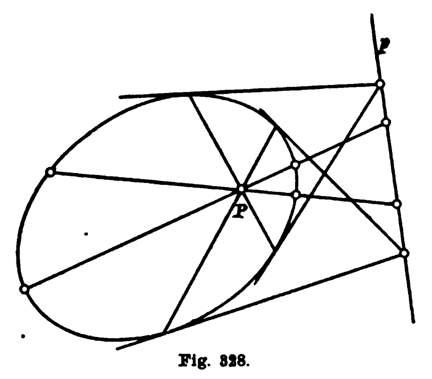


Fig. 328.

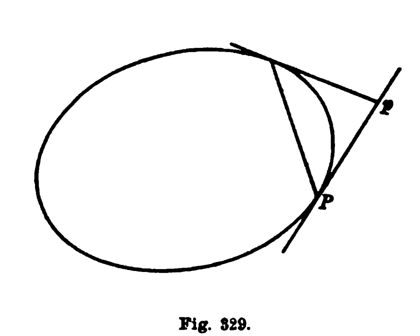


Fig. 329.

Endpunkten einer durch den Pol gehenden Sehne gezogenen Tangenten sich auf der Polaren schneiden (Fig. 328).

Liegt endlich *der Pol auf dem Kegelschnitt selbst, so wird die Polare zur Tangente im Pol* (Fig. 329), denn der geometrische Ort der Schnittpunkte je zweier in den Endpunkten einer durch den Pol gehenden Sehne gezogenen Tangenten ist die Tangente im Pol.

Die Polare schneidet also den Kegelschnitt, berührt ihn oder schneidet ihn nicht, je nachdem der Pol außerhalb des Kegelschnittes, auf ihm oder innerhalb desselben liegt.

Es entsteht sofort die Frage nach einer einfachen *Konstruktion der Polaren zu einem gegebenen Punkte mit Bezug auf einen gegebenen Kegel-*

schnitt. Nach den besprochenen Beziehungen zwischen Pol und Polaren hat man zur Lösung der Aufgabe durch den Punkt nur zwei Sekanten des Kegelschnitts zu ziehen und auf diesen je den vierten harmonischen Punkt zu dem Pol und den beiden Schnittpunkten mit der Kurve auf-

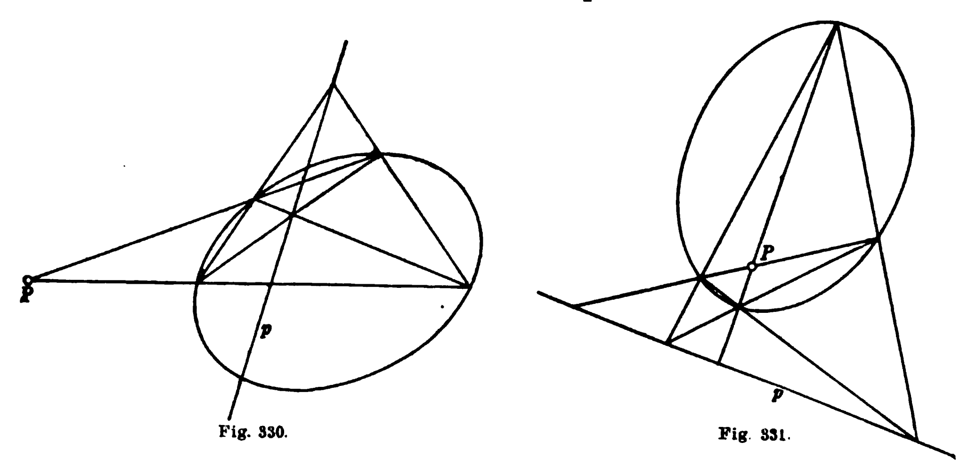


Fig. 330. Fig. 331.

zusuchen. Die Verbindungslinie der beiden vierten harmonischen Punkte ist dann die gesuchte Polare. Die Konstruktion der vierten harmonischen Punkte auf den beiden Sekanten geschieht am einfachsten durch Konstruktion eines vollständigen Vierseits und Benutzung des in § 83 mitgeteilten Satzes. In Fig. 330 ist das vollständige Vierseit für den Fall gezeichnet, daß der Pol außerhalb der Kurve liegt, während er in Fig. 331 innerhalb derselben sich befindet.

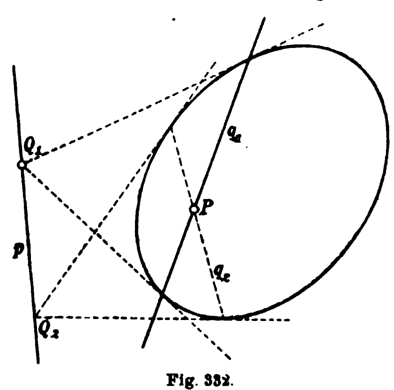


Fig. 332.

Damit ist auch unmittelbar die *Aufgabe* gelöst, *von einem Punkte die beiden Tangenten an den Kegelschnitt zu konstruieren*; man hat nur auf die eben mitgeteilte Weise die Polare des Punktes zu ermitteln; ihre Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt sind dann die Berührungspunkte der beiden Tangenten. Diese Konstruktion ist dadurch bemerkenswert, daß sie ohne Zirkel nur mit dem Lineal ausgeführt wird.

Liegt ein Punkt Q auf einer Geraden p, so geht seine Polare q durch den Pol P von p (Fig. 332).

Wandert der Punkt Q auf der Geraden p, so dreht sich demnach die Polare q um den Pol P, mit anderen Worten: *beschreibt Q eine Punkt-*

reihe auf p, so beschreibt q ein Strahlenbüschel um P. — Hat man zwei Punkte Q_1 und Q_2, so muß der Pol der Verbindungslinie $Q_1 Q_2$ gleichzeitig auf beiden Polaren q_1 und q_2 liegen, d. h. er ist der Schnittpunkt derselben. Damit ist auch die zu der letzten umgekehrte *Aufgabe* gelöst: *es soll der Pol zu einer gegebenen Geraden mit Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt ermittelt werden.* Man hat nur zu zwei beliebigen Punkten der Geraden mittels eines vollständigen Vierseits die zugehörigen Polaren zu ermitteln; ihr Schnittpunkt ist der gesuchte Pol.

99. Das Reziprozitätsgesetz der Ebene. Liegt in der Ebene eine geradlinige Figur und ein Kegelschnitt, so kann man zu jedem Punkte der Figur mit Bezug auf den Kegelschnitt seine Polare ermitteln und zu jeder Geraden ihren Pol. Man erhält dann eine zweite Figur — die sogenannte *reziproke Figur* —, in der jedem Punkte der ersten eine Gerade und jeder Geraden ein Punkt entspricht; aus einer Punktreihe der ersten Figur wird ein Strahlenbüschel in der zweiten und umgekehrt. An Stelle der Verbindungslinie zweier Punkte der ersten Figur tritt der Schnittpunkt zweier Geraden der zweiten. Liegen drei Punkte der ersten Figur auf einer Geraden, so gehen dafür in der zweiten Figur drei Gerade durch einen Punkt.

Es erhellt hieraus, daß *jede Figur, in der nur Eigenschaften der Lage zum Ausdruck kommen, umkehrbar ist;* so ist, wie schon erwähnt, *der Satz des Brianchon die reziproke Umkehrung des Pascalschen Satzes.* Ist also das Reziprozitätsgesetz festgestellt, so braucht der erstere Satz nicht erst bewiesen zu werden, sondern ist gleichzeitig mit dem letzteren als reziproke Umkehrung desselben gesichert.

100. Mittelpunkt, Durchmesser und Achsen der Kegelschnitte. Betrachtet man in der Ebene eines beliebigen Kegelschnittes einen unendlich fernen Punkt als Pol, so sind alle durch ihn gehenden Sekanten parallel (Fig. 333). Die vierten harmonischen Punkte auf denselben liegen dann in der Mitte der Sehnen, und da sie außerdem auf der Polaren zu dem unendlich fernen Punkte liegen müssen, so ergibt sich unmittelbar, *daß die Mittelpunkte paralleler Sehnen eines Kegelschnittes auf einer Geraden liegen.* Diese Gerade heißt *der zu den Sehnen konjugierte Durchmesser.*

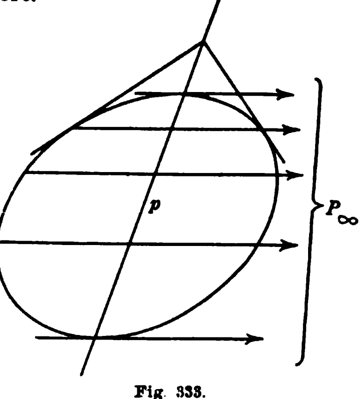


Fig. 333.

In bezug auf ihn sind also die beiden durch ihn getrennten Hälften des Kegelschnittes schief symmetrisch. Die Endpunkte des Durchmessers sind gleichzeitig die Berührungspunkte der beiden zu den Sehnen parallelen Tangenten. Damit ist sogleich *die Konstruktion der beiden Tangenten von vorgeschriebener Richtung* gegeben.

Alle unendlich fernen Punkte liegen auf der unendlich fernen Geraden, deren Pol im Innern des Kegelschnittes liegt (Fig. 334). Durch

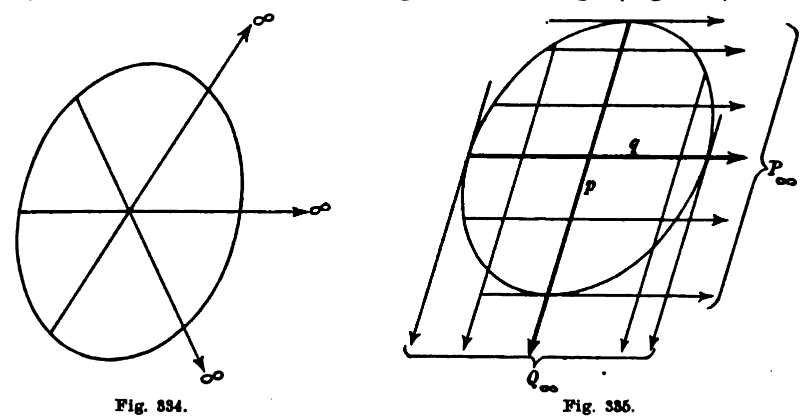
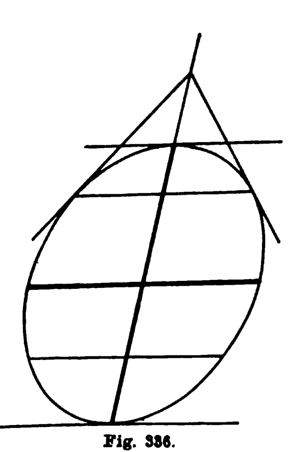


Fig. 334. Fig. 335.

ihn müssen alle Durchmesser gehen, und auch, da der vierte harmonische Punkt im Unendlichen liegt, halbiert werden. *Man nennt den Schnitt- und Mittelpunkt aller Durchmesser den Mittelpunkt des Kegelschnittes,* seine Konstruktion ist durch seine Definition als Pol der unendlich fernen Geraden gegeben.

Ist P_∞ wieder ein unendlich ferner Punkt und Q_∞ der unendlich ferne Punkt der Polaren p von P_∞, so muß die Polare q von Q_∞ durch P_∞ gehen, also parallel zu den durch P_∞ gehenden Sehnen sein (Fig. 335). Hat man also zwei Durchmesser, von denen der eine die parallel mit dem anderen gezogenen Sehnen halbiert, so halbiert auch der andere die zu dem ersteren parallelen Sehnen. Man nennt zwei Durchmesser, die in dieser Beziehung zueinander stehen, *zwei konjugierte Durchmesser* und kann somit den letzten Satz auch in der Form aussprechen: *von zwei konjugierten Durchmessern halbiert jeder die zu dem anderen parallelen Sehnen.*


Fig. 336.

Ferner gelten die Sätze: *die Tangenten in*

den Endpunkten eines Durchmessers sind parallel zu dem konjugierten Durchmesser, und die Tangenten in den Endpunkten einer Sehne schneiden sich auf dem konjugierten Durchmesser (Fig. 336). Die Konstruktion des zu einem gegebenen Durchmesser konjugierten ist durch die Definition desselben als geometrischer Ort der Mittelpunkte aller paralleler Sehnen gegeben.

Verbindet man die Endpunkte eines Durchmessers mit einem beliebigen Kurvenpunkt und zieht zu den Verbindungslinien parallele Durchmesser, so sind dieselben konjugiert, weil jeder die zu dem anderen

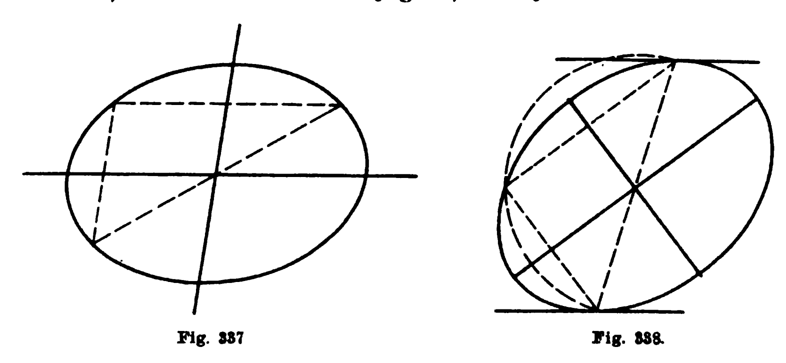


Fig. 337 Fig. 338.

parallelen Sehnen halbiert (Fig. 337). Damit ist auch die Lösung der *Konstruktion desjenigen konjugierten Durchmesserpaares gegeben, das einen vorgeschriebenen Winkel einschließt.* Es interessiert besonders *dasjenige Paar, das einen rechten Winkel einschließt.* Falls ein solches existiert, hat man denjenigen Kurvenpunkt aufzusuchen, dessen Verbindungslinien mit den Endpunkten eines beliebigen Durchmessers einen Rechten einschließen. Derselbe muß demnach gleichzeitig auf einem Halbkreise über dem Durchmesser liegen (Fig. 338). Dieser Halbkreis muß aber den Kegelschnitt schneiden, denn die Tangenten im Endpunkte des Durchmessers sind parallel; der Durchmesser selbst bildet mit der einen einen spitzen, mit der anderen einen stumpfen Winkel, so daß also ein Teil des Halbkreises zwischen den beiden Tangenten, der andere außerhalb liegen muß, während der Kegelschnitt ganz zwischen den Tangenten liegt. *Man nennt die beiden rechtwinklig aufeinander stehenden konjugierten Durchmesser eines Kegelschnittes seine Achsen;* jeder von ihnen ist für den Kegelschnitt eine *Symmetralachse;* die Kurve wird durch ihre Achsen in *vier kongruente oder symmetrische Quadranten* geteilt, so daß man durch die Achsen eine höchst übersichtliche Vorstellung von der Form der Kegelschnitte erhält, wie im nächsten Paragraphen für die drei Typen einzeln gezeigt werden wird.

Die Konstruktion der Achsen eines Kegelschnittes ist durch den Kreis um den Mittelpunkt des Kegelschnittes über einem Durchmesser desselben gegeben.

101. Die Lage des Mittelpunktes und der Achsen bei den drei Typen der Kegelschnitte. Die bisher abgeleiteten Sätze sind auf projektivem Wege gefunden worden und gelten daher für alle drei Typen ohne Rücksicht auf ihre Gestalt. Es mögen nunmehr die Lage des Mittelpunktes und der Achsen für jeden Typus einzeln diskutiert werden.

Die *Ellipse* wird von der unendlich fernen Geraden nicht geschnitten, daher liegt der Pol derselben, also *der Mittelpunkt der Ellipse innerhalb der Kurve.* Die Achsen müssen infolgedessen die Ellipse schneiden, und man bezeichnet als Achsen im besonderen auch die Strecken, die durch die Kurve begrenzt werden, und unterscheidet die *große* und die *kleine*

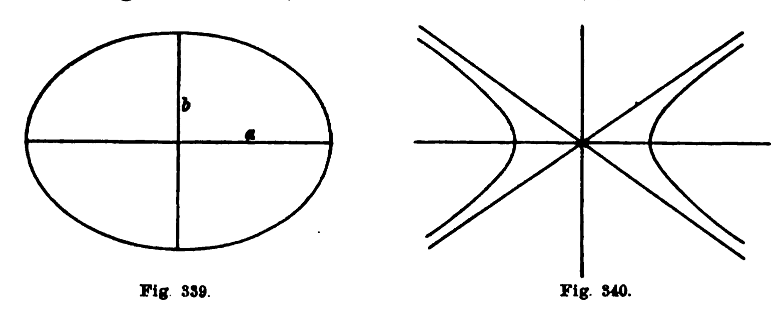


Fig. 339. Fig. 340.

Achse. Die große Halbachse wird mit a und die kleine mit b bezeichnet (Fig. 339). Da die Kurve in bezug auf beide Achsen symmetrisch ist, so besitzt die Ellipse an den Endpunkten der Achse je einen *Scheitel*; an den Endpunkten der großen Achse erreicht die Krümmung dabei ein Maximum, während sie an den Endpunkten der kleinen Achse ein Minimum besitzt. Auch alle übrigen Durchmesser müssen die Kurve schneiden und sind daher reell.

Die *Hyperbel* wird von der unendlich fernen Geraden zweimal geschnitten, folglich muß ihr Pol, d. h. *der Mittelpunkt der Kurve, außerhalb der Hyperbel liegen* (Fig. 340). Es sind infolgedessen von ihm aus zwei Tangenten an die Kurve möglich, welche die Polare des Mittelpunktes — also die unendlich ferne Gerade — als Berührungssehne haben; d. h. aber vom Mittelpunkte aus gehen zwei Tangenten an die beiden unendlich fernen Punkte der Kurve, oder die Hyperbel besitzt zwei *Asymptoten,* die sich im Mittelpunkte der Kurve schneiden. Da durch die Achsen die Kurve in vier kongruente Teile zerlegt wird,

müssen die Achsen den Asymptotenwinkel halbieren. Aus diesem Grunde schneidet nur eine Achse die Kurve, die Hyperbel besitzt also eine *reelle* und eine *imaginäre Achse.* An den Endpunkten der reellen Achse bilden sich aus Symmetriegründen *Scheitel* aus; in diesen erleidet die Krümmung ein Maximum. Alle Durchmesser, die in demjenigen Raume zwischen den Asymptoten liegen, in welchem die Kurve selbst liegt, sind reell, alle übrigen imaginär. Da zwei konjugierte Durchmesser durch die beiden Asymptoten voneinander getrennt sind, so ist immer einer derselben reell, der andere imaginär. Verbindet eine Sehne zwei Punkte desselben Zweiges, so ist sie eine innere, verbindet sie zwei Punkte, die auf verschiedenen Zweigen der Kurve liegen, so ist sie eine äußere Sehne

Die *Parabel* wird von der unendlich fernen Geraden berührt. Der

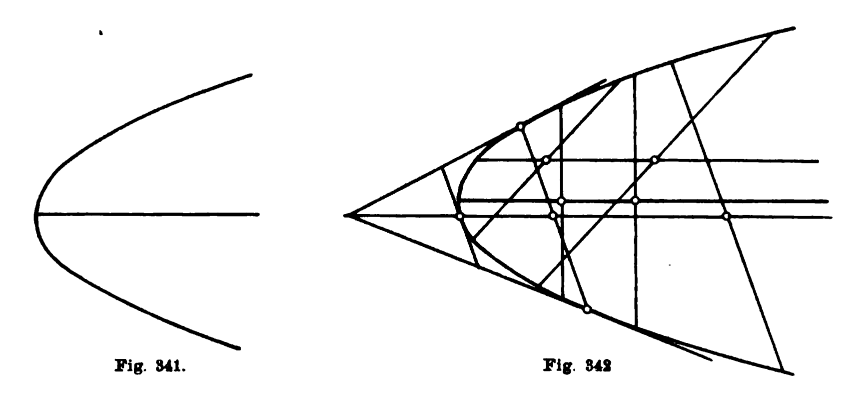


Fig. 341. Fig. 342

Pol dieser ist somit der Berührungspunkt, d. h. der unendlich ferne Punkt der Parabel. Somit liegt *der Mittelpunkt derselben im Unendlichen* (Fig. 341). Eine Parabel kann demnach aufgefaßt werden als eine Ellipse, deren einer Scheitel samt Mittelpunkt ins Unendliche gerückt ist. Wenn auch der Name Mittelpunkt für diese Lage nicht gewöhnlich ist, so ist es doch zweckmäßig den unendlich fernen Punkt der Parabel so zu nennen, weil dadurch alle für die Ellipse angegebenen Lageverhältnisse von Sehnen, Durchmessern und Tangenten sich für die Parabel unmittelbar modifizieren lassen. So folgt aus der unendlich fernen Lage des Mittelpunktes, daß *alle Durchmesser unter sich parallel* sind. Wie man also auch die Richtung einer Schar von parallelen Sehnen wählen mag, alle durch die Mitten paralleler Sehnen bestimmten Durchmesser, also auch eine der *Achsen*, sind parallel (Fig. 342). Da die andere Achse im unendlich fernen Punkte senkrecht auf dieser steht, so ist sie die unendlich ferne Gerade selbst. Die Parabel besitzt also nur *eine endliche Achse,* durch die sie in zwei symmetrische Hälften geteilt wird, so

daß sich an ihrem Schnittpunkt mit der Achse ein *Scheitel* ausbildet. In diesem erleidet die Krümmung ein Maximum. Alle Sehnen senkrecht zur Achse werden von dieser halbiert. Damit ist die *Konstruktion der Achse* sehr einfach gegeben; man hat nur zwei beliebige parallele Sehnen zu halbieren; die Verbindungslinie der Mittelpunkte liefert die Richtung der Achse; durch die Mitte einer zu dieser Richtung senkrechten Sehne muß sie gehen.

Zwei Tangenten in den Endpunkten einer Sehne müssen sich auf dem Durchmesser schneiden, der diese Sehne halbiert. Die Tangente im Schnittpunkt des Durchmessers mit der Parabel ist parallel zur Sehne.

102. Die Ellipse als orthogonale Parallelprojektion des Kreises. Da bei der Parallelprojektion der unendlich ferne Punkt sich wieder ins Unendliche projiziert, so sind *zwei Kurven, von denen die eine eine Parallelprojektion der andern ist,* nicht nur von derselben Ordnung, sondern auch *von demselben Typus. Die Parallelprojektion einer Ellipse ist daher stets wieder eine Ellipse,* und jede Ellipse kann aufgefaßt werden als Parallelprojektion eines Kreises oder als Schnitt eines schiefen Kreiszylinders. Die Ellipse ist also mit dem Kreise nicht nur kollinear, sondern auch *affin* verwandt. Aus dieser Affinverwandtschaft ergeben sich hervorragende Eigenschaften der Ellipse, die diesem Typus eigentümlich sind, wenn auch häufig für die beiden anderen Typen ein Analogon existiert. So ergibt sich unmittelbar, daß sich der Kreismittelpunkt als Ellipsenmittelpunkt projiziert, *daß jeder Kreisdurchmesser ein Ellipsendurchmesser wird, und daß sich zwei aufeinander senkrecht stehende Kreisdurchmesser als zwei konjugierte Ellipsendurchmesser projizieren.* Umgekehrt können zwei konjugierte Durchmesser stets aufgefaßt werden als die Parallelprojektion zweier aufeinander senkrecht stehender Kreisdurchmesser.

Wir wollen im folgenden zunächst *die Ellipse als orthogonale Parallelprojektion des Kreises* untersuchen. Wir wählen den Kreis zunächst so, daß sein Mittelpunkt in der Projektionsebene liegt und er selbst diese in einem Durchmesser schneidet; dann projizieren sich alle Ordinaten, die senkrecht auf diesem Durchmesser stehen, ebenfalls senkrecht zu diesem (Fig. 343), und die Projektionslote bilden mit den Kreisordinaten und ihren Projektionen ähnliche Dreiecke, so daß jede Kreisordinate zu ihrer Projektion im nämlichen Verhältnis steht. Klappt man den Kreis um den betrachteten Durchmesser in die Ebene der Ellipse um (Fig. 344), so *fallen die Kreisordinaten mit den entsprechenden Ellipsenordinaten zusammen und erscheinen in den Ellipsenpunkten alle in konstantem Verhältnis*

geteilt. Der Kreisdurchmesser wird zur großen Achse der Ellipse und der zu ihm senkrecht stehende Durchmesser zur kleinen. *Je zwei Tangenten in entsprechenden Kreis- und Ellipsenpunkten schneiden sich auf der Verlängerung der großen Achse.*

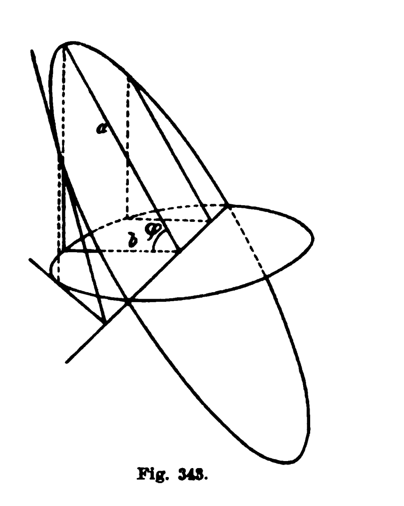


Fig. 343.

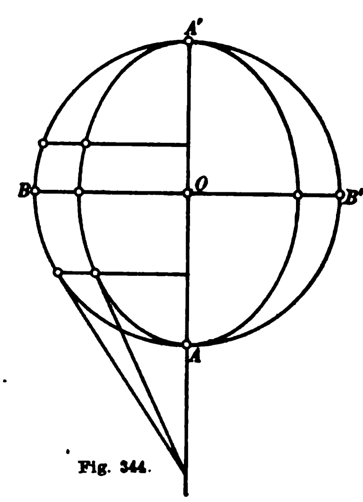


Fig. 344.

Schneidet der Kreis die Projektionsebene nicht in einem Durchmesser, sondern liegt er beliebig im Raume (Fig. 345), so projiziert sich der zur Projektionsebene parallele Kreisdurchmesser in wahrer Größe und als große Achse der Ellipse, während der zu ihm senkrechte Durchmesser sich als kleine Achse projiziert und alle Kreisordinaten sich im selben Verhältnis verjüngen.

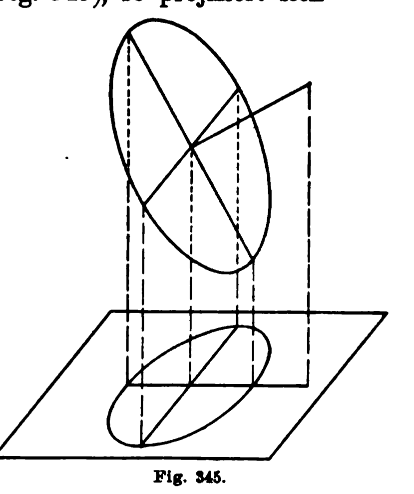


Fig. 345.

Das Verkürzungsverhältnis der Ordinaten ist abhängig von dem Neigungswinkel φ der Kreisebene zur Projektionsebene; ist a die halbe große, und b die halbe kleine Achse, so besteht die *Beziehung* $\frac{b}{a} = \cos\varphi$ (Fig. 343). Ist der Kreisradius und der Neigungswinkel φ bekannt, so kann demnach die kleine Achse der Ellipse aus einem rechtwinkligen Dreieck ermittelt werden. — Umgekehrt kann jede Ellipse aufgefaßt werden als orthogonale Parallelprojektion eines Kreises, dessen Neigungswinkel φ bestimmt ist durch die Beziehung $\cos\varphi = \frac{b}{a}$, und dessen Halbmesser gleich a ist.

Nebenbei sei noch bemerkt, daß der *Flächeninhalt der Ellipse* mit Rücksicht auf § 75 sich aus dem des Kreises ergibt, als

$$a^2 \cdot \pi \cdot \cos\varphi = a \cdot b \cdot \pi.$$

Steht auf der Kreisebene etwa im Kreismittelpunkt eine Gerade senkrecht, so muß sich diese senkrecht zur großen Achse der Ellipse projizieren, da sich ein rechter Winkel, dessen einer Schenkel parallel zur Projektionsebene ist, wieder als rechter Winkel projiziert (Fig. 345). Diese Bemerkung ist *bei axonometrischen Zeichnungen*, in denen Ellipsen vorkommen, *von der größten Wichtigkeit.* Handelt es sich etwa um *die Projektion eines horizontalen Kreises*, so folgt daraus, daß *die große Achse horizontal* liegen muß, *wenn die z-Achse vertikal ist* (Fig 346). Mit Rücksicht hierauf ist die Zeichnung der Ellipse nicht schwierig; für einen gewandten Zeichner genügen die beiden konjugierten Durchmesser, die parallel der x- und y-Richtung verlaufen, das der Ellipse umschriebene Parallelogramm, dessen Seiten parallel zu diesen Richtungen sind, und die Richtung der großen Achse, die Symmetralachse ist, vollständig, um die Ellipse mit genügender Genauigkeit herzustellen.

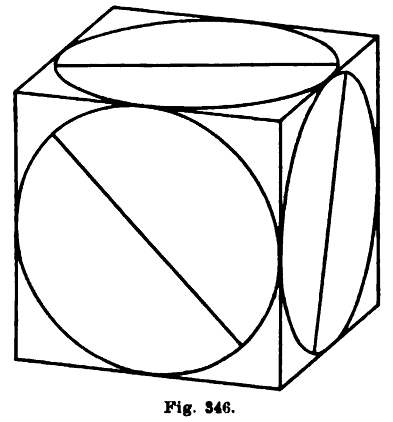


Fig. 346.

Ähnlich gestaltet sich die Herstellung der Projektion eines Kreises parallel der y-z-Ebene und der x-z-Ebene. Die Verhältnisse zeigen sich am klarsten bei der Projektion eines Würfels, in dessen Seitenquadraten Kreise eingezeichnet sind; *die großen Achsen der Ellipsen stehen jedesmal senkrecht auf derjenigen Würfelkante, die auf der betreffenden Ellipsenfläche senkrecht steht.*

Selbstverständlich gilt das Gesagte nur für orthogonal-axonometrische Systeme; gerade hierin zeigt sich eine große Überlegenheit derselben im Vergleich zu schief-axonometrischen Systemen, z. B. zur Kavalierperspektive.

Wir wollen nunmehr eine Ellipse betrachten, deren kleine Achse parallel mit der Projektionsebene ist. Bei sonst beliebiger Lage der Ellipse wird ihre orthogonale Parallelprojektion wieder eine Ellipse sein, wobei die Achsen sich als Achsen projizieren, da sich ein rechter Winkel, dessen einer Schenkel parallel der Projektionsebene liegt, wieder als rechter Winkel projiziert und konjugierte Durchmesser sich wieder als

konjugierte Durchmesser projizieren. Wir denken uns zunächst auch die große Achse parallel der Projektionsebene (Fig. 347), sie projiziert sich dann in wahrer Größe, und drehen nunmehr die Ellipse um ihre kleine Achse; es wird sich dann die Projektion der großen Achse allmählich verjüngen, bis sie gleich der kleinen Achse geworden ist; die Ellipse ist dann zum Kreise geworden.

Bei jeder Lage der Ellipse stehen die einzelnen Ordinaten, die senkrecht auf der kleinen Achse stehen, zu ihren Projektionen in konstantem Verhältnis. Legt man also die Ellipse so auf diejenige ihrer Projektionen, die als Kreis erschien, daß die entsprechenden Ordinaten und die Kurvenmittelpunkte sich decken, so *erscheinen die Kreisordinaten in den Ellipsenpunkten in konstantem Verhältnis verlängert. Je zwei Tangenten*

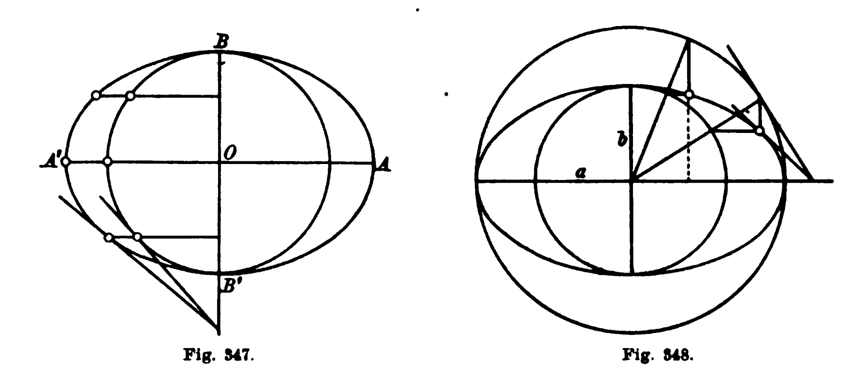


Fig. 347. Fig. 348.

in entsprechenden Kreis- und Ellipsenpunkten schneiden sich auf der Verlängerung der kleinen Achse.

Demnach ergeben sich *zwei einfache Mittel, um einzelne Punkte einer Ellipse zu konstruieren, wenn dieselbe durch ihre beiden Achsen $2a$ und $2b$ gegeben ist;* entweder man geht aus von einem Kreise mit dem Radius a und verkürzt die Kreisordinaten im Verhältnis $b : a$, oder man geht aus von einem Kreise mit dem Halbmesser b und verlängert die Kreisordinaten im Verhältnis $a : b$.

Diese proportionale Teilung geschieht am bequemsten mit Hilfe von zwei konzentrischen Kreisen, die die Radien a, bzw. b besitzen (Fig. 348). Zieht man durch den Endpunkt irgendeines Radius des kleinen Kreises eine Parallele zu einer Achse der Ellipse und durch den Endpunkt des mit dem ersten zusammenfallenden Radius des großen Kreises eine Parallele zur andern Achse, so ist der Schnittpunkt der beiden Parallelen ein Ellipsenpunkt, da in jedem der von einem großen Kreisradius als Hypotenuse und einer Kreisordinate als Kathete gebildeten rechtwink-

ligen Dreiecke die Kreisordinate im selben Verhältnis wie die Hypotenuse, also im Verhältnis der beiden Achsen, geteilt wird. Auch bei dieser Konstruktion lassen sich in den einzelnen Ellipsenpunkten die Tangenten in derselben Weise wie in Fig. 344 und 347 hinzufügen.

Aus dieser Ellipsenkonstruktion läßt sich eine andere ebenso wichtige ableiten. Man ziehe in Fig. 349 durch P eine Linie $\alpha\beta$, die mit or ein gleichschenkliges Dreieck begrenzt; dann ist aus Symmetriegründen $P\beta = os = b =$ const., und ebenso $P\alpha = or = a =$ const. Daraus ergibt sich der Satz: *Bewegt sich eine Strecke so, daß ihre Endpunkte auf den Schenkeln eines rechten Winkels gleiten, so beschreibt jeder Punkt der Strecke eine Ellipse.*

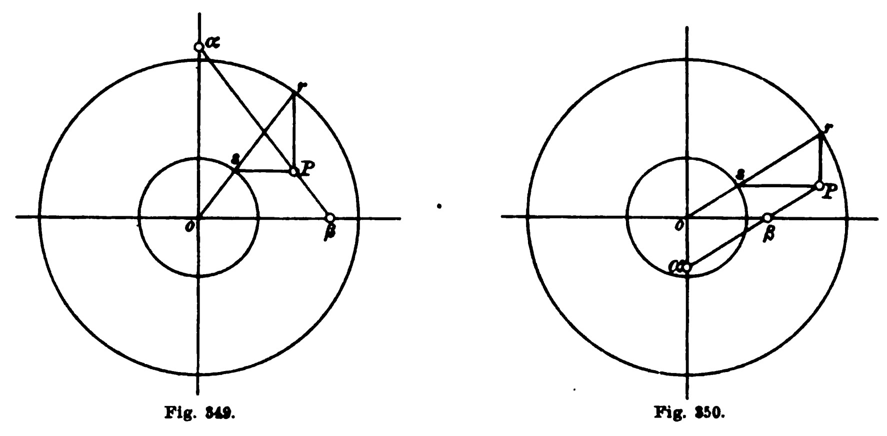


Fig. 349. Fig. 350.

Dieser Satz gilt auch für jeden Punkt, der auf der Verlängerung der Strecke liegt (Fig. 350). Zieht man nämlich durch P eine Parallele zu ro, welche die Achsen in α und β schneidet, so ist in dem Parallelogramm $orP\alpha$ die Strecke $P\alpha = or = a =$ const., und in dem Parallelogramm $osP\beta$ die Strecke $P\beta = so = b =$ const.

Diese Ellipsenkonstruktion ist auch insofern von Interesse, als auf ihr eine Reihe von mechanischen Vorrichtungen zum Zeichnen von Ellipsen, sogenannter *Ellipsenzirkel* oder *Ellipsographen*, beruhen. Die einfachste dieser Vorrichtungen ist ein Papierstreifen, auf dessen Rande drei Punkte markiert sind α, P und β, so daß $\alpha P = a$ und $\beta P = b$ ist (Fig. 351). Bewegt man den Papierstreifen so über das Zeichenblatt, daß die Punkte α und β auf den Schenkeln eines rechten Winkels gleiten, so bestimmt in jeder Lage der Punkt P einen Punkt der Ellipse mit den Achsen $2a$ und $2b$. — Ein anderes Instrument ist der Kreuzzirkel, bei dem in zwei aufeinander senkrecht stehenden Rillen zwei Stifte gleiten, an deren starrer Verbindung der Zeichenstift befestigt ist. — Endlich

sei noch die gleichschenklige Schubkurbel erwähnt (Fig. 352), bei welcher zwei gleich lange, durch ein Gelenk verbundene Stäbe sich so bewegen können, daß das eine freie Ende an der Kante eines Lineals drehbar befestigt ist, während das andere freie Ende an demselben entlang gleiten kann. Jeder Punkt P der am Lineal nicht befestigten Stange beschreibt dann eine Ellipse.

Rollt ein kleiner Kreis, ohne zu gleiten, auf der Peripherie eines größeren im Inneren desselben, so beschreibt jeder Punkt der rollenden

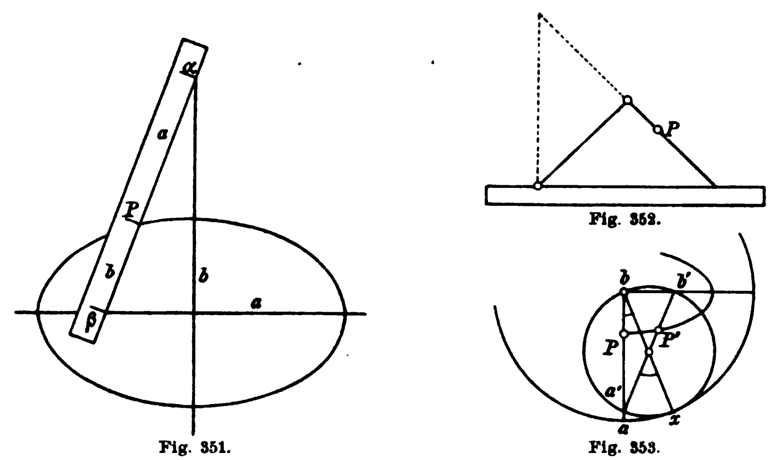


Fig. 351. Fig. 352. Fig. 353.

Kreisfläche eine Kurve, die *Hypotrochoide* genannt wird. *Diese degeneriert dann in eine Ellipse, wenn der Halbmesser des kleinen Kreises halb so groß ist als der Radius des festen* (Fig. 353). Daraus nämlich, daß der Zentriwinkel des großen Kreises halb so groß ist wie derjenige des kleinen, folgt, daß immer das Bogenstück $ax = a'x$ ist. Bei der Bewegung des kleinen Kreises gleiten demnach die Endpunkte seines Durchmessers ab stets auf den Schenkeln eines rechten Winkels, jeder Punkt P des Durchmessers beschreibt also eine Ellipse.

103. Die Ellipse als schiefe Parallelprojektion des Kreises. Stellt man *dieselben Betrachtungen* wie am Beginne des vorigen Paragraphen *bei schiefer Parallelprojektion* an, so sind die Projektionen der Kreisordinaten zwar auch unter sich parallel und stehen alle zu den zugehörigen Kreisordinaten im selben Verhältnis, sie liegen jedoch nunmehr schief zu der Projektion des horizontalen Kreisdurchmessers (Fig. 354). Klappt man die Kreisebene wieder in die Projektionsebene um, so erhält man eine Figur, die sich von Fig. 344 nur dadurch unterscheidet, daß die Ellipsenordinaten nicht mehr senkrecht auf ihrem konjugierten Durch-

messer stehen, sondern alle unter bestimmtem Winkel gedreht sind (Fig. 355). Selbstverständlich ist dieser Durchmesser jetzt nicht mehr die große Achse.

Die Figur 355 ist insofern von Wichtigkeit, als in ihr die Lösung der *Aufgabe* enthalten ist, *eine Ellipse zu konstruieren, wenn von ihr zwei konjugierte Durchmesser ihrer Länge nach und der von ihnen gebildete Winkel gegeben ist.* Man hat zu diesem Zwecke über dem größeren der beiden konjugierten Durchmesser als Durchmesser einen Kreis mit einigen auf diesem Durchmesser senkrecht stehenden Ordinaten zu zeichnen, durch die Fußpunkte dieser Ordinaten Parallelen zu dem anderen der konjugierten Durchmesser zu ziehen und die Länge dieser Ellipsenordinaten so zu bestimmen, daß das Verhältnis derselben zu den zugehörigen Kreisordinaten gleich dem Verhältnisse der beiden konjugierten Durchmesser ist. Es geschieht dies am besten durch Linien, die in den Endpunkten der Kreisordinaten parallel zu der Verbindungslinie der Endpunkte der durch den Mittelpunkt gehenden Kreis- und Ellipsenordinate gezogen werden. *Zum Zeichnen der Ellipse ist das ihr umschriebene Parallelogramm sehr wichtig. Die Tangenten in den einzelnen Ellipsenpunkten können in derselben Weise wie bei orthogonaler Parallelprojektion hinzugefügt werden.*

Fig. 354.

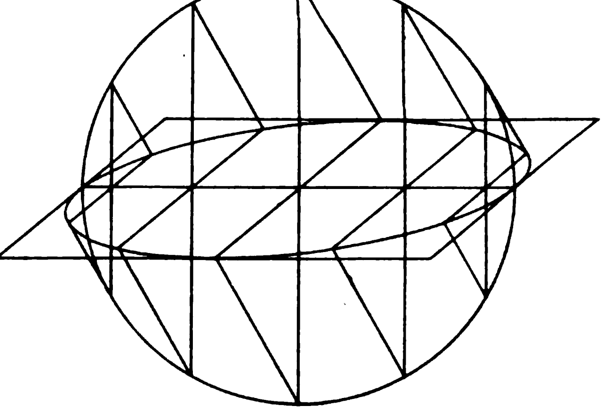


Fig. 355.

Diese Ellipsenkonstruktion findet z. B. bei Herstellung einer Kavalierperspektive eines Kreises Anwendung.

Übrigens *läßt sich die Ellipse aus ihren konjugierten Durchmessern auch direkt zeichnen.* Einzelne Punkte derselben erhält man *als Schnitt entsprechender Strahlen zweier projektiver Strahlenbüschel* (Fig. 356). Zur Konstruktion derselben zeichnet man das der Ellipse umschriebene Parallelogramm, dessen Seiten parallel den gegebenen konjugierten Durch-

messern sind. Einen derselben sowie eine Parallelogrammseite, die ihm nicht parallel ist, teilt man in gleichviel Teile und legt die beiden Projektionszentren in die Endpunkte des nicht geteilten Durchmessers.

Auch durch Umhüllung läßt sich die Ellipse aus zwei konjugierten Durchmessern *unter Anwendung zweier projektiver Punktreihen zeichnen* (Fig. 357). Man zeichnet zunächst wieder das umschriebene Parallelogramm parallel den beiden konjugierten Durchmessern und bestimmt auf zwei anstoßenden Seiten desselben zwei projektive Punktreihen u, bzw. v dadurch, daß man durch einen Punkt x auf einem der beiden Durchmesser Strahlen von einem Endpunkte des anderen und der benachbarten Ecke des Parallelogrammes aus zieht. Die Verbindungslinien je zweier

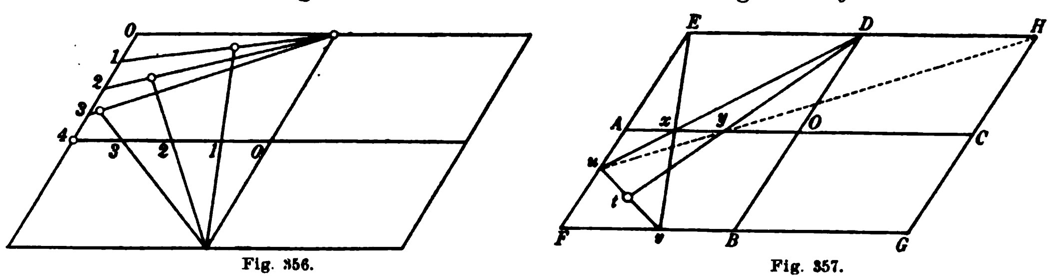


Fig. 356. Fig. 357.

entsprechender Punkte u und v sind dann Tangenten an die Ellipse, die von diesen eingehüllt wird. Auch *der Berührungspunkt* läßt sich noch leicht hinzufügen. Macht man $xy = Ax$ (Fig. 357) und zieht Dy, so bestimmt diese Linie auf der Tangente den Berührungspunkt t. Betrachtet man nämlich das Viereck, das von den vier Tangenten Eu, uv, GH und HE gebildet wird, und wendet auf dasselbe den für das Viereck modifizierten Satz des Brianchon an, nach dem sich die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken und gegenüberliegender Berührungspunkte alle in einem Punkte schneiden, so folgt, daß Dt bestimmt ist durch den Schnittpunkt y von AC und uH. xy ist aber gleich Ax, weil Axy von u aus auf die Parallele EDH projiziert wird.

Die beiden letzten Konstruktionen mit Hilfe projektiver Strahlenbüschel und Punktreihen lassen sich übrigens besonders auch zur Konstruktion einer Ellipse aus ihren beiden Achsen anwenden. Aus dem umschriebenen Parallelogramm wird dann ein Rechteck.

Endlich sei noch *eine direkte Konstruktion der Achsen einer Ellipse aus zwei konjugierten Durchmessern* mitgeteilt (Fig. 358). AB sei die große, CD die kleine Achse einer Ellipse; über AB und CD als Durchmesser seien Kreise gezeichnet, und endlich seien ME_2E_1 und MG_2G_1 zwei aufeinander senkrechte Radien. Bestimmt man aus diesen die beiden

Ellipsenpunkte E und G, so sind EMF und GMH zwei konjugierte Durchmesser, und es ist $\Delta GG_1G_2 \simeq EE_2E_1$. Dreht man nun um M die Punkte MGG_1G_2 um 90^0, so gelangen dieselben nach MJE_1E_2, und es ist EE_1JE_2 ein Rechteck, dessen Diagonale JE in O halbiert wird. Da nun $\frac{OE}{OS} = \frac{OE_2}{OM} = \frac{OJ}{OT}$ ist, so ist

$$SJ = ME_1 = a \quad \text{und} \quad TJ = ME_2 = b.$$

Aus dieser Betrachtung ergibt sich folgende Konstruktion der beiden Ellipsenachsen aus den beiden konjugierten Durchmessern EMF und GMH. Man errichte auf MH ein Lot und mache $MJ = MH$; man verbinde E mit J und schlage um den Mittelpunkt O von EJ einen Kreis mit OM, der die Verlängerung von EJ in S und T schneidet. Dann sind MS und MT die Achsenrichtungen und $SJ = a$, bzw. $TJ = b$ ihre halben Längen.

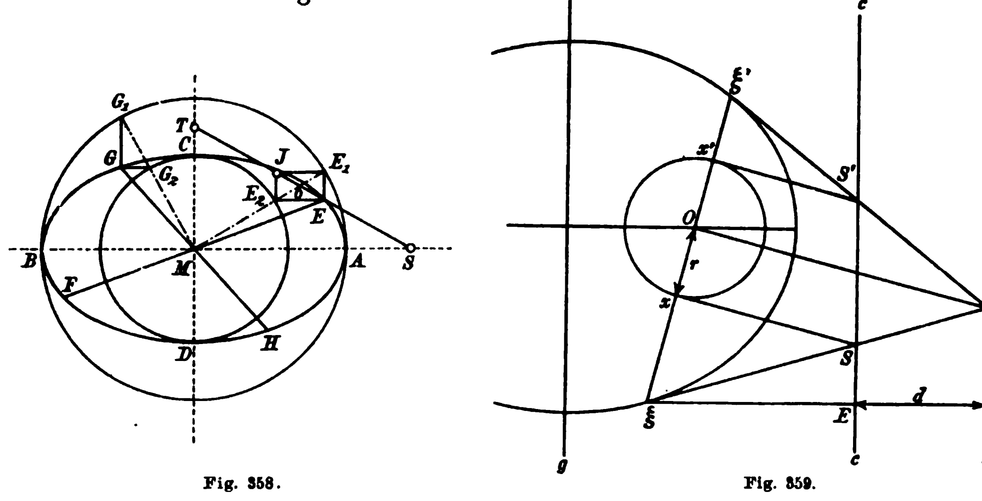


Fig. 358. Fig. 359.

104. Brennpunkte. Wir wählen ein ebenes Kollineationssystem mit dem Zentrum O, der Grundlinie g, der Kollineationsachse c und der Fluchtlinie f (Fig. 359). Mit Hilfe dieses Systems bilden wir einen Kreis, dessen Mittelpunkt in O liegt, ab, und zwar einen beliebigen Punkt desselben, x, dadurch, daß wir die Tangente xS ziehen, den Parallelstrahl dazu, OF, zeichnen, F mit S verbinden und diese Linie mit dem Strahl ox in ξ zum Schnitt bringen; dann ist ξ die Abbildung von x. Ziehen wir noch von ξ aus das Lot ξD auf die Fluchtlinie, so ist

$$\frac{\xi O}{xO} = \frac{\xi F}{SF} = \frac{\xi D}{ED} \quad \text{oder} \quad \frac{\xi O}{r} = \frac{\xi D}{d}$$

d. h.

$$\frac{\mathfrak{x}O}{\mathfrak{x}D} = \frac{r}{d},$$

wenn r der Radius des Kreises und d der Abstand der Kollineationsachse von der Fluchtlinie bedeutet. Verlängert man noch xo bis zu den Schnittpunkten x' und $\mathfrak{x}'$ mit den beiden Kurven, so erhellt sofort, daß $\mathfrak{x}\mathfrak{x}'$ die Polare von F ist; dreht sich $\mathfrak{x}\mathfrak{x}'$ um o, so bewegt sich F auf f; f ist also die Polare von o.

Es gibt also auf einer Achse eines Keyelschnittes innerhalb desselben einen Punkt o, *der zusammen mit seiner Polaren die Eigenschaft hat, daß das Verhältnis der Abstände irgend eines Kurvenpunktes von dem Punkte* o *und seiner Polaren ein konstantes ist.* Einen solchen Punkt nennt man *Brennpunkt*, seine Polare die zugehörige *Direktrix*. Das konstante Abstandsverhältnis ε eines Kurvenpunktes vom Brennpunkt und seiner Direktrix heißt die *Exzentrizität* der Kurve.

Da der Kegelschnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist, je nachdem die Grundlinie g den Kreis um o nicht schneidet, berührt oder schneidet, je nachdem also r kleiner, gleich oder größer als d ist, so *ist die Exzentrizität* ε *bei der Ellipse kleiner, bei der Parabel gleich und bei der Hyperpel größer als 1. — Umgekehrt ist der geometrische Ort eines Punktes, der ein konstantes Abstandsverhältnis von einem Punkte und einer Geraden hat, ein Kegelschnitt und zwar eine Ellipse, wenn dieses Verhältnis kleiner als 1, eine Parabel, wenn es gleich 1, und eine Hyperbel, wenn es größer als 1 ist.*

Aus Fig. 359 ergibt sich sofort noch die wichtige Eigenschaft, die für alle Kegelschnitte gilt, daß *die Verbindungslinie des Brennpunktes mit dem Schnittpunkte der beiden in den Endpunkten einer durch den Brennpunkt gehenden Sehne gezogenen Tangenten senkrecht zur Berührungssehne steht.*

Weitere Brennpunktseigenschaften knüpfen sich an die einzelnen Typen und werden daher für jede derselben einzeln abgeleitet.

105. Brennpunktseigenschaften der Ellipse. Aus Symmetriegründen folgt zunächst, daß auf der großen Achse einer Ellipse innerhalb derselben symmetrisch zu ihrem Mittelpunkte *zwei Brennpunkte* existieren. Die beiden Direktricen stehen auf der großen Achse senkrecht und schneiden diese in zwei Punkten, die gleichfalls symmetrisch zum Mittelpunkte, aber außerhalb der Kurve liegen. Die Entfernung der beiden Brennpunkte $2f$ bezeichnet man als *Brennweite.*

Aus Fig. 360 ergibt sich

$$\varepsilon = \frac{A'F}{A'D} = \frac{AF}{AD} = \frac{A'F - AF}{A'D - AD} = \frac{FF'}{AA'} = \frac{2f}{2a}$$

d. h.

$$\varepsilon = \frac{f}{a}.$$

Demnach *ist die Exzentrizität* ε *der Ellipse gleich der Brennweite dividiert durch die große Achse.*

Weiter ergibt sich

$$\varepsilon = \frac{XF}{XY} = \frac{XF'}{XY'} = \frac{XF + XF'}{XY + XY'} = \frac{XF + XF'}{DD'},$$

oder es ist:

$$XF + XF' = \varepsilon \cdot DD' = \text{const.}$$

D. h. *die Summe der Abstände eines Ellipsenpunktes von den beiden Brennpunkten ist konstant.*

Wendet man diesen Satz auf einen Endpunkt der großen Achse an, so ergibt sich, daß *diese konstante Summe* $= 2a$, d. h. *gleich der großen Achse* ist. Wendet man ihn auf einen Endpunkt der kleinen Achse an,

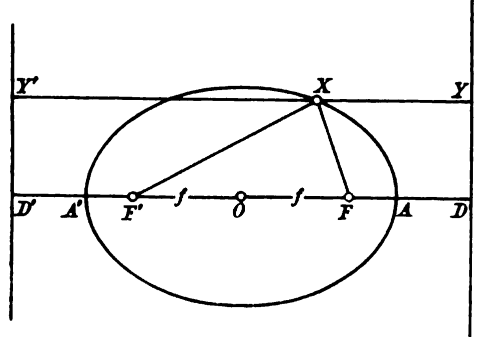


Fig. 360.

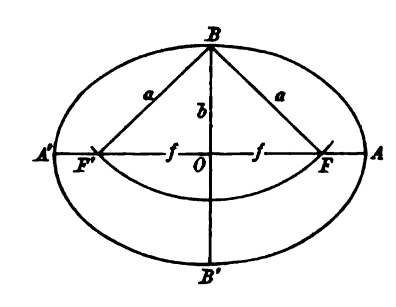


Fig. 361.

so ergibt sich, daß *jeder Brennpunkt von den Endpunkten der kleinen Achse um die halbe große Achse entfernt* ist (Fig. 361). Zwischen den drei Größen a, b und f besteht somit stets *die Beziehung* $f^2 = a^2 - b^2$. Durch je zwei derselben ist also stets die dritte bestimmt und aus einem rechtwinkligen Dreiecke zu ermitteln. Durch zwei derselben ist somit auch eine Ellipse eindeutig bestimmt, und *alle Ellipsen, bei denen das Verhältnis der beiden Bestimmungsstücke dasselbe ist, sind einander ähnlich.* Im besonderen ist also *die Gestalt der Ellipse abhängig von dem Werte der Größe* ε, und zwar degeneriert die Ellipse für $\varepsilon = 0$ in einen Kreis, dessen

Brennpunkte in dem Mittelpunkt zusammenfallen, während sie für $\varepsilon = 1$ in eine doppelt zu rechnende gerade Linie ausartet.

Auf dem Satze von der konstanten Abstandssumme beruht die bekannte *Gärtnerkonstruktion der Ellipse.* Man sticht dabei zwei Nadeln in die Brennpunkte und schlingt um dieselbe und um die Bleistiftspitze einen dünnen, mit den Enden zusammengeknüpften Bindfaden. Führt man den Bleistift so, daß der Bindfaden, ohne sich zu dehnen, stets straff gespannt ist, so beschreibt derselbe eine Ellipse. — *Auch als Schnittpunkte zweier Kreise um die Brennpunkte ergeben sich Ellipsenpunkte, wenn die Summe der Radien* $= 2a$ *ist* (Fig. 362).

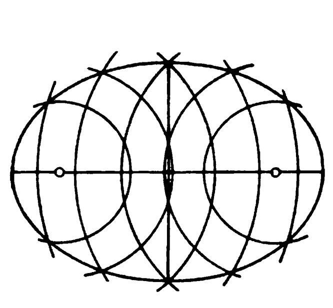


Fig. 362.

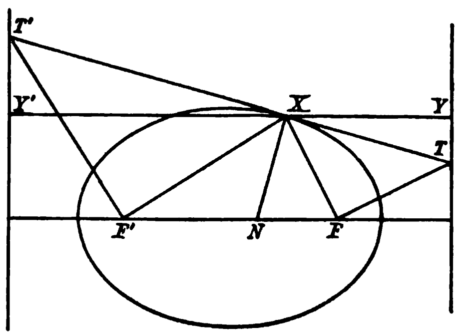


Fig. 363.

Es sei in einem Ellipsenpunkt X die Tangente gezogen, die die beiden Direktricen in T bzw. T' schneidet, sowie die Normale, die die große Achse in N trifft, dann ist (Fig. 363):

$$\frac{FX}{XY} = \frac{F'X}{XY'} \quad \text{oder} \quad \frac{FX}{F'X} = \frac{XY}{XY'} = \frac{XT}{XT'}.$$

Da ferner die Dreiecke FXT und $F'XT'$ rechtwinklig sind, so sind dieselben ähnlich; daraus folgt, daß der Winkel $TXF' = TXF$ ist; und hieraus wieder, daß der Winkel $F'XN = FXN$ ist, d. h. aber *in jedem Ellipsenpunkte halbiert die Normale den Winkel der beiden Brennstrahlen, während die Tangente deren Nebenwinkel halbiert.*

Von dieser Beziehung rührt der Name Brennpunkt her. Denkt man sich nämlich die Ellipse auf ihrer Innenseite spiegelnd, so würden alle Lichtstrahlen, die von einem der Brennpunkte ausgehen, von der Ellipse nach dem andern Brennpunkte hin reflektiert werden.

Auch eine einfache *Tangentenkonstruktion* schließt sich hieran; man halbiert den Winkel, der von den beiden Brennstrahlen des betreffenden Kurvenpunktes gebildet wird, und zeichnet die zu dieser Normalen gehörende Tangente. Es ist diese Konstruktion der in § 96, Fig. 314 mitgeteilten linearen vorzuziehen.

Verlängert man in Figur 364 $F'X$ um $XV = XF$ und zieht FV, so ist das Dreieck FXV gleichschenklig und $F'V = 2a$. Ist U der Schnittpunkt von FV mit der Tangente in X, so ist U, da die Tangente den Winkel bei X halbiert, die Mitte von FV; somit ist

$$OU = \tfrac{1}{2}F'V = a.$$

Betrachtet man U als Fußpunkt des von F auf die Tangente gefällten Lotes, so liegt derselbe demnach auf einem Kreise über der großen Achse als

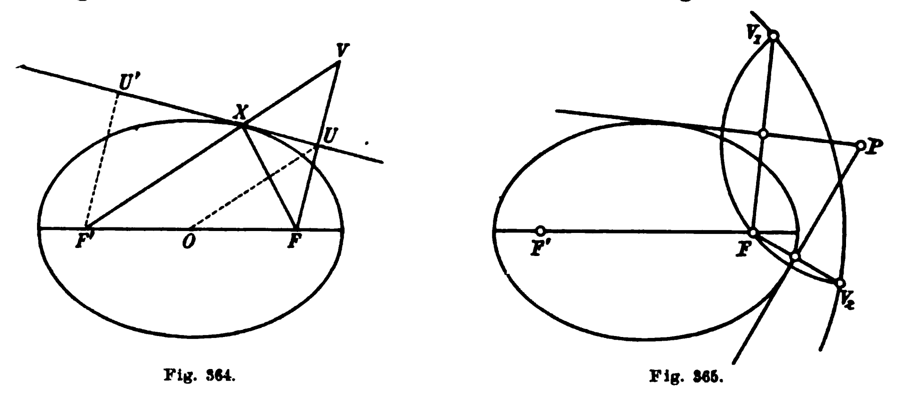


Fig. 364. Fig. 365.

Durchmesser. Ist U' der Fußpunkt des von F' auf die Tangente gefällten Lotes, so gilt für diesen Punkt dasselbe.

Hieraus ergeben sich *zwei wichtige Konstruktionen der Tangenten von einem Punkte P aus an die Ellipse.* Erstens ist der Punkt V bestimmt

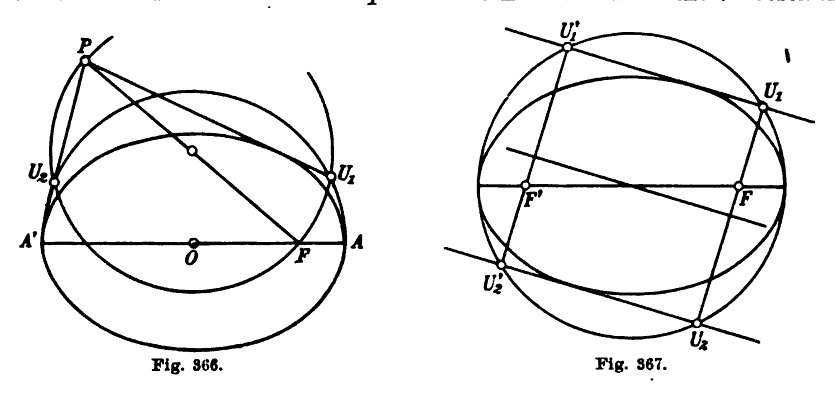


Fig. 366. Fig. 367.

als Schnitt eines Kreises um P mit PF und eines Kreises um F' mit $2a$ (Fig. 365). Zweitens ist U bestimmt als Schnittpunkt eines Halbkreises über PF und eines solchen über AA' (Fig. 366).

Auch *eine Tangente, parallel einer gegebenen Geraden,* ist hiernach leicht zu zeichnen. Man ziehe die beiden Brennstrahlen senkrecht zu

der gegebenen Richtung und schneide dieselben mit dem Kreise über der großen Achse als Durchmesser. Die Verbindungslinie der beiden Schnittpunkte ist die gesuchte Tangente (Fig. 367).

Endlich ergibt sich aus dem Satze, daß die Fußpunkte der auf eine Tangente von den Brennpunkten gefällten Lote auf dem Kreise über der großen Achse liegen, eine Ellipsenkonstruktion, bei der die Kurve durch Umhüllung ihrer Tangenten erzeugt wird. *Bewegt sich* nämlich *ein rechter Winkel so, daß sein Scheitelpunkt auf einem festen Kreise gleitet, während ein Schenkel durch einen festen Punkt im Innern des Kreises geht, so umhüllt der andere Schenkel des rechten Winkels eine Ellipse* (Fig. 368). Bei dieser Konstruktion ist *auch der Berührungspunkt* in jeder Lage des rechten Winkels leicht hinzuzufügen. Man hat nur FU um

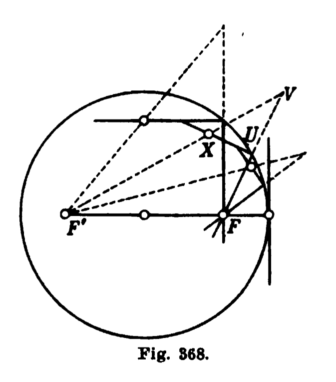


Fig. 368.

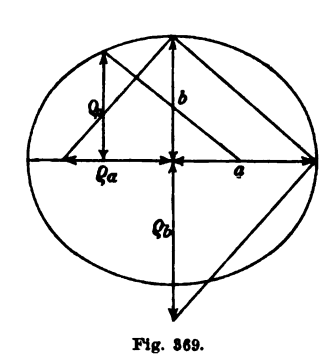


Fig. 369.

sich selbst bis V zu verlängern und V mit F' zu verbinden, so ist der Schnittpunkt X mit dem freien Schenkel der auf ihm liegende Berührungspunkt.

Schließlich sei noch auf eine *Konstruktion der Krümmungsmittelpunkte für die Scheitel* hingewiesen, die sich aus dem Werte der Krümmungsradien unmittelbar ergibt. Wir setzen dabei als aus der Analysis her bekannt voraus, daß der Krümmungsradius im Endpunkte der großen Achse gleich $\frac{b^2}{a}$, im Endpunkte der kleinen Achse gleich $\frac{a^2}{b}$ ist. Um diese Werte zu ermitteln, hat man in zwei benachbarten Scheitelpunkten die Senkrechten auf ihrer Verbindungslinie zu errichten. Die eine schneidet auf der großen Achse vom Mittelpunkte aus gerechnet den Krümmungsradius für die Endpunkte dieser Achse, die andere ebenso für die andere Achse ab (Fig. 369).

Betrachtet man das rechtwinklige Dreieck, das von einer Brennpunktsordinate und dem anderen Brennpunkte bestimmt wird, so ist,

wenn man diese Ordinate, die auch halber *Parameter* heißt, mit p bezeichnet:

$$p^2 = (2a - p)^2 - 4f^2 = 4a^2 - 4ap + p^2 - 4(a^2 - b^2)$$

$$p = \frac{b^2}{a},$$

d. h. auch *der halbe Parameter — die Brennpunktsordinate — ist gleich dem Krümmungsradius für die Endpunkte der großen Achse.*

106. Brennpunktseigenschaften der Hyperbel. Auch für die Hyperbel folgt aus Symmetriegründen, daß auf ihrer reellen Achse, symmetrisch zu ihrem Mittelpunkte, *zwei Brennpunkte* existieren, deren Direktricen auf der reellen Achse senkrecht stehen und diese in zwei Punkten schneiden, die gleichfalls symmetrisch zum Mittelpunkte und zwischen den beiden Ästen der Hyperbel liegen. Wie bei der Ellipse bezeichnet man die Entfernung der beiden Brennpunkte $2f$ als *Brennweite,* und wieder ergibt sich aus Fig. 370, daß

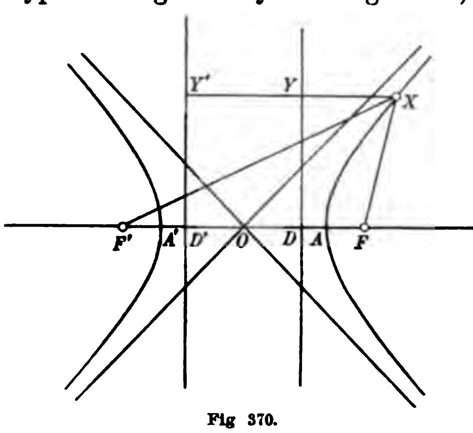


Fig 370.

$$\varepsilon = \frac{A'F}{A'D} = \frac{AF}{AD} = \frac{A'F + AF}{A'D + AD} = \frac{FF'}{AA'} = \frac{2f}{2a}$$

ist, d. h.

$$\varepsilon = \frac{f}{a}.$$

Die Exzentrizität der Hyperbel ist gleich der Brennweite dividiert durch die reelle Achse. Aus derselben Figur ergibt sich weiter:

$$\frac{XF}{XY} = \frac{XF'}{XY'} = \frac{XF' - XF}{XY' - XY} = \frac{XF' - XF}{DD'},$$

oder es ist:

$$XF - XF' = \varepsilon \cdot DD' = \text{const.},$$

d. h. *die Differenz der Abstände eines Hyperbelpunktes von den beiden Brennpunkten ist konstant.*

Wendet man diesen Satz auf einen Endpunkt der reellen Achse an, so ergibt sich, daß *diese konstante* Differenz $= 2a$, d. h. *gleich der reellen Achse* ist.

Hieraus folgt eine einfache *Konstruktion von Hyperbelpunkten als Schnittpunkte zweier Kreise um die Brennpunkte, wenn die Differenz der Radien* $= 2a$ *ist* (Fig. 371).

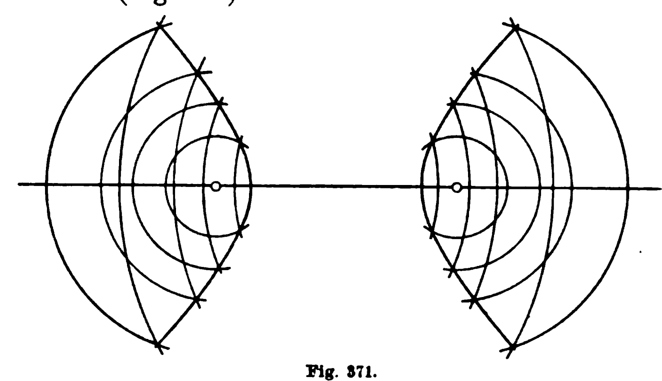


Fig. 371.

Es sei in einem Hyperbelpunkte X die Tangente gezogen, die die beiden Direktricen in T und T' schneidet, dann ist (Fig. 372):

$$\frac{FX}{XY} = \frac{F'X}{XY'} \quad \text{oder} \quad \frac{FX}{F'X} = \frac{XY}{XY'} = \frac{XT}{XT'},$$

und da ferner die beiden Dreiecke FXT und $F'XT'$ rechtwinklig sind, so sind sie ähnlich. Daraus folgt, daß der Winkel $FXT = F'XT'$ ist,

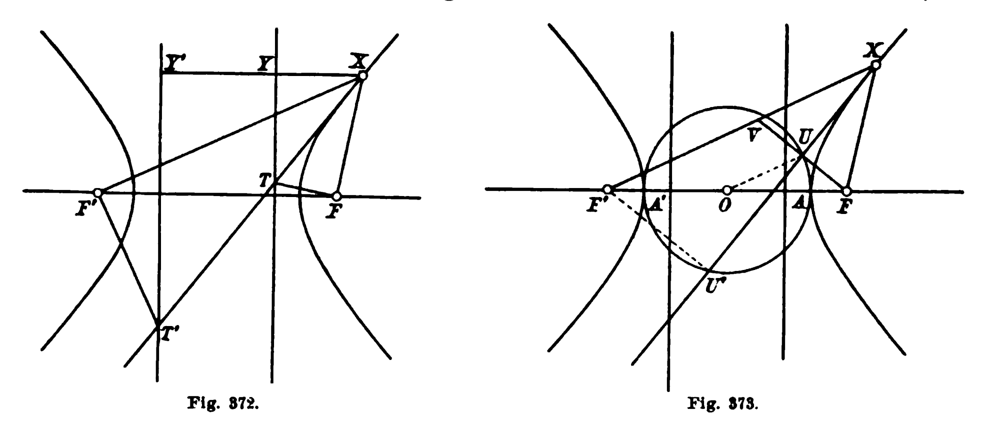


Fig. 372. Fig. 373.

d. h. aber *in jedem Hyperbelpunkte halbiert die Tangente den Winkel der beiden Brennstrahlen.*

Wie bei der Ellipse schließt sich hieran wieder eine einfache *Tangentenkonstruktion*; bei der Hyperbel halbiert man den Winkel, der von den beiden Brennstrahlen des betreffenden Kurvenpunktes gebildet wird.

Schneidet man in Fig. 373 auf $F'X$ die Strecke $VX = FX$ ab

und zieht FV, so ist das Dreieck FXV gleichschenklig und $F'V = 2a$. Ist U der Schnittpunkt von FV mit der Tangente in X, so ist U, da die Tangente den Winkel bei X halbiert, die Mitte von FV und damit ist $OU = {}^1/_2 F'V = a$. Betrachtet man U als Fußpunkt des von F auf die Tangente gefällten Lotes, so liegt derselbe demnach auf einem Kreise

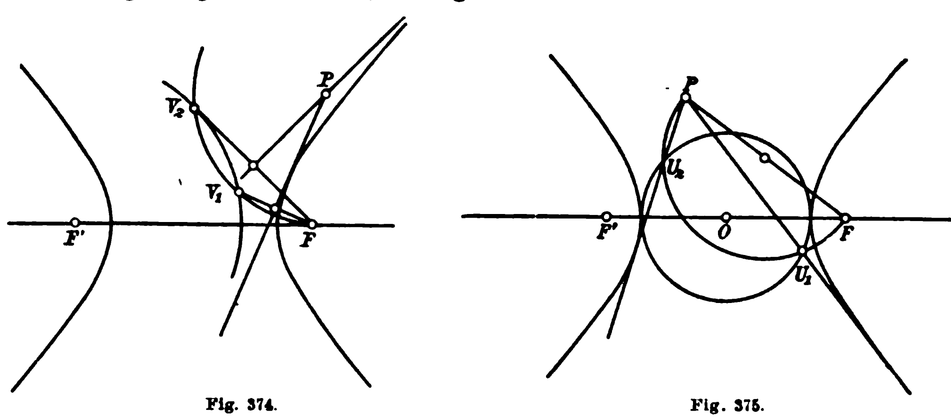


Fig. 374. Fig. 375.

über AA' als Durchmesser. Ist U' der Fußpunkt des von F' auf die Tangente gefällten Lotes, so gilt für diesen Punkt dasselbe.

Hieraus ergeben sich, wie bei der Ellipse, *zwei wichtige Konstruktionen der Tangenten von einem Punkte P aus an die Hyperbel.* Erstens ist der Punkt V bestimmt als Schnitt eines Kreises um P mit PF

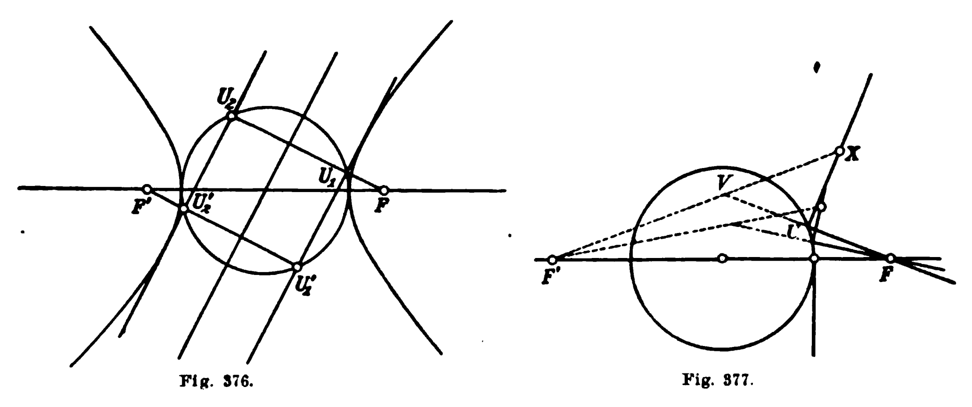


Fig. 376. Fig. 377.

und eines Kreises um F' mit $2a$ (Fig. 374). Zweitens ist U bestimmt als Schnittpunkt eines Halbkreises über PF und eines solchen über der reellen Achse als Durchmesser (Fig. 375).

Auch *eine Tangente parallel einer gegebenen Geraden* ist wiederum leicht zu zeichnen (Fig. 376). Man fälle von den beiden Brennpunkten

Lote auf die gegebene Richtung und bringe die beiden Lote zum Schnitt mit dem Kreise über der reellen Achse als Durchmesser. Die Verbindungslinie der beiden Schnittpunkte ist die gesuchte Tangente.

Endlich ergibt sich aus dem Satze, daß die Fußpunkte der auf eine Tangente von den Brennpunkten gefällten Lote auf dem Kreise über der reellen Achse liegen, eine Hyperbelkonstruktion, bei der die Kurve durch Umhüllung ihrer Tangenten erzeugt wird (Fig. 377). *Bewegt sich nämlich ein rechter Winkel so, daß sein Scheitel auf einem festen Kreise gleitet, während ein Schenkel durch einen festen Punkt außerhalb des Kreises* — bei der Ellipse lag derselbe innerhalb — *geht, so umhüllt der andere Schenkel des rechten Winkels eine Hyperbel. Auch der Berührungspunkt* läßt sich in jeder Lage des rechten Winkels wieder leicht hinzufügen. Man hat nur FU um sich selbst bis V zu verlängern und F' mit V zu verbinden, so ist der Schnittpunkt der Verlängerung von $F'V$ mit dem freien Schenkel des rechten Winkels der auf diesem liegende Berührungspunkt X.

Kommt bei der Bewegung des rechten Winkels FU in die Lage der Kreistangente (Fig. 378), so fällt X ins Unendliche, OU wird also

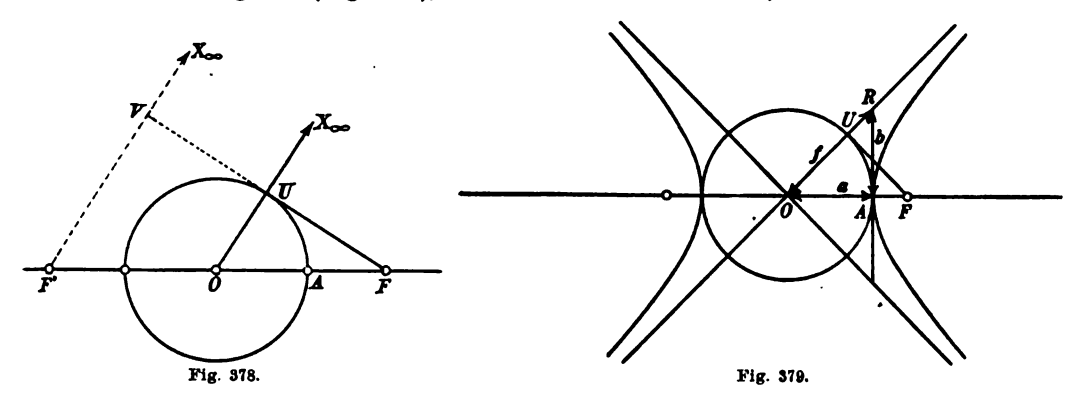


Fig. 378.
Fig. 379.

Asymptote. Hieraus ergibt sich *eine Konstruktion der Asymptoten einer Hyperbel, wenn ihre reelle Achse und ihre Brennpunkte gegeben sind;* umgekehrt aber auch lassen sich hiernach *die Brennpunkte* einer Hyperbel leicht ermitteln, *wenn ihre reelle Achse und ihre Asymptoten gegeben sind.*

Bezeichnet man das Stück der Scheiteltangente zwischen den Asymptoten mit $2b$, so ist in dem rechtwinkligen Dreieck OAR $OR^2 = a^2 + b^2$ (Fig. 379). Wegen der Kongruenz der Dreiecke OAR und OUF ist aber $OR = f$, so daß man *die Beziehung hat* $f^2 = a^2 + b^2$; — bei der Ellipse war $f^2 = a^2 - b^2$ —. Infolge dieser Analogie bezeichnet man auch das Stück der Scheiteltangente zwischen den Asymptoten als *ima-*

ginäre oder *Nebenachse* der Hyperbel. Durch je zwei der Größen a, b und f ist stets die dritte bestimmt und aus einem rechtwinkligen Dreieck zu ermitteln; durch zwei derselben ist also eine Hyperbel eindeutig bestimmt, und ***alle Hyperbeln, bei denen das Verhältnis der beiden Bestimmungsstücke, im besonderen die Exzentrizität ε oder der Asymptotenwinkel, derselbe ist, sind einander ähnlich.*** Bei der Hyperbel kann ε alle Werte von 1 bis ∞ annehmen, für $\varepsilon = 1$ wird der Asymptotenwinkel gleich 0, und die Hyperbel degeneriert in eine doppelt zu rechnende gerade Linie und zwar sind, wenn dieselbe als Hyperbel aufgefaßt werden soll, ihre beiden äußeren Stücke als Kurve, wenn sie als Ellipse aufgefaßt werden soll, das innere Stück derselben als solche aufzufassen (Fig. 380). Wird $\varepsilon = \infty$, so kann das entweder dadurch geschehen, daß $f = \infty$ wird, es wird dann der Asymptotenwinkel gleich 180°, und die Hyperbel artet in zwei parallele Geraden aus (Fig. 381), oder es wird

Fig. 380.

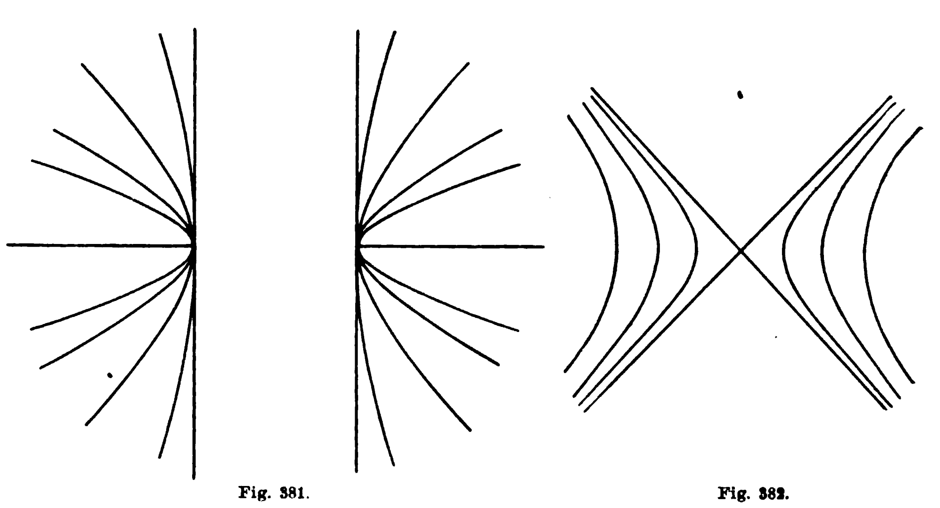


Fig. 381. Fig. 382.

ε dadurch gleich ∞, daß $a = 0$ wird; die Hyperbel fällt dann mit ihren Asymptoten zusammen, d. h. sie degeneriert zu zwei sich schneidenden Geraden (Fig. 382). Erwähnt sei noch die Hyperbel, bei der $\varepsilon = \sqrt{2}$ ist, bei der also $b = a$ wird. Der Asymptotenwinkel ist hier gleich 90°; eine solche Hyperbel heißt *gleichseitig* und bietet in gewissem Sinne unter dem Hyperbeltypus ein Analogon zum Kreise unter dem Ellipsentypus.

107. Asymptoteneigenschaften der Hyperbel. Schneidet man zwei Tangenten eines Kegelschnittes durch eine dritte, so wird das Stück der letzteren, das zwischen den beiden ersten liegt, durch den Berührungspunkt und den Schnittpunkt der Berührungssehne harmonisch geteilt

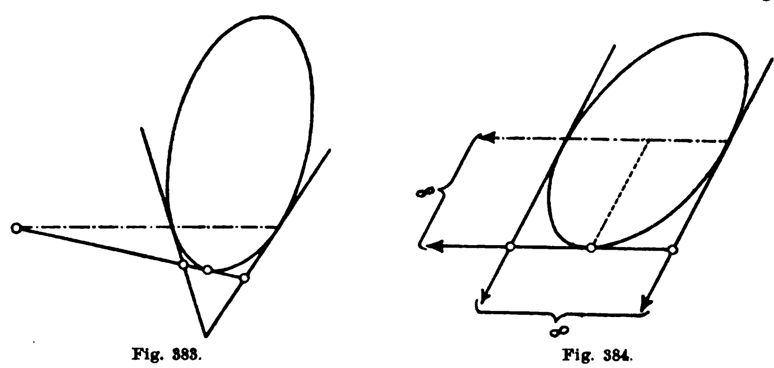


Fig. 383. Fig. 384.

(Fig. 383); es erhellt das sofort, wenn man den Schnittpunkt der beiden ersten Tangenten und den Schnittpunkt der dritten mit der Berührungssehne ins Unendliche fallen läßt (Fig. 384).

Wendet man diese harmonische Beziehung auf die beiden Asymptoten und eine dritte Tangente an, so ergibt sich, *daß das zwischen*

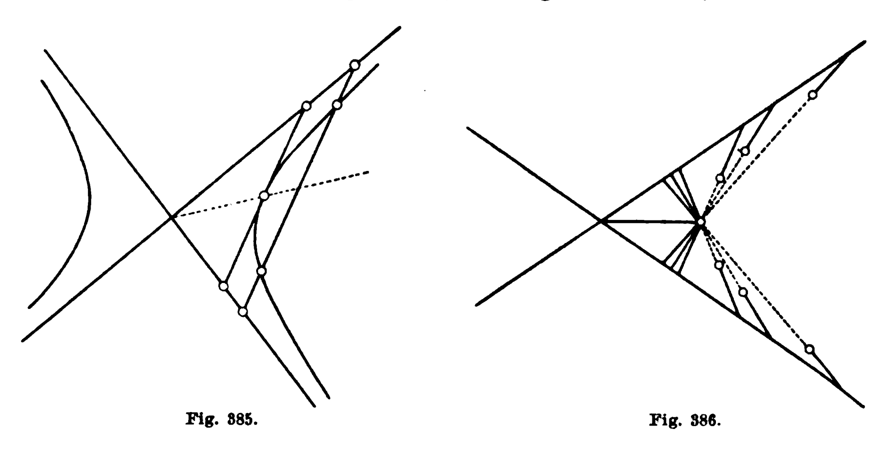


Fig. 385. Fig. 386.

die Asymptoten fallende Stück einer Tangente in ihrem Berührungspunkte halbiert wird. Zieht man zu einer solchen dritten Tangente eine parallele Sekante und durch den Berührungspunkt der Tangente den konjugierten Durchmesser und berücksichtigt, daß dieser das zwischen den Asymptoten liegende Stück der Sekante und ebenso die auf der Sekante liegende Sehne halbiert, so ergibt sich weiter, *daß die beiden*

zwischen Kurve und Asymptoten fallenden Stücke einer beliebigen Sekante gleich groß sind (Fig. 385).

Hieran schließt sich eine einfache *Konstruktion von Hyperbelpunkten,* wenn *von der Kurve die reelle Achse und die Asymptoten, oder die Asym-*

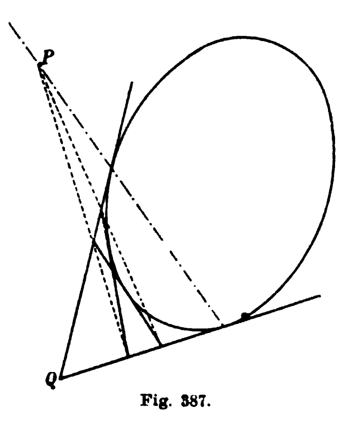


Fig. 387.

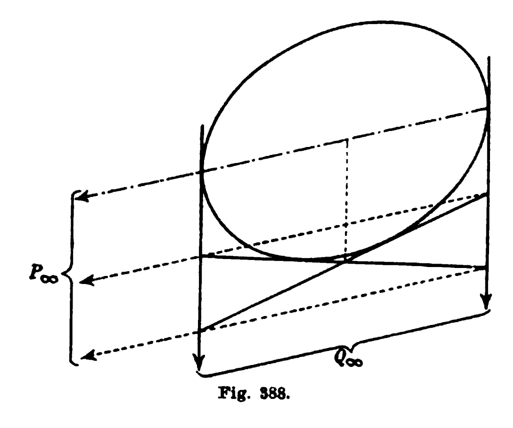


Fig. 388.

ptoten und ein Punkt, gegeben sind. Man hat nur durch den Scheitelpunkt der Hyperbel, beziehungsweise durch den gegebenen Punkt, eine Schar von Sekanten zu ziehen und auf jeder derselben die Entfernung des gegebenen Kurvenpunktes von einer Asymptote auf dem anderen Ende der Sekante abzutragen (Fig. 386).

Werden zwei Tangenten eines Kegelschnittes von zwei anderen Tangenten geschnitten, so schneiden sich die Verbindungslinien der vier Schnittpunkte auf der Berührungssehne der zwei ersten Tangenten; es erhellt das sofort, wenn man die Figur 387 so projiziert, daß der Schnittpunkt der beiden ersten Tangenten Q und der Schnittpunkt der beiden Verbindungslinien P ins Unendliche fällt (Fig. 388). Wendet man diese Beziehung auf die Asymptoten und zwei andere Tangenten an, welche die Asymptoten in den Punkten A und B, bzw. C und D schneiden, so ergibt sich, daß AD parallel CB, und hieraus, daß $OA \cdot OB = OC \cdot OD$ ist (Fig. 389). Das heißt aber, die Dreiecke OAB und OCD sind inhaltsgleich. Diesen Satz kann man auch so aussprechen: *Eine Linie, die sich so bewegt, daß sie aus einem festen Winkel Dreiecke von konstantem Inhalt abschneidet, umhüllt eine Hyperbel.*

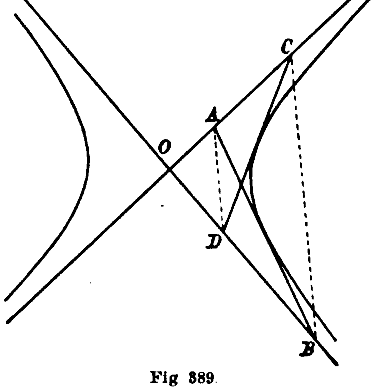


Fig 389.

108. Brennpunktseigenschaften der Parabel. In der Technik ist die Parabel für Baukonstruktionen von eminenter Wichtigkeit. *Sie ist in jeder Beziehung der Übergangstypus zwischen Ellipse und Hyperbel.* Diese Zwischenstellung der Parabel spiegelt sich denn auch in fast allen ihren Eigenschaften.

Fällt der Mittelpunkt und ein Scheitel einer Ellipse ins Unendliche, so fällt auch *ein Brennpunkt ins Unendliche.* Daraus ergibt sich, daß die Parabel nur *einen einzigen, im Endlichen liegenden Brennpunkt* besitzt. Es kann also ein Analogon zu dem Satze von der konstanten

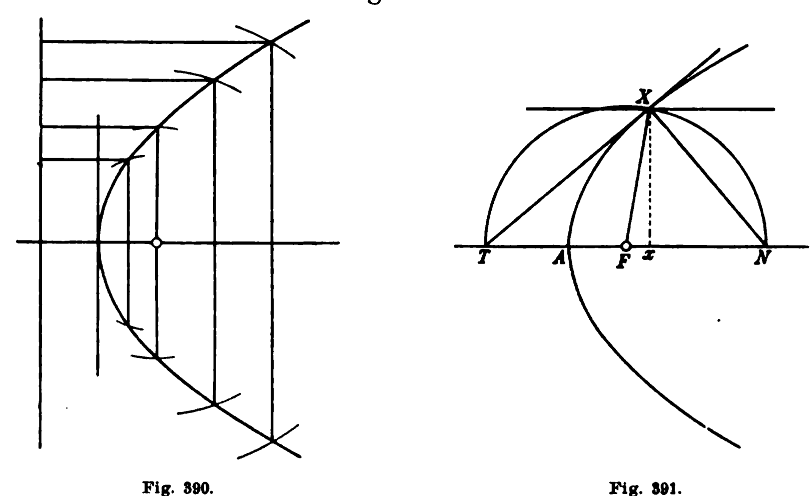


Fig. 390. Fig. 391.

Summe, bzw. Differenz der Brennstrahlen nicht geben. Dagegen existiert eine ganze Reihe anderer Analogien.

Da die Parabel nur einen endlichen Brennpunkt besitzt, so hat sie auch nur eine einzige Direktrix, und da für die Parabel $\varepsilon = 1$ ist, so ist die Parabel *der geometrische Ort aller Punkte, deren Entfernungen von einem festen Punkte — dem Brennpunkt — und einer festen Geraden — der Direktrix — gleich groß sind* (Fig. 390). Daraus ergibt sich, daß *der Scheitel der Parabel den Abstand des Brennpunktes von der Direktrix halbiert, daß eine Parabel eindeutig bestimmt ist, wenn dieser Abstand gegeben ist, daß also die Gestalt einer Parabel nur von einer Größe abhängig ist, und daß somit alle Parabeln ähnlich sind.*

Man nennt den doppelten Abstand des Brennpunktes von der Direktrix den *Parameter* der Parabel; *er ist gleich der doppelten Brennpunktsordinate* (Fig. 390).

Daraus, daß die Parabel als Ellipse, bzw. als Hyperbel aufgefaßt

werden kann, ergibt sich sofort, daß *die Tangente und die Normale in einem Parabelpunkte den Winkel, den der durch diesen Punkt gehende Durchmesser mit dem zugehörigen Brennstrahl bildet, halbiert* (Fig. 391).

Auf diesem Satze beruhen die optischen und akustischen Eigenschaften der Parabel bzw. eines Rotationsparaboloids, d. h. einer Fläche, die durch Rotation einer Parabel um ihre Achse entstanden ist. Es werden nämlich alle Licht- und ebenso alle Schallstrahlen, die von dem Brennpunkte ausgehen, an der Parabel so reflektiert, daß sie parallel der Parabelachse, d. h. unter sich parallel verlaufen. Hierauf beruht die Wirkung von parabolisch gekrümmten Hohlspiegeln — Reflektoren — und von paraboloidischen Schallwänden, wie sie zum Abschluß von Konzerthallen benutzt werden.

Daraus, daß Tangente und Normale den Winkel zwischen Brennstrahl und Durchmesser halbieren, folgt weiter, daß TFX und NFX gleichschenklige Dreiecke sind, daß also X, T und N auf einem Kreise um F liegen. Hieraus ergibt sich eine einfache *Konstruktion für die Tangente und Normale in einem Parabelpunkte.*

Eine *andere Tangentenkonstruktion* geht aus der folgenden Überlegung hervor. Es ist T der Pol von Xx; daher sind T, A, x, ∞ vier harmonische Punkte, woraus folgt, daß $TA = Ax$ ist, d. h., *daß die „Subtangente" Tx gleich der doppelten Abszisse Ax ist.*

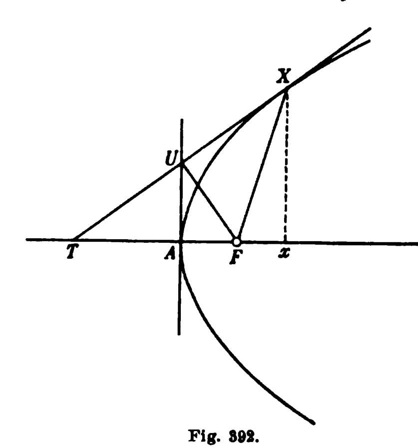


Fig. 392.

Ist in Fig. 392 FU senkrecht auf der Tangente XT, so halbiert U diese Strecke; es ist also UA parallel Xx, d. h. UA ist die Scheiteltangente der Parabel. Daraus ergibt sich sofort einmal, daß *das Stück einer Parabeltangente zwischen Berührungspunkt und Achse von der Scheiteltangente halbiert wird,* und ferner, daß *die Fußpunkte der von dem Brennpunkt auf die Parabeltangenten gefällten Lote auf der Scheiteltangente liegen.* Aus dem letzten Satz ergibt sich eine einfache *Brennpunktskonstruktion, wenn die Parabel gezeichnet vorliegt.* Man zeichnet eine Tangente und errichtet in ihrem Schnittpunkt mit der Scheiteltangente das Lot auf der ersteren.

Ferner ergibt sich aus diesem Satze eine Konstruktion, bei welcher die Parabel als Umhüllungskurve erscheint. *Bewegt sich nämlich ein rechter Winkel so, daß einer seiner Schenkel durch einen festen Punkt*

geht, während sein Scheitelpunkt auf einer Geraden gleitet, so umhüllt der andere Schenkel eine Parabel (Fig. 393). Eine ähnliche Umhüllungskonstruktion durch den freien Schenkel eines zwangsläufig geführten rechten Winkels ergab sich für eine Ellipse und Hyperbel. Bei der Ellipse bewegte sich der Scheitelpunkt auf einem Kreise über der großen Achse als Durchmesser, während ein Schenkel durch einen Punkt F innerhalb

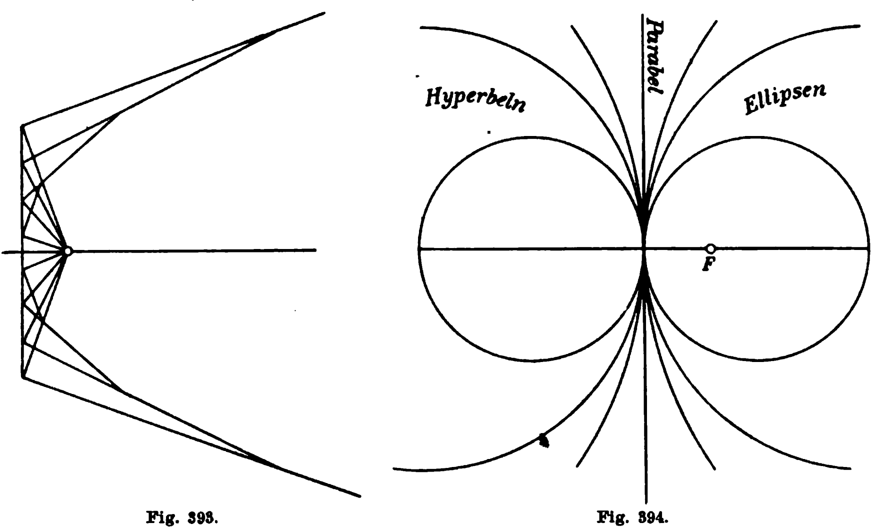


Fig. 393. Fig. 394.

des Kreises hindurchgeht. Bei der Hyperbel gleitet der Scheitelpunkt eines rechten Winkels auf dem Kreise über der reellen Achse, während ein Schenkel durch einen Punkt F außerhalb desselben hindurchgeht. Bei der Parabel tritt an Stelle des Scheitelkreises der Ellipse und Hyperbel die Scheiteltangente — ein Kreis mit unendlich großem Radius — für den der Brennpunkt sowohl innerhalb als außerhalb liegend betrachtet werden kann (Fig. 394).

Verlängert man in Fig. 395 FU bis zum Schnittpunkt V mit der Direktrix, so ist $UV = FU$, also $FXVT$ ein Rhombus.

In dieser Figur sind auch *zwei wichtige Konstruktionen der Tangente von einem Punkte P aus an die Parabel* enthalten. Erstens ist der Punkt V auf der Direktrix bestimmt durch den Kreis mit PF um P. Der Durchmesser durch V bestimmt dann den Berührungspunkt X. Zweitens ist der Punkt U auf der Scheiteltangente durch den Kreis über PF als Durchmesser bestimmt. Den Berührungspunkt auf PU findet man wieder mit Hilfe des Punktes V.

Auch die *Konstruktion einer Tangente parallel zu einer gegebenen Geraden* ist aus derselben Figur abzulesen. Man hat nur FU senkrecht

zu der Geraden zu ziehen und von U aus wieder die Punkte V und X zu bestimmen.

Ist XN die Normale im Punkte X, so sind die Dreiecke XxN und UAF ähnlich wegen der Parallelität der entsprechenden Seiten, und da $Xx = 2 \cdot UA$ ist, so ist $xN = 2 \cdot AF$; AF aber ist konstant gleich

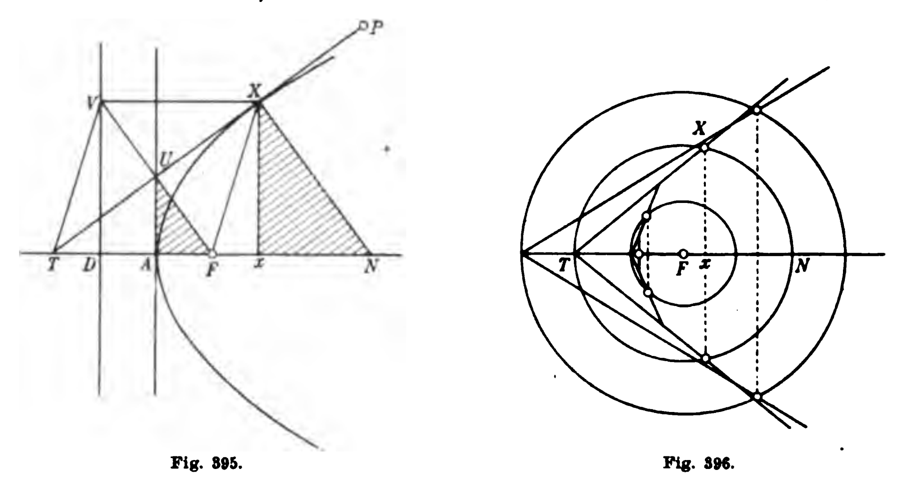


Fig. 395. Fig. 396.

dem vierten Teile des Parameters. Es ist also *die „Subnormale“ xN für jeden Parabelpunkt X konstant gleich dem halben Parameter.*

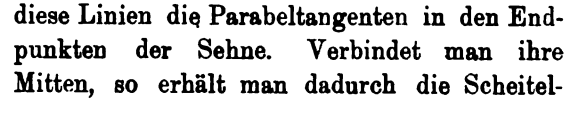
Hieraus ergibt sich *die Konstruktion einzelner Parabelpunkte, wenn der Brennpunkt und der Parameter der Kurve gegeben sind* (Fig. 396). Man zieht um F einen Kreis mit beliebigem Radius, der die Achse in T und N trifft, schneidet auf NF von N aus die Strecke Nx gleich dem halben Parameter ab und errichtet in x das Lot, das den Kreis in X schneidet; dann ist X ein Punkt der Parabel. Eine Schar solcher Kreise ergibt eine Schar von Parabelpunkten.

109. Konstruktion eines Parabelsegmentes aus Sehne und Pfeilhöhe. In der Technik tritt sehr häufig die *Aufgabe* auf, *ein Parabelsegment zu konstruieren, wenn dessen Sehne und Pfeilhöhe gegeben sind.* Es seien daher die folgenden drei wichtigen Konstruktionen mitgeteilt.

Erste Konstruktion. Der Satz, daß die Subtangente gleich der doppelten Abszisse ist, hat allgemeinere Gültigkeit. Ist in Fig. 397 QR die Berührungssehne der beiden durch P gehenden Tangenten, so muß P auf dem zu QR konjugierten Durchmesser PM liegen, der die Parabel in S schneiden möge. Da ferner QR die Polare von P ist, so müssen P, S, M, ∞ vier harmonische Punkte, also $PS = SM$ sein. Zieht man

noch in S die Tangente UT parallel zu QR, so folgt, daß UT in S halbiert wird, und daß ebenso PR und PQ in U, bzw. T halbiert werden.

Hieraus ergibt sich folgende Konstruktion. Man verbinde den Endpunkt der doppelten Pfeilhöhe mit den Endpunkten der Sehne, so sind diese Linien die Parabeltangenten in den Endpunkten der Sehne. Verbindet man ihre Mitten, so erhält man dadurch die Scheitel-



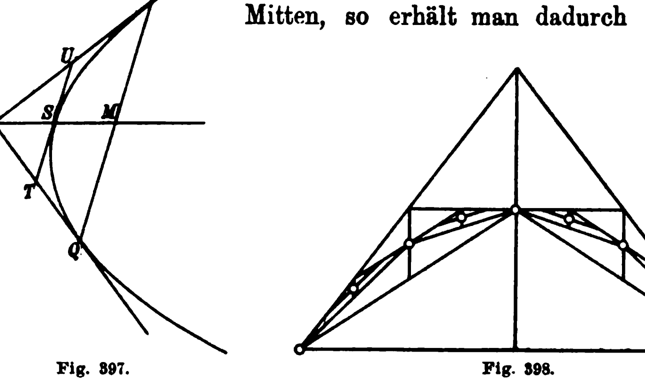


Fig. 397. Fig. 398.

tangente (Fig. 398). Verbindet man nunmehr den Endpunkt der Pfeilhöhe mit den Endpunkten der Sehne und führt die oben angegebene Konstruktion für jedes der durch diese Linien, die Scheiteltangente und die Tangenten in den Endpunkten der Sehne begrenzten Dreiecke noch einmal durch, so ergeben sich zwei weitere Tangenten mit ihren Berührungspunkten. Durch Abschnürung weiterer Dreiecke und wiederholter Anwendung derselben Konstruktion ergeben sich beliebig viele Tangenten mit ihren Berührungspunkten.

Diese Konstruktion zeigt auch, daß die *Parabel identisch mit der Wurfkurve* ist; man hat dazu die Wurfbewegung nur zu zerlegen in eine gleichförmige Bewegung infolge der erteilten Anfangsgeschwindigkeit in deren Richtung und in eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung in vertikaler Richtung abwärts infolge der Erdanziehung.

Dieselbe Konstruktion gilt selbstverständlich *auch für ein schiefes Parabelsegment* und kommt dann zur Anwendung, wenn von demselben die Sehnen und die Tangenten in ihren Endpunkten gegeben sind.

Auch *der Inhalt eines Segmentes* ist nach dieser Konstruktion nicht schwer zu ermitteln. Ist nämlich Δ der Inhalt des Dreieckes, das die Sehne als Grundlinie und die doppelte Pfeilhöhe als Höhe hat, so ist der Inhalt des Parabelsegmentes:

$$J = \Delta - \frac{\Delta}{4} - \frac{\Delta}{4 \cdot 4} - \frac{\Delta}{4^3} - \cdots = \Delta - \frac{\Delta}{4}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right)$$

$$= \Delta - \frac{\Delta}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}\Delta,$$

da

$$(1 - x)^{-1} = 1 + x^2 + \cdots$$

ist.

Es sei noch erwähnt, daß *der Schwerpunkt des Parabelsegmentes* auf seinem Durchmesser SM liegt und diesen im Verhältnis $2:3$ so teilt, daß der größere Abschnitt des Durchmessers am Scheitel liegt (Fig. 399).

Fig. 399.

Zweite Konstruktion. In Paragraqh 97 wurde gezeigt, daß die Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier projektiver Punktreihen durch Umhüllung einen Kegelschnitt erzeugen. *Sind die beiden Punktreihen ähnlich,* so entsprechen sich in ihnen die unendlich fernen Punkte, und es ist daher ihre unendlich entfernte Verbindungslinie eine Tangente der Kurve, diese also *eine Parabel.*

Hiernach gestaltet sich die Konstruktion des Parabelsegmentes aus Sehne und Tangenten in ihren Endpunkten folgendermaßen: Man bestimme auf den beiden Tangenten in den Endpunkten der Sehne zwei ähnliche Punktreihen etwa dadurch, daß man die beiden Tangenten in

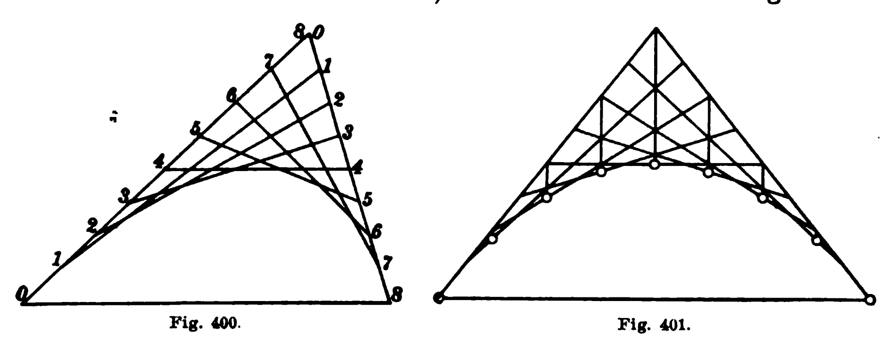


Fig. 400. Fig. 401.

gleich viele Teile teilt und entsprechende Punkte mit einander verbindet (Fig. 400). Um sich bei der Verbindung entsprechender Punkte nicht zu irren, beachte man, daß jede der beiden genannten Tangenten bereits als Verbindungslinie zweier entsprechender Punkte aufzufassen ist. Ist das Segment durch Sehne und Pfeilhöhe gegeben, so bestimmt die doppelte Pfeilhöhe den Schnittpunkt der beiden Tangenten (Fig. 401). In

diesem Falle sind auch unter Berücksichtigung des bei der ersten Konstruktion benutzten Satzes die Berührungspunkte auf den einzelnen Tangenten leicht hinzuzufügen.

Dritte Konstruktion: Nach Paragraph 96 erzeugen zwei projektive Strahlenbüschel durch die Schnittpunkte zweier entsprechender Strahlen einen Kegelschnitt. *Wird eines der Strahlbüschel ein Parallelstrahlenbüschel,* dessen Zentrum also im Unendlichen liegt, so gibt es nur ein Strahlenpaar, das sich im Unendlichen schneidet. Die Kurve besitzt also im Unendlichen nur einen Punkt, ist also *eine Parabel.*

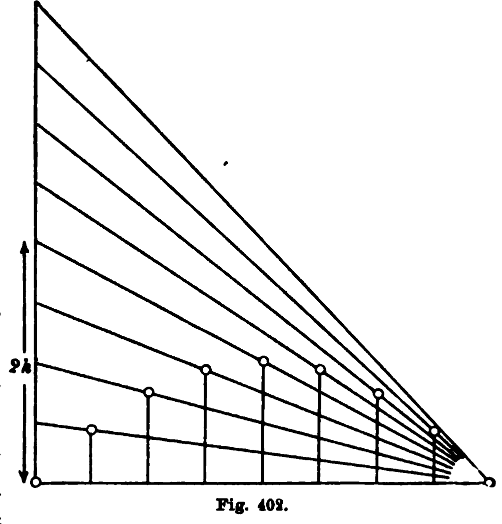


Fig. 402.

Hierauf stützt sich die folgende Konstruktion: Man errichte in einem Endpunkte der Sehne die vierfache Pfeilhöhe und teile dieselbe in eine bestimmte Anzahl von Abschnitten. Die einzelnen Teilpunkte verbinde man mit dem anderen Endpunkte der Sehne; dann ist dadurch dasjenige Strahlbüschel bestimmt, dessen Zentrum im Endlichen liegt. Sodann teile man die Sehne in dieselbe Anzahl von Teilen wie vorhin die vierfache Pfeilhöhe und errichte in den einzelnen Teilpunkten Lote auf der Sehne. Diese bilden das Parallelstrahlenbüschel. Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen beider Büschel ergeben die Parabel (Fig. 402).

XII. Kapitel.

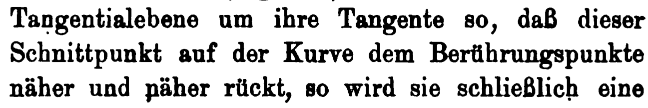
Raumkurven.

110. Begriff der Raumkurve, Tangente, Schmiegungsebene, Normalebene und Hauptnormalen. Bewegt sich ein Punkt gesetzmäßig so im Raume, daß im allgemeinen keine vier aufeinander folgenden Lagen sich in einer Ebene befinden, so beschreibt der Punkt eine *Raumkurve.*

Die Verbindungslinie zweier Kurvenpunkte heißt *Sekante*; dreht man dieselbe so um einen der Schnittpunkte, daß der andere dem Drehpunkte auf der Kurve näher und näher rückt, so erreicht die Sekante dann

eine Grenzlage, wenn dieser Punkt mit dem Drehpunkt zusammenfällt. In dieser Grenzlage heißt sie *Tangente.* Die Definition der Tangente ist also genau dieselbe wie bei ebenen Kurven. Da sie auch bei Raumkurven als Verbindungslinie zweier unendlich benachbarter Punkte aufgefaßt werden kann, so gibt sie auch hier in jedem Punkte *die Bewegungsrichtung des die Kurve beschreibenden Punktes* an.

Jede Ebene, die durch eine Tangente geht, ist eine *Tangentialebene* in dem Berührungspunkte der Tangente. Es gibt also in jedem Punkte unendlich viele Tangentialebenen, die im allgemeinen die Kurve in einem weiteren Punkte schneiden (Fig. 403). Dreht man eine solche Tangentialebene um ihre Tangente so, daß dieser Schnittpunkt auf der Kurve dem Berührungspunkte näher und näher rückt, so wird sie schließlich eine Grenzlage erreichen, bei welcher der Schnittpunkt mit dem Berührungspunkte zusammenfällt (Fig. 404). Die Kurve hat mit dieser Tangentialebene dann *drei unendlich nahe Punkte* gemein und heißt in dieser Grenzlage *Schmiegungsebene* oder Oskulationsebene. Dreht man die Tangentialebene noch weiter, so tritt der Schnittpunkt mit der Kurve auf der anderen Seite des Berührungspunktes auf; daraus geht hervor, daß die Kurve von der Schmiegungsebene im Berührungspunkte geschnitten wird, daß also die Kurve im Berührungspunkte von einer Seite der Schmiegungsebene auf die andere übertritt.



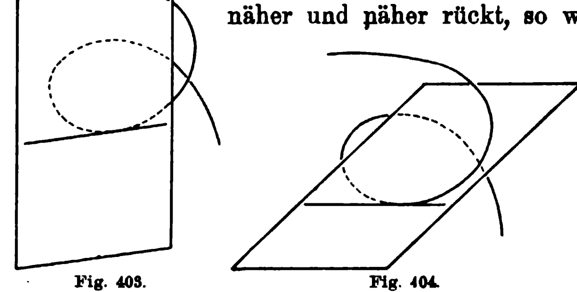


Fig. 403. Fig. 404.

Die Bedeutung der Schmiegungsebene wird noch anschaulicher, wenn man die Kurve, ähnlich wie es bei den ebenen Kurven geschah, als einen *polygonalen Zug von unendlich kleinen Elementen* auffaßt, von denen aber bei einer Raumkurve im Gegensatz zu einer ebenen Kurve keine drei aufeinander folgenden in einer Ebene liegen. Die Tangente erscheint dann als Verlängerung eines Elementes, eine Tangentialebene als eine Ebene, die durch ein Element hindurchgeht, und die Schmiegungsebene als die Ebene, die durch zwei aufeinander folgende Elemente bestimmt ist (Fig. 405). Die Schmiegungsebene eines Punktes ist also diejenige Ebene, die durch die beiden Elemente hindurchgeht, die in dem betrachteten Punkte zusammenstoßen. Sie spielt bei den Raumkurven eine ebenso wichtige Rolle wie die Tangente bei den ebenen Kurven.

Nach dem Gesagten kann auch die Schmiegungsebene aufgefaßt werden als diejenige Ebene, die durch zwei aufeinander folgende unendlich nahe Tangenten bestimmt ist. Diese Auffassung ist für die

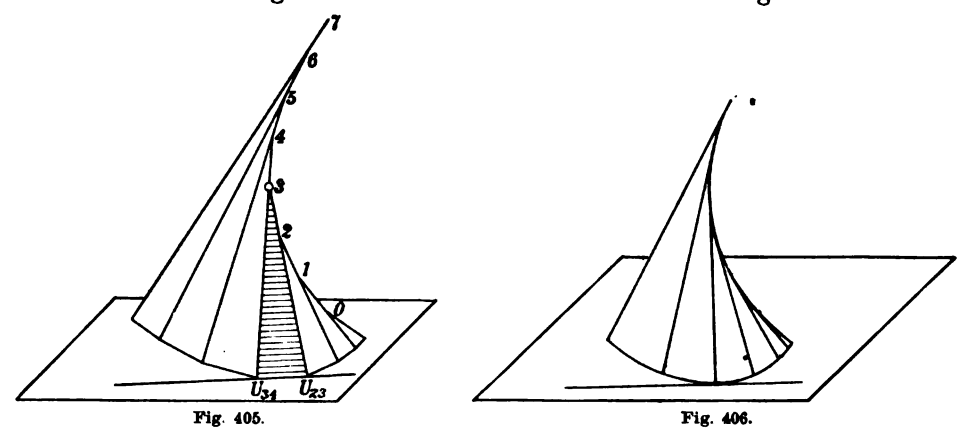


Fig. 405. Fig. 406.

Konstruktion der Schmiegungsebene von Wichtigkeit. Denkt man sich nämlich die einzelnen Kurvenelemente verlängert, so bestimmen die Spuren der Tangenten auf der Projektionsebene ein Spurpolygon. Um dann beispielsweise die Spur der Schmiegungsebene im Punkte *3* zu bestimmen, verlängert man die in *3* zusammenstoßenden Elemente *2 3* und *3 4*, bestimmt die Spuren U_{23} und U_{34} dieser Tangenten und verbin-

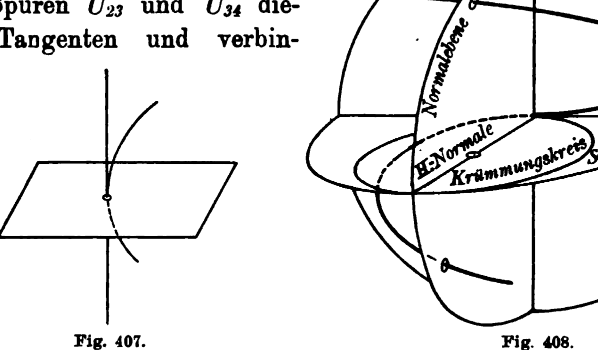


Fig. 407. Fig. 408.

det dieselben; dann ist die Verbindungslinie die Spur der Schmiegungsebene des Punktes *3* (Fig. 405). Sind die Elemente der Kurve unendlich klein, so wird auch aus dem Spurpolygon eine Spurkurve, und die Spuren der einzelnen Schmiegungsebenen werden Tangenten der Spurkurve und können als solche konstruiert werden (Fig. 406).

Alle Linien, die im Berührungspunkte einer Tangente senkrecht auf dieser stehen, heißen *Normalen*. Es gibt in jedem Punkte unendlich viele Normalen; die von ihnen gebildete Ebene heißt die *Normalebene* (Fig. 407). Sie steht also senkrecht auf der Tangente in deren Berührungspunkte. Diejenige unter den Normalen, die in der Schmiegungsebene liegt, heißt *Hauptnormale*. Dieselbe ist also die Schnittlinie von Normalebene und Schmiegungsebene (Fig. 408).

111. Die Krümmung der Raumkurven. Die Krümmung der Raumkurven wird in derselben Weise wie bei den ebenen Kurven durch den *Kontingenzwinkel* gemessen, d. h. durch den Winkel, der von zwei unendlich benachbarten Tangenten gebildet wird; nur liegt bei einer Raumkurve jeder der Kontingenzwinkel in einer anderen Ebene. Wie bei den ebenen Kurven kann auch die Krümmung der Raumkurven durch den *Krümmungskreis* gemessen werden, d. h. durch denjenigen Kreis, der mit der Kurve die zwei in dem betrachteten Punkte aneinander stoßenden Elemente gemein hat; daraus geht hervor, daß der Krümmungskreis in der Schmiegungsebene liegt und der Krümmungsmittelpunkt auf der Hauptnormalen (Fig. 408). Es sei noch besonders darauf aufmerksam gemacht, daß im allgemeinen der Krümmungskreis im betrachteten Punkte von der einen Seite der Kurve auf die andere übertritt.

Zu der durch den Kontingenzwinkel gemessenen Krümmung kommt bei den Raumkurven noch ein weiterer Begriff hinzu. Wie schon erwähnt, liegen die Flächenstreifen der einzelnen Kontingenzwinkel nicht in ein und derselben Ebene, sondern jeder derselben bildet mit dem folgenden einen unendlich kleinen Winkel, durch dessen Größe die Gestalt der Kurve wesentlich mitbedingt ist. Dieser Winkel, den also zwei aufeinander folgende Schmiegungsebenen miteinander bilden, heißt *Torsions-* oder *Windungswinkel* (Fig. 405).

Man kann demnach eine Raumkurve so erzeugen, daß man von einer ebenen Kurve, die in den einzelnen Punkten genau dieselben Kontingenzwinkel hat wie die Raumkurve, ausgeht und nachträglich die einzelnen Flächenstreifen zwischen zwei aufeinander folgenden Tangenten um die betreffenden Torsionswinkel umknickt.

Da beim Übergang von einem Punkte einer Raumkurve zum nächstfolgenden gleichzeitig eine Richtungsänderung der Tangente um den Kontingenzwinkel und eine Windung der Schmiegungsebene um den Torsionswinkel stattfindet, so heißen die Raumkurven auch *Kurven doppelter Krümmung* oder gewundene Kurven. Eine solche Kurve ist dann be-

stimmt, wenn die Änderungsgesetze so wohl für den Kontingenzwinkel, als auch für den Torsionswinkel festgelegt sind.

Wie eine Raumkurve aus einer ebenen Kurve durch Drehen der einzelnen Schmiegungsebenen erzeugt werden kann, so *kann* auch umgekehrt *jede Raumkurve dadurch in eine ebene Kurve transformiert werden, daß man die einzelnen Flächenstreifen zwischen zwei benachbarten Tangenten in ein und dieselbe Ebene umlegt.*

Bei dieser Transformation ändern sich die Kontingenzwinkel nicht (Fig. 405); zu jeder Raumkurve gibt es daher nur eine einzige ebene Kurve, während umgekehrt aus einer ebenen Kurve unendlich viele Raum kurven, je nach dem Änderungsgesetz des Torsionswinkels, herstellbar sind.

112. Die entwickelbare Fläche einer Raumkurve. Die im vorigen Paragraphen der Anschaulichkeit wegen benutzten Flächenelemente sind in Wirklichkeit unendlich schmal. Läßt man eine Tangente an einer Raumkurve hingleiten, so erzeugt sie eine krumme Fläche, *die Tangentenfläche.* Dieselbe hat die Eigentümlichkeit, daß das Flächenelement zwischen zwei unendlich nahen Lagen der Erzeugenden zugleich in der Schmiegungsebene liegt; diese bildet also eine Tangentialebene, die die Fläche längs einer ganzen Tangente berührt. Weiter hat die Tangentenfläche die ausgezeichnete Eigenschaft, daß sie, ohne sich zu dehnen oder zu zerreißen, *in eine Ebene ausbreitbar* ist. Solche Flächen heißen allgemein *entwickelbare Flächen*; daher bezeichnet man die Tangentenfläche einer Raumkurve auch als die entwickelbare Fläche derselben. Bei der Ausbreitung oder Entwicklung derselben in eine Ebene wird die Raumkurve gleichzeitig in die zugehörige ebene Kurve transformiert.

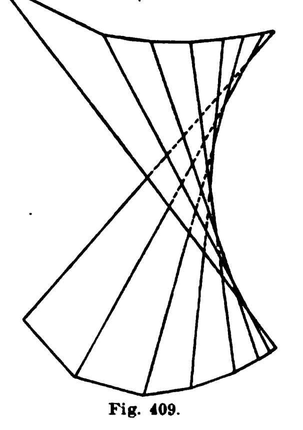


Fig. 409.

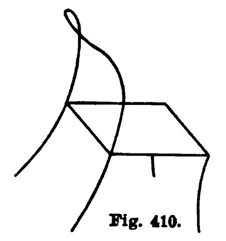
Verlängert man die einzelnen Kurvenelemente auch nach der andern Seite, so wird von ihnen *ein zweites Mantelstück* gebildet, das mit dem ersten Mantel längs der Raumkurve derart zusammenhängt, daß in jedem Punkte die Schmiegungsebene sich berührend zwischen beide Mäntel durchlegt (Fig. 409). Die beiden Mäntel berühren sich also längs der Raumkurve gleichfalls und hängen ähnlich wie die zwei Kurvenäste in einem Rückkehrpunkte zusammen. Jede Schnittebene schneidet daher die Fläche auch in einer Kurve, die in dem Schnittpunkt mit der Raumkurve einen *Rückkehrpunkt* besitzt.

Umgekehrt bezeichnet man daher auch die Raumkurve als die *Rückkehrkurve* der entwickelbaren Fläche.

Wir waren bei der Betrachtung der Raumkurven von der gesetzmäßigen Bewegung eines Punktes ausgegangen. Zwei unendlich nahe Lagen des Punktes bestimmten dabei die Tangente, durch die wiederum die Tangentenfläche erzeugt wurde, während drei unendlich nahe Lagen des Punktes die Schmiegungsebene bestimmten, durch welche die Fläche umhüllt wird. Umgekehrt kann man auch die *resiproken Betrachtungen* anstellen und von der gesetzmäßigen Bewegung einer Ebene ausgehen, die dabei eine Fläche umhüllt. Je zwei unendlich nahe Lagen dieser Ebene schneiden sich dabei in einer Geraden, die in ihrer Gesamtheit die Mantellinien der Fläche bilden; je drei unendlich nahe Lagen der Ebene schneiden sich in einem Punkte; alle so entstandenen Punkte bilden in ihrer Aufeinanderfolge eine Kurve, für welche die Mantellinien Tangenten sind. Die Raumkurve kann also aufgefaßt werden, sowohl als Punktgebilde, als auch als Tangentengebilde, als auch als Ebenengebilde.

113. Einteilung der Raumkurven. Nach dem Vorgang der analytischen Geometrie teilt man die Raumkurven in *transzendente* und *algebraische* ein, je nachdem sie mit einer Ebene eine unendliche oder endliche Anzahl von Schnittpunkten gemeinsam haben. Die algebraische Kurven teilt man wieder in *Ordnungen* ein, und zwar heißt eine Kurve von der n^{ten} Ordnung, wenn sie von einer Ebene in n Punkten geschnitten wird. Die niederste Ordnung ist die dritte. Ist die Raumkurve durch Bewegung einer Ebene erzeugt, so heißt sie dann von der n^{ten} *Klasse,* wenn von einem Punkte aus n Schmiegungsebenen an sie gelegt werden können. Auch die niederste Klasse einer Raumkurve ist die dritte.

114. Singularitäten und Besonderheiten. Im Verlaufe der Raumkurven treten, ähnlich wie bei den ebenen Kurven, dadurch Singularitäten auf, daß der erzeugende Punkt, die erzeugende Tangente und die erzeugende Schmiegungsebene in ihrer Bewegung stationär werden. Tritt dieses bei der Bewegung eines Punktes ein, so entsteht dadurch ein *Rückkehrpunkt,* tritt es bei der Bewegung einer Tangente ein, so wird der Kontingenzwinkel gleich Null, und die Kurve besitzt einen *Wendepunkt,* tritt es endlich bei der Bewegung der Schmiegungsebene ein, so wird der Torsionswinkel gleich Null, die Kurve steht dann


Fig. 410.

mit der Schmiegungsebene in einer *vierpunktigen Berührung*, und drei aufeinander folgende Kurvenelemente fallen in eine Ebene. In einem solchen Punkte bleibt die Kurve auf derselben Seite der Schmiegungsebene.

Ist für die Kurve eine Symmetralebene vorhanden, so besitzt die Kurve im Schnittpunkt mit derselben einen *Scheitelpunkt*; in diesem ist die Schmiegungsebene stets stationär. Ein solcher Punkt ist z. B. der oberste Punkt der Stuhllehne in Fig. 410.

Auch mehrfache Punkte können ähnlich wie bei den ebenen Kurven vorkommen.

115. Die Projektion einer Raumkurve. *Die Projektion einer Raumkurve auf eine Ebene ist eine ebene Kurve von derselben Ordnung wie die Raumkurve*; denn schneidet man die Raumkurve durch eine Ebene senkrecht zur Projektionsebene, so entspricht jedem Schnittpunkt der Raumkurve ein und nur ein Schnittpunkt ihrer Projektion mit der Schnittlinie der beiden Ebenen (Fig. 411). Umgekehrt darf man jedoch nicht von einer Projektion einer Raumkurve auf diese selbst schließen, da in der Projektion leicht Besonderheiten auftreten können, die die

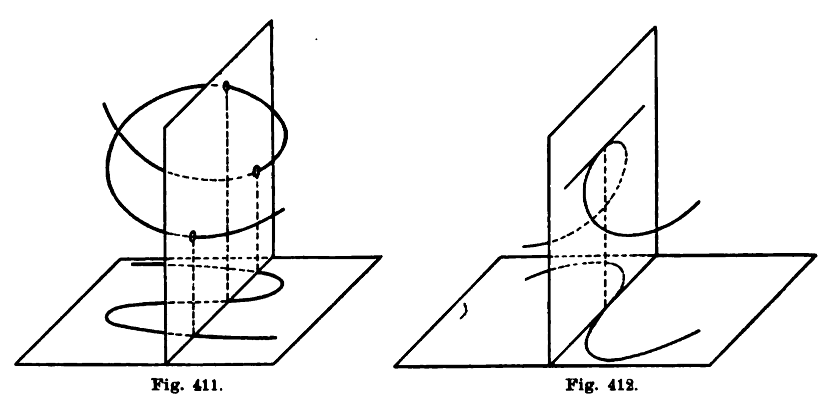


Fig. 411. Fig. 412.

Raumkurve selbst in den betreffenden Punkten nicht besitzt, die vielmehr nur durch eine besondere symmetrische Stellung der Raumkurve zur Projektionsebene auftreten können. Zwar projiziert sich eine Tangente der Raumkurve stets wieder als Tangente und ebenso ein Rückkehrpunkt als Rückkehrpunkt, ein Wendepunkt als Wendepunkt und ein mehrfacher Punkt als mehrfacher Punkt. Umgekehrt ist es aber *wohl möglich, daß ein Wendepunkt oder ein Rückkehrpunkt der ebenen Kurve die Projektion eines ganz gewöhnlichen Raumkurvenpunktes darstellt*; nur, wenn von der Raumkurve zwei Projektionen — Grund- und Aufriß —

gegeben sind, darf man mit Sicherheit von der Gestalt der ebenen Kurve auf die Gestalt der Raumkurve einen Schluß ziehen.

Die Projektion eines beliebigen Kurvenpunktes zeigt dann eine Besonderheit, *wenn die Schmiegungsebene des betreffenden Punktes senkrecht auf der Projektionsebene steht.* In diesem Falle projizieren sich die beiden Kurvenelemente, durch die die Schmiegungsebene gelegt ist, in eine Gerade. Hat dabei die Tangente zur Projektionsebene noch eine beliebige Lage, so entsteht ein *Wendepunkt*; *denn* in diesem liegen gleichfalls zwei Kurvenelemente in einer geraden Linie, und da die Raumkurve in dem betrachteten Punkte von einer Seite der Schmiegungsebene auf die andere übergeht, so muß auch die Projektion der Kurve von einer Seite der Tangente zur andern übergehen (Fig. 412). — *Steht aber außer der*

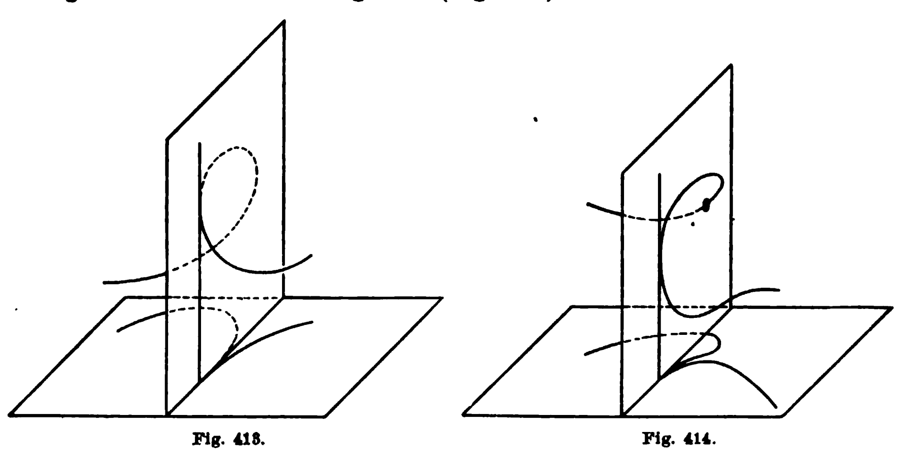


Fig. 413. Fig. 414.

Schmiegungsebene auch noch die Tangente senkrecht auf der Projektionsebene, so tritt die Raumkurve zwar auch auf die andere Seite der Schmiegungsebene; der Verlauf ihrer Projektion ist aber vom Fußpunkte der Raumkurventangente an rückwärts gerichtet; die Projektion erhält also eine *Spitze* (Fig. 413). Diese wird dann zum *Schnabelpunkte,* wenn die Raumkurve in dem betreffenden Punkte eine stationäre Schmiegungsebene besitzt, weil dann die Raumkurve auf derselben Seite der Schmiegungsebene bleibt, ihre Projektion also im Berührungspunkte zwar rückläufig wird, aber auf derselben Seite der Tangente bleibt (Fig. 414).

Es gilt das nicht bloß für orthogonale Parallelprojektionen, sondern auch für schiefe und ebenso für Zentralprojektionen. Stets, *wenn eine Tangente gleichzeitig Projektionsstrahl ist, ist die Projektion des Berührungspunktes ein Rückkehrpunkt.* Bei Zentralprojektion kann man sich leicht direkt davon überzeugen: Hält man einen als Raumkurve gebogenen

Draht so, daß die Tangente eines Punktes durch das Auge geht, so scheint die Kurve in diesem Punkte einen Rückkehrpunkt zu besitzen; geht nur die Schmiegungsebene durch das Auge, so erscheint ein Wendepunkt. Dieselben Verhältnisse lassen sich auch an dem Schatten einer Raumkurve experimentell nachweisen.

Im allgemeinen ist die Projektion eines beliebigen Bogenstückes einer Raumkurve von dreierlei Typus; entweder sie bildet eine *Schleife* oder, wenn die Projektionsebene so weit geneigt wird, daß die Tangente senkrecht auf ihr steht, eine *Spitze* oder endlich, wenn die Projektionsebene noch weiter geneigt wird, eine *Undulation* mit Wendepunkten.

116. Die Rektifizierung einer Raumkurve. Um *die wahre Länge einer Raumkurve* zu bestimmen, ist es notwendig, dieselbe zunächst in einer Ebene auszubreiten; das kann theoretisch am einfachsten dadurch geschehen, daß man die Tangentenfläche entwickelt. Praktisch ist dieses jedoch meist nicht nötig; vielmehr genügt es, wenn man

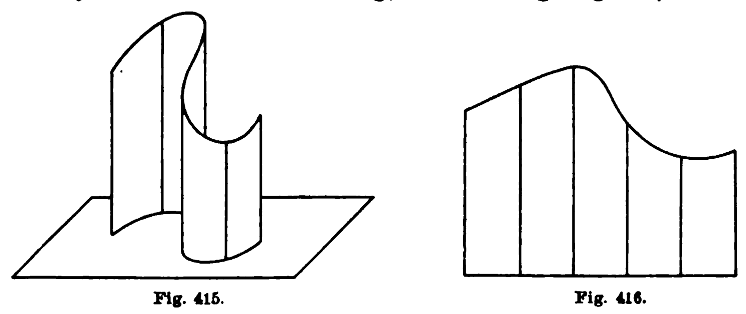


Fig. 415. Fig. 416.

irgendeine möglichst einfache entwickelbare Fläche durch die Kurve hindurchlegt und ausbreitet. Als einfachste entwickelbare Fläche bietet sich von selbst *der die Raumkurve projizierende Zylinder* dar (Fig. 415); wickelt man diesen ab, so wird die Projektion der Raumkurve zur geraden Linie, deren wahre Länge, mittels angemessen kleiner Zirkelöffnung, aus der Projektion zu entnehmen ist. Trägt man dann in den einzelnen Punkten dieser Geraden die wahren Längen der Zylindermantellinien — die Höhen der einzelnen Raumkurvenpunkte — senkrecht auf der Geraden ab, so erhält man die rektifizierte Raumkurve (Fig. 416).

Im nächsten Kapitel wollen wir als für die Technik wichtigstes Beispiel einer Raumkurve die Schraubenlinie genauer untersuchen.

XIII. Kapitel.

Die Schraubenlinie.

117. Definition und einfachste Projektion der Schraubenlinie. Bewegt sich ein Punkt, der in fester Verbindung, etwa durch eine senkrechte Speiche, mit einer Geraden steht, so um diese als Achse, daß, während der Punkt sich gleichmäßig um die Achse dreht, die Speiche proportional mit der drehenden Bewegung eine auf ihr fortschreitende Bewegung ausführt, so daß gleichen Drehungswinkeln gleiche Verschiebungsstrecken entsprechen, so beschreibt der Punkt eine *Schraubenlinie* (Fig. 417). Die Gerade, um die die Drehung erfolgt, heißt *Schraubenachse*, die Entfernung des

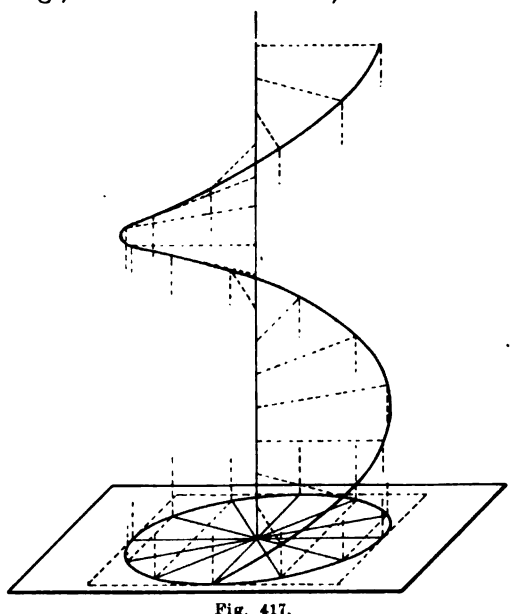


Fig. 417.

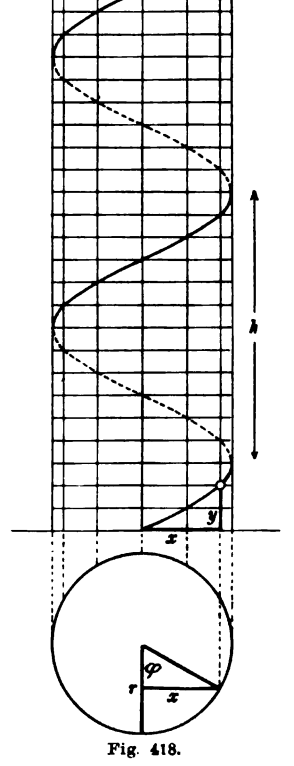


Fig. 418.

Punktes von ihr *Halbmesser*, die Verschiebung, die einer vollen Umdrehung von 360° entspricht, heißt *Ganghöhe* der Schraube. *Durch sie und den Halbmesser ist die Schraube bestimmt.*

Den einfachsten Grund- und Aufriß einer Schraubenlinie erhält man, wenn *die Achse senkrecht auf der Horizontalebene* steht (Fig. 418). In dieser drückt sich dann, da die Projektion der Achse als Punkt erscheint, die fortschreitende Bewegung nicht aus, während sich die Speiche,

da sie immer parallel der Projektionsebene ist, stets in wahrer Gestalt projiziert. *Die Horizontalprojektion ist* somit *ein Kreis.* Um die Vertikalprojektion zu bestimmen, sind in den einzelnen Kreispunkten die Höhen aufzutragen. Es geschieht das nach der Definition der Schraubenlinie dadurch, daß man den Kreis in etwa zwölf gleiche Teile teilt und die Teilpunkte auf die Vertikalprojektion des Kreises, die als gerade Strecke erscheint, hinauflotet, die Ganghöhe in ebenfalls zwölf gleiche Teile teilt und nun der Reihe nach in den einzelnen Kreispunkten die Höhen so aufträgt, daß einer Drehung von $\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \ldots$ eine Erhebung von $\frac{h}{12}, 2 \cdot \frac{h}{12}, \ldots$ entspricht. Auf diese Weise erhält man die Vertikalprojektion eines Umgangs der Schraubenlinie. Der zweite Umgang und ebenso jeder weitere ist dem ersten kongruent. Die Kurve kann in unendlich vielen Windungen nach beiden Seiten ins Unendliche verlängert werden. Sie ist also eine transzendente Kurve; daraus folgt, daß die Vertikalprojektion gleichfalls eine transzendente Kurve ist, deren Gleichung sofort hingeschrieben werden kann. Es ist nämlich:

$$x = r \cdot \sin \varphi \quad \text{und} \quad h : y = 2\pi : \varphi \quad \text{oder} \quad \varphi = \frac{2\pi}{h} \cdot y,$$

also:

$$x = r \cdot \sin \cdot \frac{2\pi}{h} \cdot y,$$

d. h. die Kurve ist eine *Sinusoide.*

Wenn die Schraubenlinie — *von außerhalb des Kreises aus* betrachtet — von links nach rechts aufsteigt, so heißt dieselbe *links gewunden,* andernfalls *rechts gewunden.* Die in der Technik benutzten Schrauben sind fast durchweg links gewunden.

118. Der Schraubenzylinder. Aus der Konstruktion der Schraubenlinie geht hervor, daß die die Kurve auf die Vertikalebene projizierende Zylinderfläche ein Kreiszylinder ist, dessen Mantellinien auf der kreisförmigen Horizontalprojektion der Schraubenlinie senkrecht stehen; man nennt diesen Kreiszylinder, auf dem die Schraubenlinie liegt, den *Schraubenzylinder.* Schneidet man den Mantel des Schraubenzylinders längs einer Mantellinie OL gleich der Ganghöhe auf (Fig. 419) und wickelt ihn ab, so wird der Grundkreis zu einer geraden Strecke, und das Mantelstück hat die Gestalt eines Rechtecks mit den Seiten $2 \cdot r \cdot \pi$ und h (Fig. 420 [in halbem Maßstabe von Fig. 419]). Für jeden Punkt X der Kurve ist Xx proportional zu Ox, *die Schraubenlinie wird also zur geraden Linie,* zur Diagonalen des Rechtecks; daraus

folgt weiter, daß die Schraubenlinie *eine geodätische Linie auf dem Mantel eines senkrechten Kreiszylinders* ist, und daß sie, da alle Mantellinien von ihr unter demselben Winkel geschnitten werden, *Loxodrome der Zylindermantellinien* ist. Auch geht daraus hervor, daß man die Schraubenlinie dadurch entstehen lassen kann, daß man eine Ebene mit einer geraden Linie um den Zylinder wickelt; dabei hat man, wenn man die

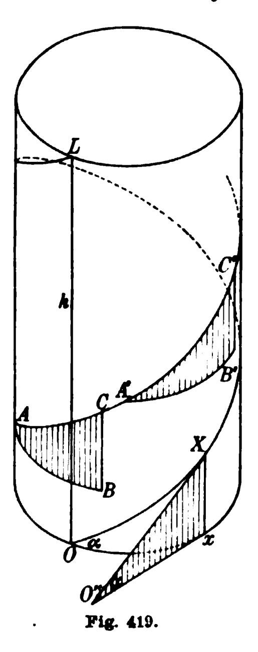


Fig. 419.

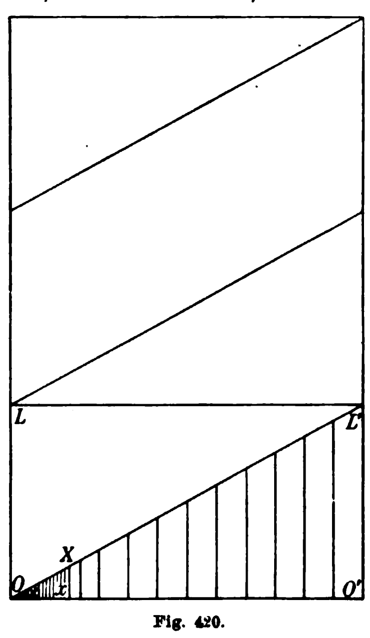


Fig. 420.

Schraubenlinie in ihrer unendlichen Ausdehnung erhalten will, entweder die Ebene und die Gerade unbegrenzt sich vorzustellen und sie unendlich oft um den Zylinder herumzuwickeln, oder man hat sich in der Ebene unendlich viele parallele Geraden zu denken, deren Entfernung voneinander in der Richtung der Mantellinien gleich der Ganghöhe ist (Fig. 420). Auf jeder Mantellinie liegen also unendlich viele Punkte der Schraubenlinie, die alle voneinander um die Ganghöhe entfernt sind.

119. Der Steigungswinkel der Schraubenlinie. Denkt man sich das Dreieck $OO'L'$ nur zum Teil abgewickelt bis zur Mantellinie Xx und in der Lage der Tangentialebene in Xx ausgespannt gehalten (Fig. 419), so ist das geradlinige Stück $O''X$ die Verlängerung des letzten Kurvenelementes, also Tangente. Da der Winkel $XO''x$ für jeden Punkt X derselbe ist, so ist auch der Horizontalneigungswinkel α aller Tangenten konstant; man nennt ihn den *Steigungswinkel* der Schraubenlinie.

Eine Schraubenlinie war durch den Radius r und die Ganghöhe h eindeutig bestimmt; durch das Verhältnis dieser beiden Größen $\frac{r}{h}$ oder *durch α ist die Gestalt der Schraubenlinie bestimmt.* Alle Schraubenlinien, für welche $\frac{r}{h}$ oder α gleichen Wert haben, sind einander *ähnlich*; für $\alpha = 0^0$ degeneriert die Schraubenlinie in einen *Kreis,* für $\alpha = 90^0$ in eine *Gerade.* Kreis und Gerade sind also als *Grenzformen der Schraubenlinie* aufzufassen.

120. Die Tangente der Schraubenlinie. In dem Dreieck $XO''x$ ist XO'' die Tangente, xO'' ihre Horizontalprojektion, und diese ist gleich

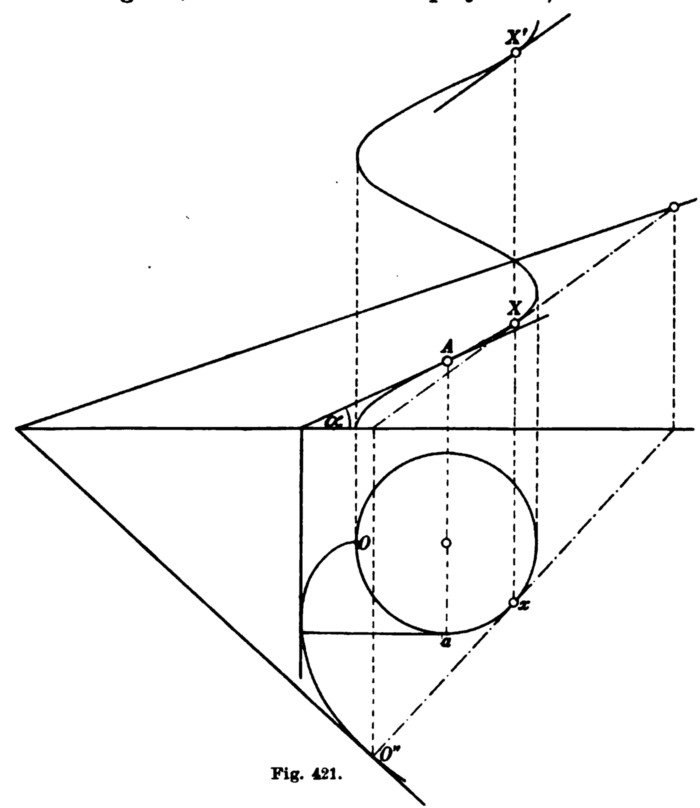


Fig. 421.

der wahren Länge des Kreisbogenstückes Ox (Fig. 419). Es kann also *die Horizontalspur der Tangente im Punkte* X dadurch ermittelt werden, daß man auf der Kreistangente in x von x aus die wahre Länge des Kreisbogenstückes Ox mittels kleiner Zirkelöffnung bis O'' abträgt, dann ist O'' die Horizontalspur der Tangente in X (Fig. 421).

Die Horizontalspuren aller Tangenten liegen somit auf der Kreisevolvente. Ist eine größere Anzahl von Tangenten zu zeichnen, so ist es zweckmäßig, zunächst die Evolvente zu konstruieren.

Die Tangenten für alle Punkte auf derselben Mantellinie sind parallel. Hat man daher in einem höheren Punkte X' eine Tangente zu zeichnen, so ist es zweckmäßig, die Konstruktion für den tiefsten auf derselben Mantellinie liegenden Punkt X auszuführen und zu der Tangente durch diesen Punkt eine Parallele durch den höher gelegenen zu ziehen (Fig. 421).

121. Schmiegungsebene der Schraubenlinie. Um die *Schmiegungsebene im Punkte X der Schraubenlinie zu ermitteln,* sei an die allgemeine Konstruktion derselben erinnert. Die Schmiegungsebene berührt die Tangentenfläche, die Spur der ersteren berührt also die Spur der letzteren. Bei der Schraubenlinie ist daher *die Horizontalspur der Schmiegungsebene Tangente an die Kreisevolvente* und somit ohne weiteres zu zeichnen (Fig. 421). Beachtet man noch, daß die Tangenten der Evolute die Normalen der Evolvente sind, so ist es nicht einmal nötig, die Evolvente selbst zu zeichnen. — Die Vertikalspur der Schmiegungsebene im Punkte X ist durch die Vertikalspur der Tangente in diesem Punkte bestimmt.

Im Punkte A ist die Tangente parallel zur Vertikalebene (Fig. 421). Die Horizontalspur der Schmiegungsebene dieses Punktes und damit diese selbst steht somit senkrecht auf der Vertikalebene. Die Kurve besitzt also hier einen *Wendepunkt.* Die Tangente in diesem Punkte ist *Wendetangente,* und da sie parallel mit der Vertikalebene ist, projiziert sie sich auf diese in wahrer Länge. Der Winkel, den ihre Vertikalprojektion mit der Projektionsachse bildet, ist somit gleich dem Steigungswinkel α der Schraubenlinie, und *ihre Horizontalprojektion vom Berührungspunkte bis zur Horizontalspur ist gleich der wahren Länge des vierten Teiles des Kreisumfangs.*

Fällt man von einem Punkte der Schraubenlinie eine Senkrechte auf die Achse derselben, so ist diese auch senkrecht auf der Tangente im betrachteten Punkte, also Normale. Im Punkte A steht sie senkrecht auf der Vertikalebene, und da die Schmiegungsebene dieses Punktes gleichfalls senkrecht auf der Vertikalebene steht, so ist für diesen Punkt ersichtlich, daß die betrachtete Normale in der Schmiegungsebene liegt, also *Hauptnormale* ist. Diese ist zur Konstruktion der Schmiegungsebene dann von Wichtigkeit, wenn der Spurpunkt der Tangente in dem betrachteten Punkte über das Zeichenblatt hinausfällt.

Endlich ist in dem Punkte A ersichtlich, daß auch die *Schmiegungsebene mit der Horizontalebene den Steigungswinkel* α der Schraubenlinie bildet.

122. Die verschiedenen Typen einer Projektion der Schraubenlinie. Bisher benutzten wir bei der Projektion der Schraubenlinie eine besonders einfache Lage derselben zur Projektionsebene. Ist eine andere Lage verlangt, so ist es doch zweckmäßig, von der bisherigen Lage auszugehen und die gewünschte Lage aus dieser durch *Drehen oder Transformieren* herzustellen. Ist z. B. derjenige Typus der Schraubenlinienprojektion verlangt, bei welchem Spitzen auftreten, so muß die Tangente dieses Punktes senkrecht auf der Projektionsebene stehen. Dreht man also die bisherige Vertikalprojektion so weit, daß die Wendetangente senkrecht auf der Projektionsachse steht, und das ist dann der Fall, *wenn man um einen Winkel von* $[90 - \alpha]^0$ *dreht, so projiziert sich der Wendepunkt in die nunmehrige Horizontalprojektion als Rückkehrpunkt* (Fig. 422). *Dreht man weniger, so bilden sich Schleifen, dreht man mehr, so entstehen Undulationen*; diese sind zunächst hinten spitzer als vorne; ist die Schraubenachse parallel zur Horizontalebene, so sind sie hinten und vorne gleich, dreht man noch weiter, so werden die hinteren stumpfer; der Kreis ist als spezieller Fall von Schleifen aufzufassen (Fig. 423).

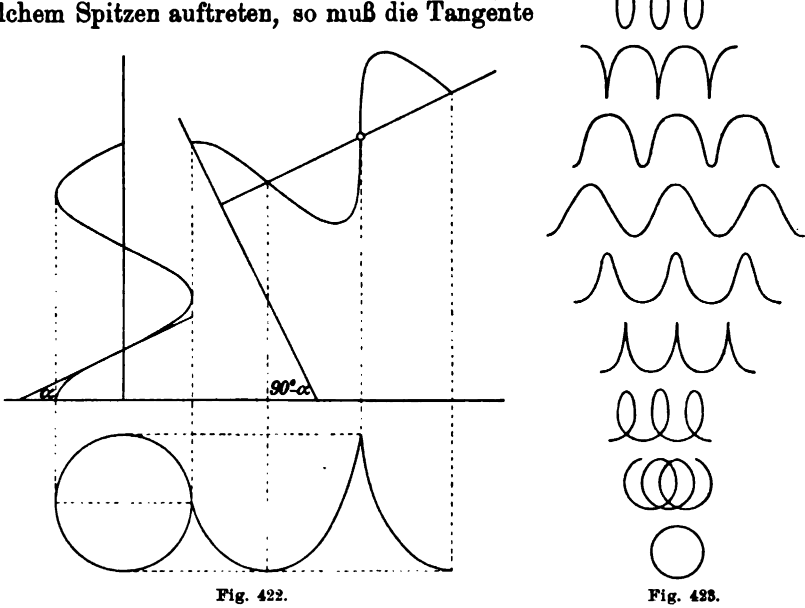
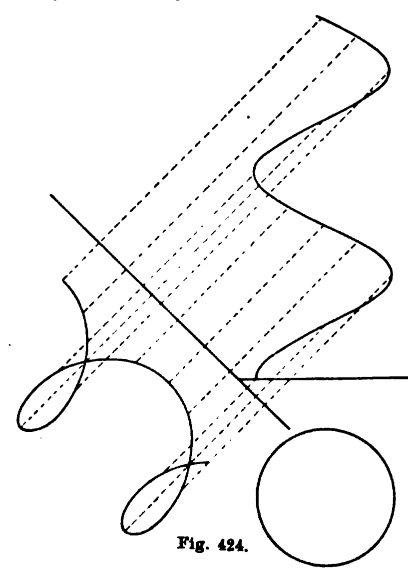


Fig. 422.

Fig. 423.

Dieselben Typen lassen sich auch durch Transformation herstellen. Steht die neue Projektionsachse senkrecht auf der Wendetangente, so erhält man Rückkehrpunkte, andernfalls Schleifen oder Undulationen (Fig. 424).

Übrigens ist es nicht schwer, *die Projektion der Schraubenlinie in schiefer Stellung auch direkt* herzustellen. Ist der Neigungswinkel der Achse gegen die Projektionsebene gegeben, so ist der Neigungswinkel des Grundkreises gleich dem Komplement dieses Winkels. Der Grundkreis projiziert sich dann als Ellipse, und wenn man diese unter Benutzung des Kreises konstruiert, so ergeben sich auf der Ellipse von selbst Punkte, die die Projektionen von Kreispunkten in gleichen Abständen sind. Die Projektion der Achse steht senkrecht auf der großen Achse der Ellipse. Teilt man das Stück der Schraubenachse, welches die Projektion der Ganghöhe ist, in ebenso viele gleiche Teile, wie auf der Ellipse markiert sind, und zieht von den aufeinander folgenden Teilpunkten aus Parallelen zu den aufeinander folgenden Ellipsenradien und macht die Parallelen ebenso lang wie die entsprechenden Radien, so bestimmen ihre Endpunkte die Projektion der Schraubenlinie in schiefer Stellung (Fig. 425).


Fig. 424.

Nach demselben Verfahren wird auch eine *axonometrische Zeichnung der Schraubenlinie* hergestellt, auch wenn es sich dabei nicht um orthogonale, sondern um schiefe Parallelprojektion handelt. Soll z. B. eine *Kavalierperspektive* der Schraubenlinie gezeichnet werden, so hat man wieder auf der Ellipse, die die Projektion des Grundkreises darstellt, Punkte so zu bestimmen, daß sie Projektionen von Kreispunkten in gleichen Abständen repräsentieren, und durch diese Punkte die Ellipsenradien zu legen (Fig. 417). Auf der Achse teilt man wieder das Stück, das die Projektion der ersten Ganghöhe ist, in ebenso viel gleiche Teile als Ellipsenradien gezeichnet wurden. Zieht man dann von den aufeinander folgenden Teilpunkten der Achse Strecken, die parallel und gleich den aufeinander folgenden Radien sind, so bestimmen die Endpunkte derselben die Kavalierperspektive einer Schraubenlinie.

Die angegebene Konstruktion erinnert an die Konstruktion der Zykloide. Diese Kurve wurde ebenso konstruiert, nur wurde statt der Ellipse ein Kreis benutzt. Parallelprojiziert man aber eine Zykloide, so wird aus dem Kreis wieder eine Ellipse; die Schraubenlinienprojektion ist also identisch mit der Zykloidenprojektion, oder die Schraubenlinienprojektion ist mit der Zykloide affin. Aus diesem Grunde sind auch die drei Typen der beiden Kurven dieselben. Es ist nicht auffällig, daß ein Zusammenhang zwischen Schraubenlinie und Zykloide besteht, denn das Bewegungsgesetz, durch welches die beiden Kurven erzeugt werden, ist dasselbe, beidemal führt nämlich ein Punkt gleichzeitig eine drehende und fortschreitende Bewegung aus, nur liegt bei der Zykloide die Achse in der Ebene des Kreises.

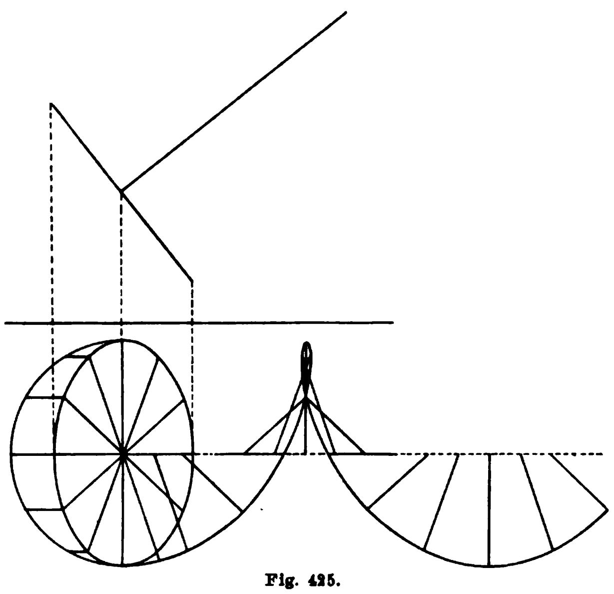


Fig. 425.

In einem besonderen Fall ist die Projektion der Schraubenlinie nicht nur affin, sondern identisch mit der Zykloide, nämlich dann, wenn die Schraubenlinie schief parallelprojiziert wird auf die Ebene ihres Grundkreises, was z. B. dann der Fall ist, wenn die Sonne einen Schlagschatten der Schraubenlinie auf die Ebene ihres Grundkreises wirft. Ist bei dieser Projektion der Horizontalneigungswinkel der Projektionsstrahlen gleich dem Steigungswinkel der Schraube, so existiert eine Schraubenlinientangente, die parallel den Projektionsstrahlen ist. Ihr Berührungspunkt projiziert sich dann als Rückkehrpunkt, und man erhält die gemeine Zykloide. Sind die Projektionsstrahlen steiler, so projiziert sich die Schraube als verkürzte, sind sie weniger steil, als verlängerte Zykloide.

123. Die Krümmung der Schraubenlinie. Wählt man auf dem Schraubenzylinder ein beliebiges krummflächiges Dreieck ABC, das von einer Mantellinie, dem Stück eines Parallelkreises und einem Stück der Schraubenlinie begrenzt wird, so kann man dasselbe mit einem entsprechenden Stück an einer anderen Stelle des Zylinders zur Deckung

bringen (Fig. 419); denn der Grundkreis AB kann mit einem beliebigen Parallelkreis so zur Deckung gebracht werden, daß A nach A' und B nach B' fällt; dann decken sich auch die senkrechten Mantellinien, und die entsprechenden Ordinaten sind, weil sie proportioniert den zugehörigen Kreisbogen sind, gleich lang; das Kurvenstück AC muß also auch das Kurvenstück $A'C'$ decken. Hieraus folgt die Eigenschaft der Schraubenlinie, die ihre eminente Bedeutung für die Technik bedingt, *daß sie in sich selbst verschoben werden kann.* Dieselbe Eigenschaft besitzen sonst nur noch die Gerade und der Kreis; da diese aber als Degeneration der Schraubenlinie aufgefaßt werden können, so kann man sagen, daß der Schraubenlinie allein die genannte Eigenschaft zukommt.

Denkt man sich die Schraubenlinie wieder aus einzelnen Elementen bestehend, so lassen sich drei aufeinander folgende Elemente auf Grund dieser Eigenschaft mit irgend drei anderen aufeinander folgenden Elementen zur Deckung bringen. Hieraus folgt, daß *alle Kontingenzwinkel und ebenso alle Torsionswinkel je unter sich gleich sind.* Alle Punkte der Schraube sind also gleich geartet und besitzen gleiche Krümmungs- und gleiche Torsionsverhältnisse. Die Schraubenlinie kann somit auch als Raumkurve definiert werden, die überall konstante Krümmung und überall konstante Torsion besitzt, sie ist also im Raume das Analogon zum Kreise in der Ebene, und *man kann sich die Schraubenlinie auch so entstanden denken, daß man vom Kreise ausgeht, und die von den einzelnen Kontingenzwinkeln gebildeten Flächenstreifen um einen konstanten Torsionswinkel dreht.*

124. Transformation der Schraubenlinie in eine ebene Kurve durch Abwicklung ihrer Tangentenfläche. Aus dem Schlußsatze des vorigen Paragraphen folgt, *daß die Transformation der Schraubenlinie in eine ebene Kurve durch Abwickeln der Tangentenfläche ein Kreis ist.* Da bei der Transformation einer Raumkurve die Kontingenzwinkel nicht verloren gehen, so muß der Radius des Kreises derselbe sein, wie der konstante Krümmungsradius der Schraubenlinie. Zur Bestimmung desselben eignet sich der Punkt A besonders, weil in ihm die Schmiegungsebene senkrecht auf der Vertikalebene steht (Fig. 426; vgl. auch Fig. 421). Diese Schmiegungsebene schneidet den Schraubenzylinder in einer Ellipse, deren große Achse gleich dem Stück der Wendetangente ist, das zwischen den Umrißmantellinien liegt, und deren kleine Achse gleich dem Durchmesser des Grundkreises ist. Da die beiden Elemente der Schraubenlinie, die in A aneinander stoßen, in der Schmiegungsebene und gleichzeitig auf dem Zylindermantel liegen, so gehören sie sowohl der Schrau-

benlinie als auch der Ellipse an. Der Kontingenzwinkel der Schraube und der Ellipse ist somit in diesem Punkte derselbe. Der Krümmungshalbmesser der Schraubenlinie ist also gleich dem Krümmungshalbmesser der Ellipse im Endpunkte der kleinen Achse, also gleich $\frac{a^2}{b}$, wenn a und b die Halbachsen der Ellipse bezeichnen. In unserem Falle ist a gleich der halben Wendetangente und b gleich dem Radius des Grundkreises. Es läßt sich somit der gesuchte Krümmungsradius aus einem rechtwinkligen Dreieck bestimmen, dessen Höhe gleich der halben Wendetangente und dessen einer Hypotenusenabschnitt gleich dem Radius des Grundkreises ist; die gesuchte Strecke ist dann gleich dem anderen Hypotenusenabschnitt (Fig. 426).

Um auf dem mit dem so gefundenen Radius gezeichneten Kreise, der die Transformation der Schraubenlinie darstellt, dasjenige Stück zu bestimmen, das einem Umgang entspricht, ist zunächst ein Schraubenumgang zu rektifizieren; dieses erübrigt sich jedoch dadurch, daß man in der Tangente des Punktes A vom Berührungs- bis zum Spurpunkt bereits den vierten Teil eines Schraubenumganges hat. Dieser ist somit nur noch viermal hintereinander auf dem zuletzt gezeichneten Kreise abzutragen (Fig. 426).

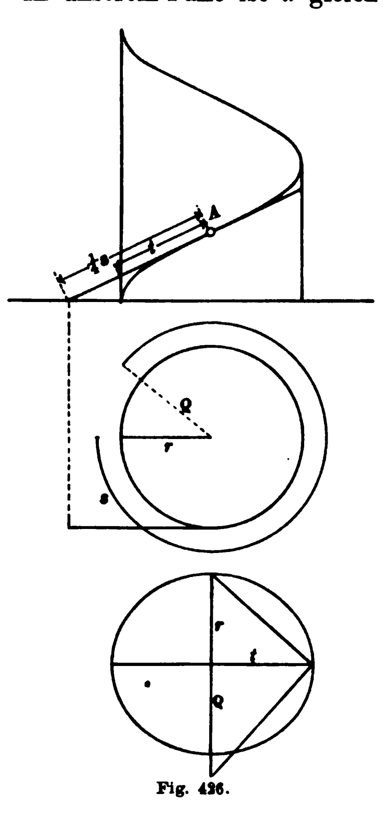


Fig. 426.

Die Ausführung der Abwicklung der Tangentenfläche führt bereits in die Theorie der krummen Flächen und wird daher erst im nächsten Kapitel besprochen werden.

V. Teil.

Entwickelbare Flächen.

XIV. Kapitel.

Krumme Flächen im allgemeinen.

125. Definition und Einteilung der krummen Flächen. *Bewegt sich eine Kurve im Raume so, daß ihre Lage und oft auch ihre Gestalt sich nach bestimmtem Gesetze ändern, so beschreibt die Kurve eine krumme Fläche.* Das Gesetz muß dabei mathematisch ausdrückbar sein und in keinem Moment einen Zweifel oder eine Zweideutigkeit über die nächstfolgende Lage der Kurve lassen. Die Kurve heißt die *Erzeugende.* Je nach der Natur der Erzeugung teilt man die Flächen in *Familien* ein. Die wichtigsten Familien sind die folgenden:

I. *Die Regelflächen* sind Flächen, die durch gesetzmäßige Bewegung einer geraden Linie erzeugt werden, und enthalten daher unendlich viele geradlinige Mantellinien; sie zerfallen in a) *entwickelbare Regelflächen,* bei denen je zwei aufeinander folgende Lagen der Erzeugenden sich schneiden, z. B. die Tangentenfläche einer Raumkurve, und b) *windschiefe Regelflächen,* bei denen zwei aufeinander folgende Lagen der Erzeugenden windschief sind.

II. Bei *den Rückungsflächen* ist die Erzeugende eine ebene Kurve, die sich parallel mit sich selbst und sich kongruent oder ähnlich bleibend bewegt. Der Weg und die Dimensionen der Erzeugenden werden dabei meist durch *Leitlinien* bestimmt. Diese Familie, bei der das Erzeugungsgesetz sehr allgemein ist, umfaßt daher auch eine ganze Reihe von Flächen; so gehören vor allem hierher: a) *die Rotations- oder Umdrehungsflächen* und b) *die Flächen zweiter Ordnung.*

III. *Die Spiralflächen* werden dadurch erzeugt, daß eine Kurve einer schraubenlinigen Bewegung unterworfen wird. Die wichtigsten Spiralflächen sind die *windschiefen Schraubenflächen,* bei denen die Erzeugende eine gerade Linie ist.

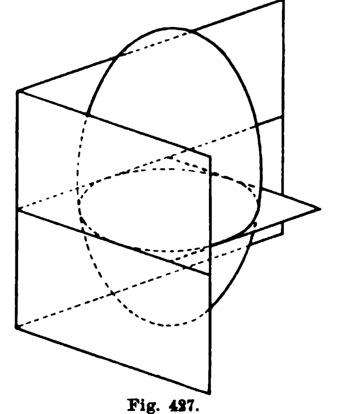
Die analytische Geometrie stellt die Flächen durch Gleichungen dar und teilt sie nach deren Natur ein. Diese drückt sich in der Anzahl von Schnittpunkten aus, die die Fläche mit einer Geraden besitzt. Ist die Anzahl der Schnittpunkte eine endliche, so heißt die Fläche *„algebraisch“,* ist sie unendlich, *transzendent.* Die algebraischen Flächen

teilt man je nach der Anzahl der Schnittpunkte in *Ordnungen* ein; eine Fläche heißt von der n^{ten} Ordnung, wenn sie mit einer Geraden n Schnittpunkte gemein hat, von denen einzelne, gerade so wie bei den Kurven, *imaginär* sein können.

Die Fläche erster Ordnung ist die Ebene, die Flächen zweiter Ordnung sind besonders wichtig; da sie von jeder Geraden nur in zwei Punkten geschnitten werden, so kann jede durch eine Ebene aus ihr herausgeschnittene Kurve auch nur in zwei Punkten von einer Geraden geschnitten werden; eine Fläche zweiter Ordnung wird daher von jeder Ebene in einem Kegelschnitt geschnitten. Allgemein gilt, *eine Fläche* n^{ter} *Ordnung wird von jeder Ebene in einer Kurve* n^{ter} *Ordnung geschnitten;* umgekehrt darf man aber von der Ordnung einer beliebig herausgeschnittenen Kurve nicht auf die Ordnung der Fläche schließen, da *die Kurve* häufig *in eine Kurve niederer Ordnung degeneriert.* Jede Rotationsfläche besitzt z. B. eine Schar paralleler Kreise, ohne deshalb von der zweiten Ordnung sein zu müssen.

Die analytische Einteilung der Flächen steht in keiner Beziehung zur Familieneinteilung, auch *kann ein und dieselbe Fläche mehreren Familien zugleich angehören. Für die konstruktive Behandlung der Flächen ist die Einteilung in Familien zweckmäßiger, da die Darstellung der Flächen in engster Beziehung zu ihrer Erzeugung steht.*

Fallen bei einer Sekante einer Fläche zwei benachbarte Schnittpunkte zusammen, so wird dieselbe zur *Tangente.* Diese berührt alle Schnittkurven, die von den durch sie hindurchgehenden Ebenen aus der Fläche herausgeschnitten werden. In einem Punkte gibt es unendlich viele Tangenten, die alle in einer Ebene liegen; denn würden dieselben einen Kegel bilden, so hätten die Schnittkurven Ecken. Diese Ebene heißt *Tangentialebene* des Punktes. Sie ist durch die beiden Tangenten zweier beliebiger durch den Punkt gehenden Schnittkurven bestimmt. Die Senkrechte auf der Tangentialebene im Berührungspunkte heißt *Normale.*

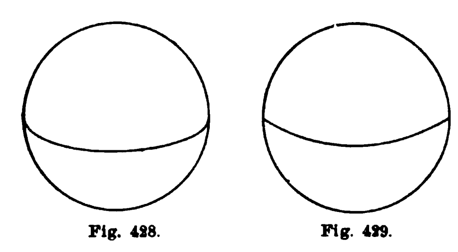

Fig. 427.

Kann man an eine Fläche durch eine Gerade n Tangentialebenen legen, so heißt die Fläche von der n^{ten} *Klasse. Die Flächen zweiter Ordnung sind auch von der zweiten Klasse.* Schneidet man nämlich eine Fläche zweiter Ordnung durch eine beliebige Ebene, so wird die Fläche in einem Kegelschnitt, und jede Tan-

gentialebene in einem Punkte desselben, in einer seiner Tangenten geschnitten (Fig. 427). Da von einem Punkte der Schnittebene nur zwei Tangenten an die Schnittkurve gelegt werden können, so können auch nur zwei Tangentialebenen an die Schnittkurve gelegt werden.

126. Darstellung der krummen Flächen. Würde man eine krumme Fläche durch ihre Spuren in der Horizontal- und Vertikalebene darstellen, so würde das deshalb nicht genügen, weil die beiden Spuren weder ein plastisches noch ein bestimmtes Bild der Fläche geben. Vielmehr ist es notwendig, die Fläche dadurch in charakteristischer Weise zur Darstellung zu bringen, daß man *ein Skelett* derselben zeichnet, *das durch eine Reihe von auf der Fläche liegenden Kurven gebildet wird.* Dabei wird man natürlich nicht nur möglichst einfache Kurven zur Bildung des Skelettes auswählen, sondern vor allem auch solche Kurven, die in einer bestimmten Beziehung zu der Natur der Fläche stehen. Somit eignen sich zur Darstellung einer krummen Fläche besonders *eine Anzahl von Lagen der Erzeugenden.* Infolgedessen *erfahren alle Flächen, die ein gleiches Erzeugungsgesetz besitzen, auch eine gleiche Darstellungsweise und konstruktive Behandlung.*

Von besonderer Wichtigkeit bei der Darstellung von Flächen ist auch die Einzeichnung des *Umrisses* derselben. Er entsteht dadurch, daß man eine Gerade in der Richtung der Projektionsstrahlen an der Fläche als Tangente entlang gleiten läßt und diese die Fläche berührenden Projektionsstrahlen zum Schnitt mit der Projektionsebene bringt; *bei Parallelprojektionen* bilden diese Projektionsstrahlen die Mantellinien eines *Zylinders, bei Zentralprojektionen* diejenigen eines *Kegels. Der Umriß ist zugleich das Bild der Berührungskurve, in welcher der Berührungszylinder, bzw. -kegel die Fläche berührt, und trennt diejenigen Teile der Fläche, die — in der Projektionsrichtung gesehen — sichtbar sind, von denjenigen, die unsichtbar sind.*


Fig. 428. Fig. 429.

Liegt auf einer Fläche eine Kurve, von der ein Teil auf der sichtbaren, ein anderer auf der unsichtbaren Seite der Fläche liegt, so muß *die Projektion der Kurve den Umriß berühren.* (Vgl. die richtige Figur 428 mit der falschen Figur 429.) Dieselbe kann sich nur in ganz bestimmten Fällen, wie sie in § 115 mitgeteilt sind, mit einer Spitze auf den Umriß aufsetzen. Im Berührungspunkte findet auch für die Kurve ein Übergang von

sichtbar zu unsichtbar statt. — *Ist eine Fläche als Skelett einer Reihe von auf ihr liegenden Kurven dargestellt, so erscheint somit ihr Umriß als Umhüllungskurve der letzteren.*

Als Fundamentalaufgaben bei der konstruktiven Behandlung krummer Flächen erscheinen stets die Aufgaben: erstens, es soll eine beliebige Lage der Erzeugenden konstruiert werden, zweitens, es soll die Projektion eines Punktes ermittelt, drittens, es soll die Tangentialebene in einem bestimmten Punkte oder die Tangente in bestimmter Richtung gefunden und viertens, es soll der Umriß ermittelt werden. — Bei allen Konstruktionen tritt eine wesentliche Erleichterung dadurch ein, daß die Fläche zur Projektionsebene eine bestimmte symmetrische Lage besitzt. Ist das nicht der Fall, so hilft eine *Transformation* fast immer über Schwierigkeiten hinweg.

XV. Kapitel.

Entwickelbare Flächen.

127. Entwickelbare Flächen im allgemeinen. Eine entwickelbare Regelfläche wird durch die gesetzmäßige Bewegung einer Geraden erzeugt, und zwar muß *das Bewegungsgesetz derart* sein, *daß zwei aufeinander folgende Lagen der Erzeugenden sich schneiden*, denn nur dann können die einzelnen, zwischen zwei aufeinander folgenden Lagen der Geraden liegenden, unendlich schmalen Flächenstreifen der Reihe nach in eine Ebene umgelegt werden. Von der Betrachtung der Tangentenfläche einer Raumkurve her wissen wir schon, daß die aufeinander folgenden Schnittpunkte der Erzeugenden eine Kurve bilden, welche für die entwickelbare Fläche eine *Rückkehrkurve* ist, *deren Tangenten von den einzelnen Lagen der Erzeugenden gebildet werden.*

Jede Tangentialebene berührt eine solche Fläche längs einer Mantellinie, es degeneriert also der den Umriß der Fläche bestimmende Berührungszylinder, bzw. -kegel zu einer Ebene; *der Umriß der Fläche ist* somit *geradlinig* und wird von Mantellinien gebildet. Selbstverständlich handelt es sich dabei um die Fläche in unbegrenzter Ausdehnung; soll nur ein begrenztes Stück der Fläche dargestellt werden, so treten außer diesen Umrißmantellinien noch andere Umrißkurven hinzu, deren Gestalt von der das Flächenstück begrenzenden Kurve abhängig ist, mit der Fläche selbst aber nichts zu tun hat.

Eine entwickelbare Regelfläche kann auch durch gesetzmäßige Bewegung einer Ebene erzeugt werden. Dabei ist das einfachste Bewegungsgesetz

durch die Bedingung ausgedrückt, daß die Ebene beständig zwei gegebene Kurven berührt. Die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte, die durch eine bestimmte Lage der Ebene erzeugt werden, ist dann eine Mantellinie der Fläche.

Derartig erzeugte Flächen finden in der Technik häufig Verwendung; sie mögen *Wannenflächen* heißen. Meist sind die beiden Leitkurven ebene Kurven. Es ist dann nicht schwer für jeden Punkt einer der beiden Leitkurven die durch ihn gehende *Mantellinie zu konstruieren* (Fig. 430). Man hat zu diesem Zwecke nur die Tangente in dem gegebenen Punkte an die Kurve, auf der er liegt, und ihren Schnittpunkt mit der Ebene der anderen Kurve zu bestimmen. Legt man dann von diesem Punkte

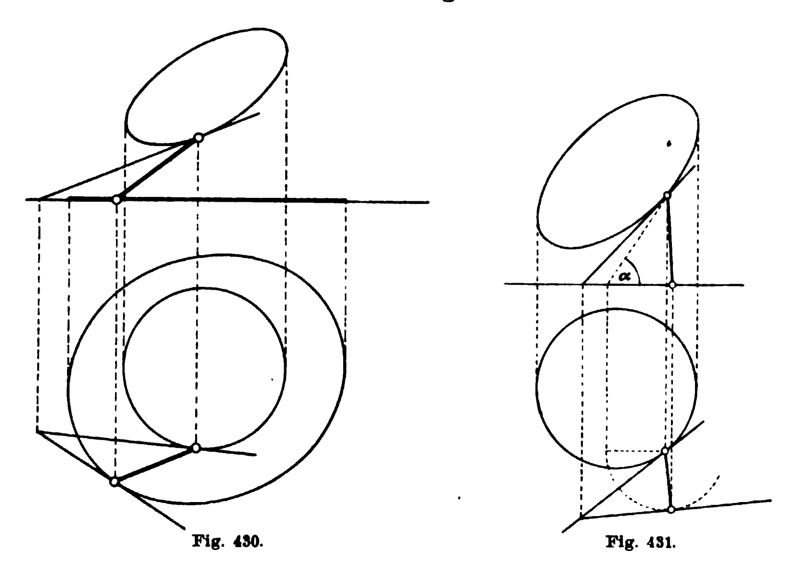


Fig. 430. Fig. 431.

eine Tangente an die andere Leitkurve, so bestimmt ihr Berührungspunkt durch seine Verbindungslinie mit dem gegebenen Punkte die gesuchte Mantellinie.

Auch dadurch wird eine entwickelbare Regelfläche sehr einfach bestimmt, daß das Bewegungsgesetz der Erzeugenden einer Geraden vorschreibt, an einer gegebenen Kurve entlang zu gleiten und in jeder Lage mit der Horizontalebene einen konstanten Winkel α zu bilden. Derart erzeugte Flächen werden als *Böschungsflächen* häufig benutzt. Zur *Konstruktion der* durch einen gegebenen Punkt gehenden *Mantellinie* ziehe man durch diesen Punkt die Tangente an die Leitkurve und bestimme ihre Spur (Fig. 431). Alsdann stelle man einen geraden Kreiskegel, dessen Basiswinkel gleich α ist, so auf der Horizontalebene auf, daß

seine Spitze in dem gegebenen Punkte liegt, und ziehe von der zuerst bestimmten Spur aus eine Tangente an seinen Grundkreis. Der Berührungspunkt derselben bestimmt dann durch seine Verbindungslinie mit dem gegebenen Punkte die gesuchte Mantellinie.

Die wichtigsten entwickelbaren Regelflächen sind die entwickelbaren Schraubenflächen und vor allem die Zylinder- und Kegelflächen.

128. Die entwickelbare Schraubenfläche. Zu der entwickelbaren Schraubenfläche waren wir bereits in § 120 gelangt und hatten dieselbe erkannt als diejenige Fläche, die von der Gesamtheit aller Tangenten der Schraubenlinie gebildet wird. Demgemäß wird diese Fläche auch *dargestellt durch eine Reihe von Mantellinien, von denen die Umrißmantellinien besonders wichtig sind* (Fig. 432). *Die Spur der Fläche in der Horizontalebene ist die Kreisevolvente,* so daß die Fläche auch dadurch entstanden gedacht werden kann, daß sich eine Ebene so bewegt, daß sie gleichzeitig die Schraubenlinie und diese Kreisevolvente berührt.

Am Schlusse des § 124 wurde *die Abwicklung der entwickelbaren Schraubenfläche* bereits so weit vorbereitet, daß die Schraubenlinie selbst durch Umlegung aller Schmiegungsebenen zu einer ebenen Kurve und zwar zu einem Kreise transformiert wurde. Auch die Länge desjenigen Kreisbogens, der einem Umgange der Schraubenlinie entspricht, war bereits ermittelt. Da die Mantellinien der Fläche Tangenten der Raumkurve sind, so müssen dieselben bei der Abwicklung wiederum Kreistangenten an die abgewickelte Schraubenlinie sein. Trägt man auf diesen vom Berührungspunkte aus die wahren Längen der Mantellinien ab, so erhält man diejenige Kurve, in die die Horizontalspur der Fläche bei der Abwicklung übergeht.

Nun sind aber diese Mantellinienstücke gleich den rektifizierten Schraubenlinienbogen und diese wiederum gleich den entsprechenden Kreisbogenlängen der abgewickelten Schraubenlinie. Daher *ist die Abwicklung der Horizontalspur der Fläche wiederum eine Kreisevolvente* und zwar diejenige des Kreisbogenstückes, in das sich ein Umgang der Schraubenlinie transformiert hat (Fig. 432).

Bisher wurde nur von dem nach unten gestülpten Mantel der Fläche gesprochen. Der andere Mantel, der in der Schraubenlinie mit dem ersten, diesen berührend, zusammenhängt, ist demselben kongruent, nur aufwärts gestülpt. Seine Entwicklungsfigur ist daher der aus dem ersten Mantel erhaltenen kongruent. Es läßt sich also leicht *ein Modell eines doppelmanteligen Stückes der entwickelbaren Schraubenfläche,* das einem Umgange der Schraube entspricht, dadurch herstellen,

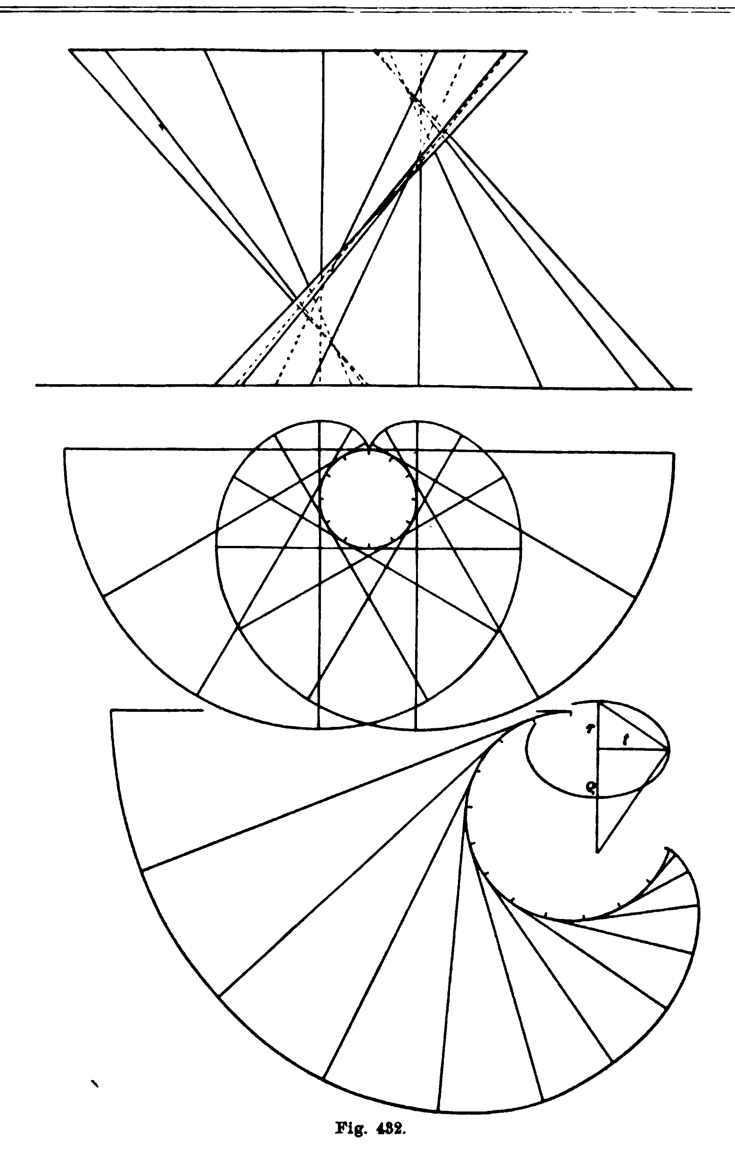


Fig. 432.

daß man die zuerst erhaltene Abwicklungsfigur zweimal aus biegsamem Karton ausschneidet, beide Stücke in symmetrischer Stellung, Kreisbogen auf Kreisbogen, aufeinander legt und längs des letzteren durch einen schmalen Leinwandstreifen zusammenklebt.

Die Eigenschaften der Tangentenfläche der Schraubenlinie sind bereits besprochen. Alle Tangentialebenen haben gleiche Horizontalneigung, die Fläche kann daher auch durch eine Ebene erzeugt werden, die die

Schraubenlinie beständig berührt und konstanten Horizontalneigungswinkel besitzt, sie erscheint dann als *Böschungsfläche.*

Schneidet man auf allen Tangenten vom Berührungspunkte aus gleiche Strecken ab, so projizieren sich dieselben in die Horizontalebene gleich groß. Da das windschiefe Viereck $XxTt$ sich stets kongruent bleibt (Fig. 433), so bilden die Endpunkte der Tangenten wieder eine Schraubenlinie, die sich als konzentrischer Kreis zum Kreise der ursprünglichen Schraubenlinie projiziert. Die zweite Schraubenlinie kann daher auch als Schnittkurve des sie projizierenden Zylinders und der Schraubenfläche aufgefaßt werden. Daher *existieren auf einer entwickelbaren Schraubenfläche unendlich viele konaxiale Schraubenlinien mit gemeinschaftlicher Ganghöhe, die von konaxialen Zylindern aus der Fläche herausgeschnitten werden.*

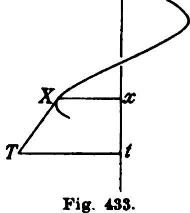


Fig. 433.

Denkt man sich nun wieder die Fläche in unendlicher Ausdehnung, so hat jeder Mantel unendlich viele Windungen. Der nach abwärts gestülpte Mantel ist dabei zu vergleichen mit einem spiralförmigen Zelte, das unendlich viele Windungen besitzt. Beide Mäntel kommen dann miteinander in Kollision, so daß *Selbstdurchschnitte der Fläche* entstehen.

Trägt man auf allen Tangenten nach beiden Richtungen gleiche Strecken ab, die nicht ganz bis an den ersten Selbstdurchschnitt der Fläche heranreichen, so entsteht eine Fläche, die *doppelte Kragenfläche* genannt werden möge. Um eine solche zu zeichnen, geht man besser anstatt von der inneren Schraubenlinie von den beiden Endschraubenlinien aus (Fig. 434).

Der Umriß der Fläche ist wie bei allen entwickelbaren Flächen geradlinig und wird von den gemeinschaftlichen Tangenten an die Endschraubenlinie gebildet. Der Halbmesser r der inneren Schraubenlinie wird aus der Ganghöhe h und dem Steigungswinkel α dadurch ermittelt, daß man ein rechtwinkliges Dreieck konstruiert, in dem ein Winkel gleich α und eine Kathete gleich $\frac{h}{2}$ ist; die andere Kathete ist dann gleich dem halben Kreisumfange, in den sich die innere Schraubenlinie projiziert, also gleich $r \cdot \pi$. Der Radius r selbst ist also gleich $\frac{7}{22}$ dieser horizontalen Kathete. Die Abschlußmantellinie wird als Tangente an die innere Schraubenlinie bestimmt.

Soll *die Fläche* gerade *bis zum ersten Selbstdurchschnitt* dargestellt werden, so zeichnet man wiederum diesen zweckmäßig zuerst. Derselbe

ist gleichfalls eine konaxiale Schraubenlinie, deren gemeinschaftliche Tangenten den Umriß der Fläche bilden. Der Radius der inneren Schraubenlinie und die Abschlußmantellinie werden wie bei der doppelten Kragenfläche bestimmt (Fig. 435).

Daß der erste Selbstdurchschnitt der Fläche und ebenso alle übrigen Selbstdurchschnitte konaxiale Schraubenlinien sind, geht aus folgendem her-

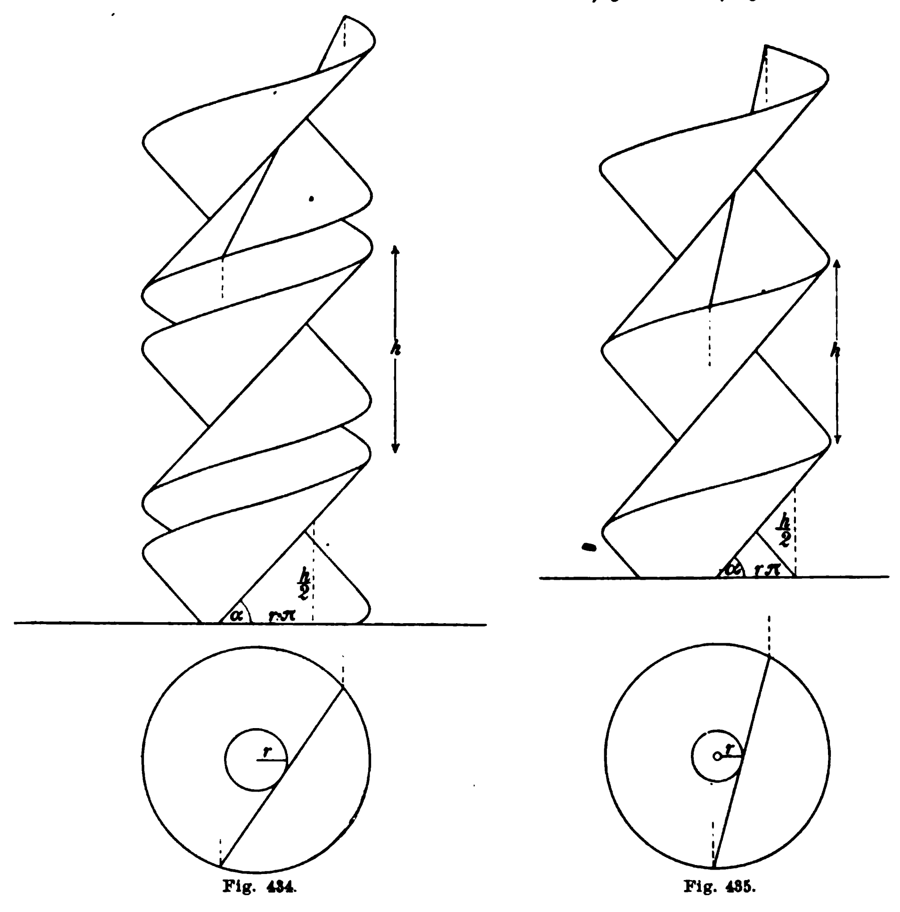


Fig. 434. Fig. 435.

vor. Die Gesamtspur der Fläche ist eine vollständige Evolvente mit einem Rückkehrpunkte in ihrem Ursprung; diese hat verschiedene Selbstdurchschnitte, die den zu untersuchenden Schnittkurven angehören. Jede horizontale Ebene schneidet die Fläche in einer kongruenten Evolvente, deren Rückkehrpunkt immer auf der Schraubenlinie liegt. Die jeweilige Lage der Evolvente kann also dadurch erreicht werden, daß die Evolvente der Horizontalebene parallel mit sich selbst verschoben wird und

sich gleichzeitig dabei so dreht, daß der Rückkehrpunkt auf der Schraubenlinie entlang gleitet. Jeder andere Punkt der Evolvente, also auch ihre Selbstdurchschnitte, von denen dabei die Selbstdurchschnitte der Fläche erzeugt werden, beschreiben dabei eine konaxiale Schraubenlinie.

129. Kegel- und Zylinderflächen im allgemeinen. *Bewegt sich eine gerade Linie so, daß sie durch einen festen Punkt geht, und an einer Leitkurve ständig entlang gleitet, so beschreibt sie eine Kegelfläche;* bei dieser schneiden sich demnach alle Erzeugenden in einem Punkte, der *„Spitze“* heißt und der als *Degeneration der Rückkehrkurve* für die Kegelfläche aufzufassen ist. *In ihm hängen die beiden Mäntel der Fläche zusammen, die symmetrische Gestalt besitzen* und gemeinsam die vollständige Fläche ausmachen (Fig. 436).

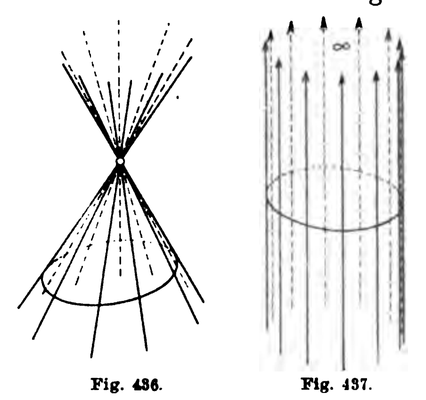


Fig. 436. Fig. 437.

Fällt die Spitze des Kegels ins Unendliche, so beschreibt die Erzeugende eine Zylinderfläche, sie gleitet dabei, sich selbst parallel bleibend, an einer Leitkurve entlang (Fig. 437).

Die Worte „Zylinder“ und „Kegel“ bezeichnen sowohl eine Fläche als auch einen Körper; soll besonders hervorgehoben werden, daß die Fläche gemeint ist, so bezeichnet man dieselbe zweckmäßig als Zylinder-, bzw. Kegelmantel. Im folgenden ist, wenn nichts besonderes gesagt wird, mit den Worten Zylinder und Kegel stets die Fläche gemeint.

Für die Eigenschaften eines Zylinders oder Kegels ist die Gestalt der Leitkurve von keiner hervorragenden Bedeutung, liegt die Fläche fertig vor, so kann man nachträglich jede beliebige auf ihr liegende Kurve als Leitkurve ansehen.

Im allgemeinen sind die Eigenschaften des Zylinders und Kegels dieselben, wie diejenigen eines Pyramiden-, bzw. Prismenmantels. *Ein Kegel, bzw. ein Zylinder kann aufgefaßt werden als eine Pyramide, bzw. ein Prisma, deren Grundpolygon unendlich viele, dafür aber unendlich kleine Seiten hat, also zu einer Kurve degeneriert ist. Die Kanten entsprechen dabei den Mantellinien, d. h. den einzelnen Lagen der Erzeugenden.*

Ein Kegel kann auch *durch Umhüllung einer Ebene* erzeugt werden, die sich so bewegt, daß sie stets durch einen festen Punkt — die Spitze — hindurchgeht und dabei an einer Leitkurve entlang gleitet

(Fig. 438). Eine Zylinderfläche kann durch Umhüllung einer Ebene erzeugt werden, die gleichzeitig an zwei ebenen Kurven entlang gleitet, von denen aber die eine eine Parallelprojektion der andern sein muß;

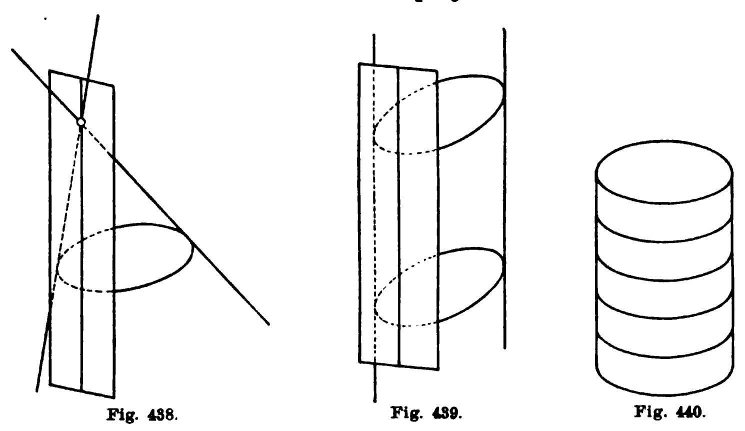


Fig. 438. Fig. 439. Fig. 440.

am einfachsten sind dieselben dabei zwei ebene, parallele und kongruente Kurven (Fig. 439).

Auch als Rückungsflächen können Zylinder und Kegel aufgefaßt werden, derart, daß ein Zylinder von einer ebenen Kurve erzeugt wird, wenn dieselbe sich parallel und kongruent mit sich selbst so bewegt, daß ein Punkt der Erzeugenden eine gerade Linie beschreibt (Fig. 440).

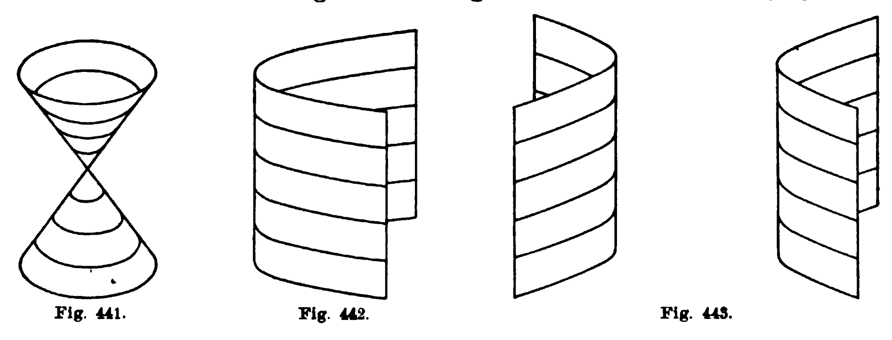


Fig. 441. Fig. 442. Fig. 443.

Verändert die erzeugende Kurve sich bei dieser Bewegung so, daß sie sich selbst ähnlich bleibt, und ein zweiter Punkt der Kurve gleichzeitig auf einer zweiten Geraden wandert, die die erste schneidet, so entsteht ein Kegel (Fig. 441).

Bei einem Kegel kann jede beliebige Schnittkurve als die Zentral-Projektion einer anderen betrachtet werden; allen diesen Kurven sind daher die projektivischen Eigenschaften gemein; diese übertragen sich auch auf den Kegel selbst. *Jede Singularität der Leitkurve, als: Doppel-*

punkt, Rückkehrpunkt, Wendepunkt usw. veranlaßt eine singuläre Mantellinie. Die Ordnung der Leitkurve, falls dieselbe eine ebene Kurve ist, bestimmt auch die Ordnung des Kegels; *ist* also *die Leitkurve von der zweiten Ordnung, so ist auch der Kegel eine Fläche zweiter Ordnung;* zerfällt dabei die Leitkurve in zwei gerade Linien, also zwei Kurven der ersten Ordnung, so zerfällt auch der Kegel in zwei Ebenen, d. h. in zwei Flächen der ersten Ordnung. Dagegen hat der Typus der Leitkurve keinen Einfluß auf den Typus des Kegels. *Jeder Kegel zweiter Ordnung ist gleichzeitig ein elliptischer, parabolischer und hyperbolischer Kegel,* weil jeder Typus eines Kegelschnittes als Zentralprojektion einer der beiden anderen Typen aufgefaßt werden kann (Fig. 302).

Anders dagegen ist es *beim Zylinder*; bei diesem sind alle Schnitte vom selben Typus, weil durch Parallelprojektion eines Kegelschnittes der Typus desselben nicht verloren geht. Es gibt also *drei verschiedene Typen des Zylinders zweiter Ordnung: den elliptischen, den parabolischen und den hyperbolischen Zylinder* (Fig. 440, 442 und 443).

130. Darstellung des Kegels und des Zylinders. *Ein Zylinder ist gewöhnlich durch eine Leitkurve,* die fast immer eine ebene Kurve ist, *und eine Richtungsgerade* gegeben. Die Mantellinie, die durch einen bestimmten Punkt der Leitkurve hindurchgeht, ist dann ohne weiteres als Parallele zu der Richtungsgeraden bestimmt. *Ist die Horizontalprojektion eines beliebigen Flächenpunktes gegeben und soll seine Vertikalprojektion bestimmt werden,* so zieht man durch den gegebenen Punkt die Horizontalprojektion der durch ihn gehenden Mantellinie, lotet den Schnitt derselben mit der Horizontalprojektion der Leitkurve auf deren Vertikalprojektion hinauf, bestimmt dadurch die Vertikalprojektion der Mantellinie parallel der Richtungsgeraden, und lotet auf diese die gegebene Horizontalprojektion des Punktes hinauf (Fig. 444).

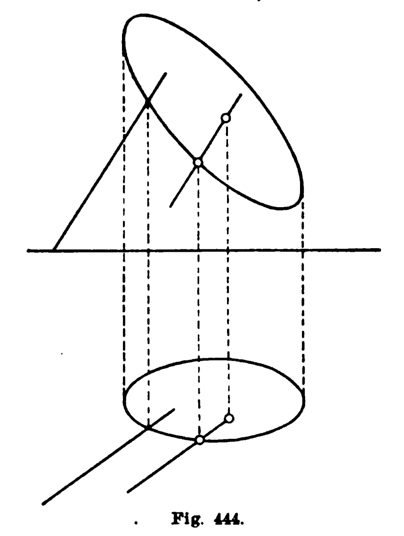


Fig. 444.

Zur plastischen Darstellung eines Zylinders sind vor allem *die beiden Umrißmantellinien* erforderlich, die, die Leitkurve tangierend, parallel der Richtungsgeraden so gezogen werden können, daß die Kurve ganz zwischen ihnen liegt. Es sei besonders darauf aufmerksam gemacht, daß die Umrißmantellinien in der Horizontalprojektion nicht dieselben sind wie die

Umrißmantellinien der Vertikalprojektion (Fig. 445). Wichtig sind auch die Vertikal- und besonders die *Horizontalspur des Zylinders,* die von der Gesamtheit der Spuren der Mantellinien gebildet werden. Meistens ist die Horizontalspur bereits gegeben, weil die Leitkurve, wenn irgend möglich in die Horizontalebene verlegt wird.

Ein Kegel ist gewöhnlich durch seine Spitze und eine Leitkurve gegeben. Für ihn haben die für den Zylinder besprochenen Aufgaben dieses Paragraphen eine analoge Lösung unter Berücksichtigung, daß die Kegelmantellinien nicht unter sich parallel sind, sondern alle durch die Spitze des Kegels gehen.

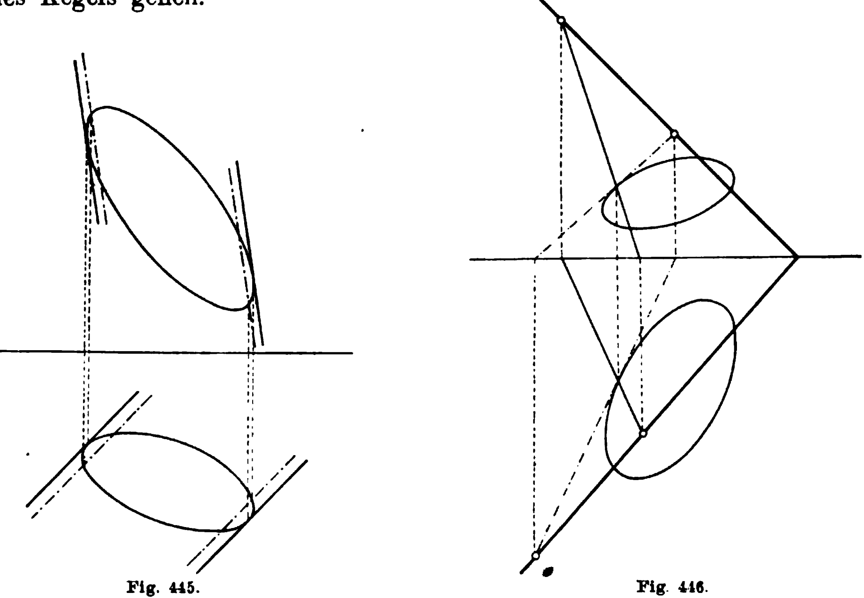
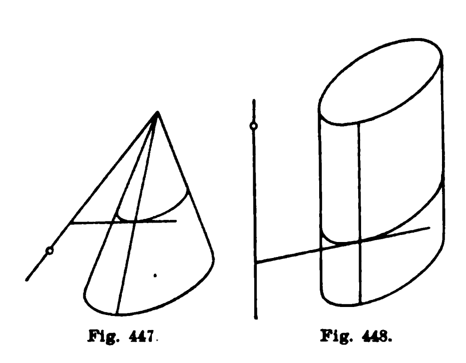


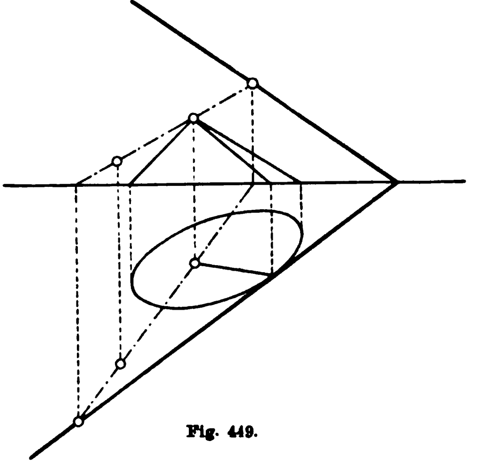
Fig. 445. Fig. 446.

131. Tangentialaufgaben für Kegel und Zylinder. *Um eine Tangentialebene an einen Kegel, bzw. Zylinder zu legen, die die Fläche in einer bestimmten Mantellinie berührt,* lege man im Schnitte der Mantellinie mit der Leitkurve an diese die Tangente und lege durch diese und die Mantellinie eine Ebene, deren Spuren also durch die gleichnamigen Spuren dieser beiden Geraden gehen (Fig. 446). — Statt der Leitkurve kann auch eine beliebige andere Schnittkurve der Fläche, z. B. ihre Horizontalspur, benutzt werden.

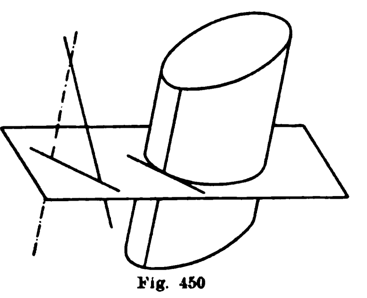
Um *durch einen gegebenen Punkt eine Tangentialebene an einen Kegel, bzw. Zylinder zu legen,* verbindet man diesen Punkt mit der Spitze des Kegels, bzw. zieht durch ihn eine Parallele zur Richtungsgeraden des Zylinders und schneidet diese Gerade und die Fläche durch eine beliebige Ebene.

Zieht man dann durch den Schnittpunkt der Hilfsgeraden eine Tangente an die Schnittkurve, so bestimmt der Berührungspunkt diejenige Mantellinie, längs derer die gesuchte Tangentialebene die Fläche berührt (Fig. 447 und 448). Am besten verwendet man bei dieser Konstruktion die Horizontalspur (Fig. 449) oder die Leitkurve der Fläche, was im einzelnen Falle am bequemsten ist.


Fig. 447. Fig. 448.


Fig. 449.

Um endlich *eine Tangentialebene parallel einer gegebenen Geraden zu legen*, zieht man beim Kegel eine Parallele zu dieser durch seine Spitze und verfährt im übrigen ebenso wie bei der vorigen Aufgabe Beim Zylinder legt man durch einen beliebigen Punkt der gegebenen Geraden eine Parallele zur Richtungsgeraden des Zylinders, legt durch diese Hilfsgerade und die gegebene Gerade eine Ebene, schneidet diese und die Fläche durch eine beliebige Hilfsebene und bestimmt die Spur der ersten Ebene mit der Hilfsebene (Fig. 450). Zieht man endlich parallel zu dieser eine Tangente an die durch die Hilfsebene aus dem Zylinder herausgeschnittene Kurve, so bestimmt deren Berührungspunkt die Mantellinie, längs welcher die gesuchte Tangentialebene den Zylinder berührt. — Auch hier wird häufig zweckmäßig die Horizontalspur oder die Leitkurve des Zylinders benutzt werden können.


Fig. 450

132. Abwicklung des Zylindermantels. Bei der Abwicklung einer entwickelbaren Schraubenfläche gingen wir von der Abwicklung der Schraubenlinie aus, die als Kreis bekannt war. Ein ähnliches Verfahren wird stets bei der Abwicklung einer Fläche angewendet;

immer *bestimmt man zunächst auf der abzuwickelnden Fläche eine Kurve, deren Abwicklung bekannt ist.* Beim Zylinder ist das bei einer Kurve der Fall, die man erhält, wenn man die Fläche durch eine Ebene senkrecht zu ihren Mantellinien schneidet. Die Abwicklung dieser Kurve ist nämlich eine gerade Linie.

Daher ist *die Abwicklung eines auf der Vertikalebene senkrecht stehenden Zylinders* besonders einfach, weil die Horizontalspur desselben bei der Abwicklung zur Geraden wird. Man hat nur die Grundkurve des Zylinders mittels zweckmäßig klein gewählter Zirkelöffnung zu rektifizieren und

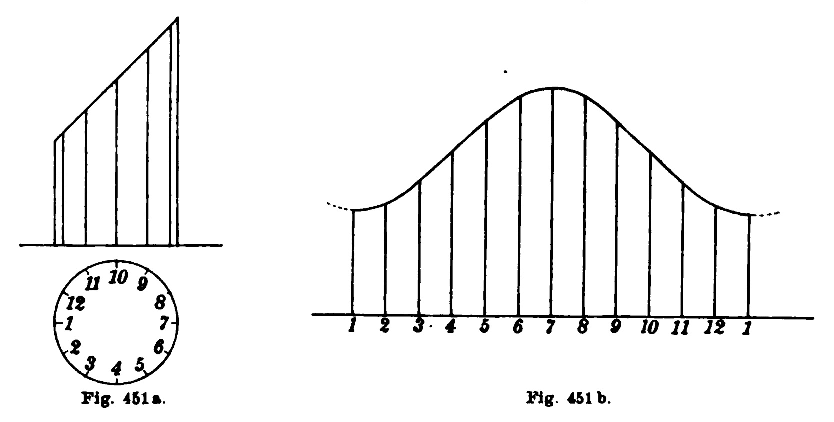


Fig. 451 a. Fig. 451 b.

in den einzelnen Fußpunkten der Mantellinien deren Länge senkrecht aufzutragen (Fig. 451). Ist der Kreiszylinder durch einen elliptischen Schnitt begrenzt, so wird die Abwicklung desselben zu einer *Sinuslinie.* Hierfür bietet die abgetrennte Haut einer schief durchschnittenen zylindrigen Wurst ein hübsches Beispiel.

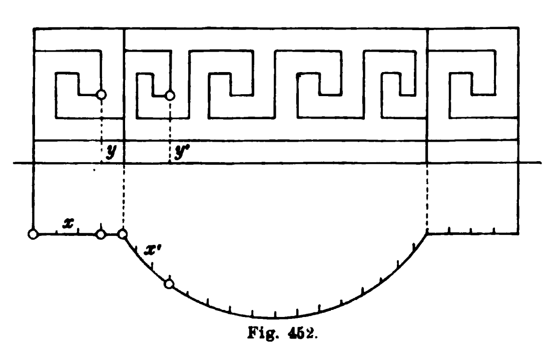


Fig. 452.

Soll auf der Projektion eines Zylinders ein Ornament aufgetragen werden, so geht man von der Abwicklung des Zylindermantels aus und überträgt die einzelnen Punkte des Flächenmusters mittels ihrer Koordinaten x und y. In Fig. 452 ist z. B. ein Mäanderstab auf einen Kreiszylinder übertragen.

Handelt es sich um einen schiefen Zylinder, so muß ein Querschnitt senkrecht zu seinen Mantellinien erst hergestellt werden. Wir wollen uns

dabei auf einen schiefen Kreiszylinder, dessen Leitkreis in der Horizontalebene liegt, beschränken, diesen durch eine Ebene senkrecht zu seinen Mantellinien schneiden und das Stück seines Mantels, das zwischen der so erhaltenen Schnittkurve und dem Grundkreise liegt, abwickeln (Fig. 453). Es geschieht das am einfachsten, wenn die Mantellinien parallel der Vertikalebene sind, so daß die Schnittebene senkrecht auf dieser steht. Ist das nicht der Fall, so muß zunächst eine neue Vertikalebene parallel den Mantellinien eingeführt und der Zylinder auf diese transformiert werden. Das Verfahren dabei ist genau dasselbe wie das in § 51 angegebene Verfahren für das schiefe Prisma. Der Zylinder ist dabei als Skelett der Mantellinien anzusehen, von denen einige, darunter die Umrißmantellinien, herausgegriffen und wie die Kanten eines Prismas behandelt werden. Auch die wahre Gestalt der Schnittkurve wird durch Umklappen derselben in ähnlicher Weise wie beim Prisma bestimmt. Es genügt, die Ellipse aus ihren beiden Achsen zu konstruieren. Die Rektifizierung derselben geschieht wieder mittels kleiner Zirkelöffnung. Auf der so entstandenen geraden Linie werden die Entfernungen der einzelnen Mantellinien aufgetragen, indem man etwa mit der obersten beginnt; in den einzelnen Punkten werden die zugehörigen wahren Mantellinienstücke, die in der Transformationsebene enthalten sind, senkrecht aufgetragen.

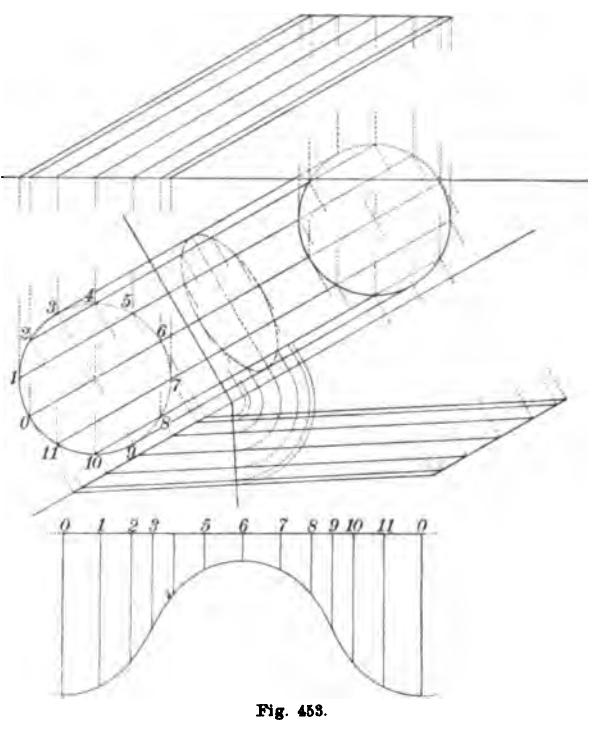


Fig. 453.

133. Abwicklung des Kegelmantels. Auch beim Kegel muß, wie bei jeder Fläche, zunächst eine Kurve bestimmt werden, deren Abwicklung bekannt ist; als solche bietet sich *beim Rotationskegel* von selbst

der Grundkreis dar, der abgewickelt wieder das Stück eines Kreises wird, dessen Halbmesser gleich der erzeugenden Mantellinie des Rotationskegels und dessen wahre Länge gleich dem Umfang des Grundkreises ist.

Soll z. B. auf dem abgewickelten Mantel eines vertikal stehenden

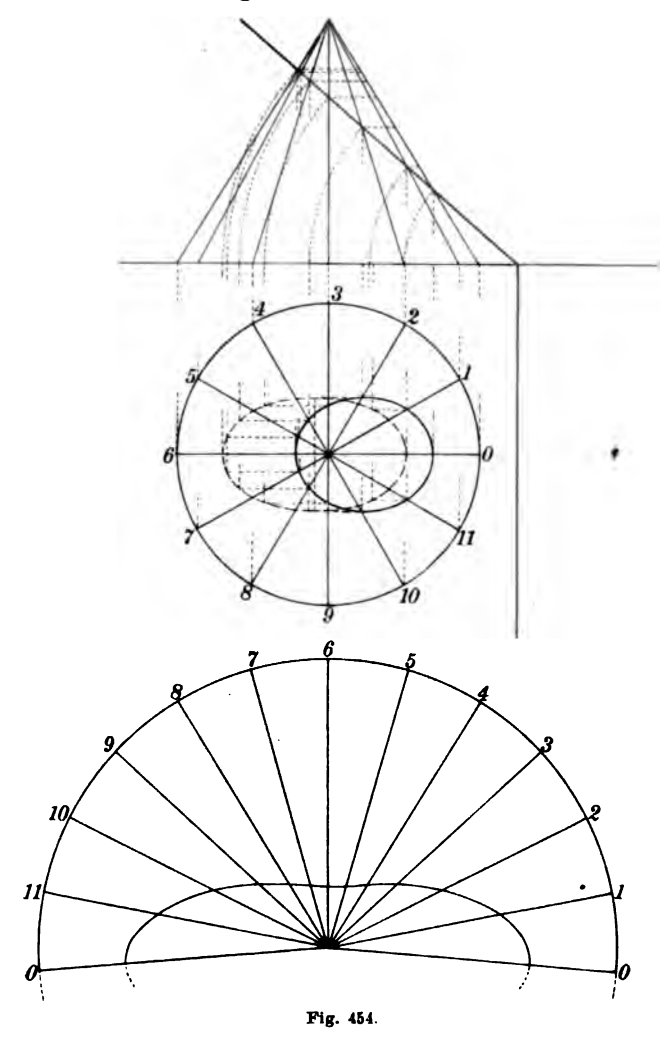


Fig. 454.

Rotationskegels die Schnittkurve eingetragen werden, die von einer auf der Vertikalebene senkrecht stehenden Ebene aus demselben herausgeschnitten wird, so teilt man den Grundkreis in etwa zwölf gleiche Teile, überträgt diese auf die Abwicklungskurve des Kreises und schneidet auf den zugehörigen Mantellinien der Abwicklungsfigur die von

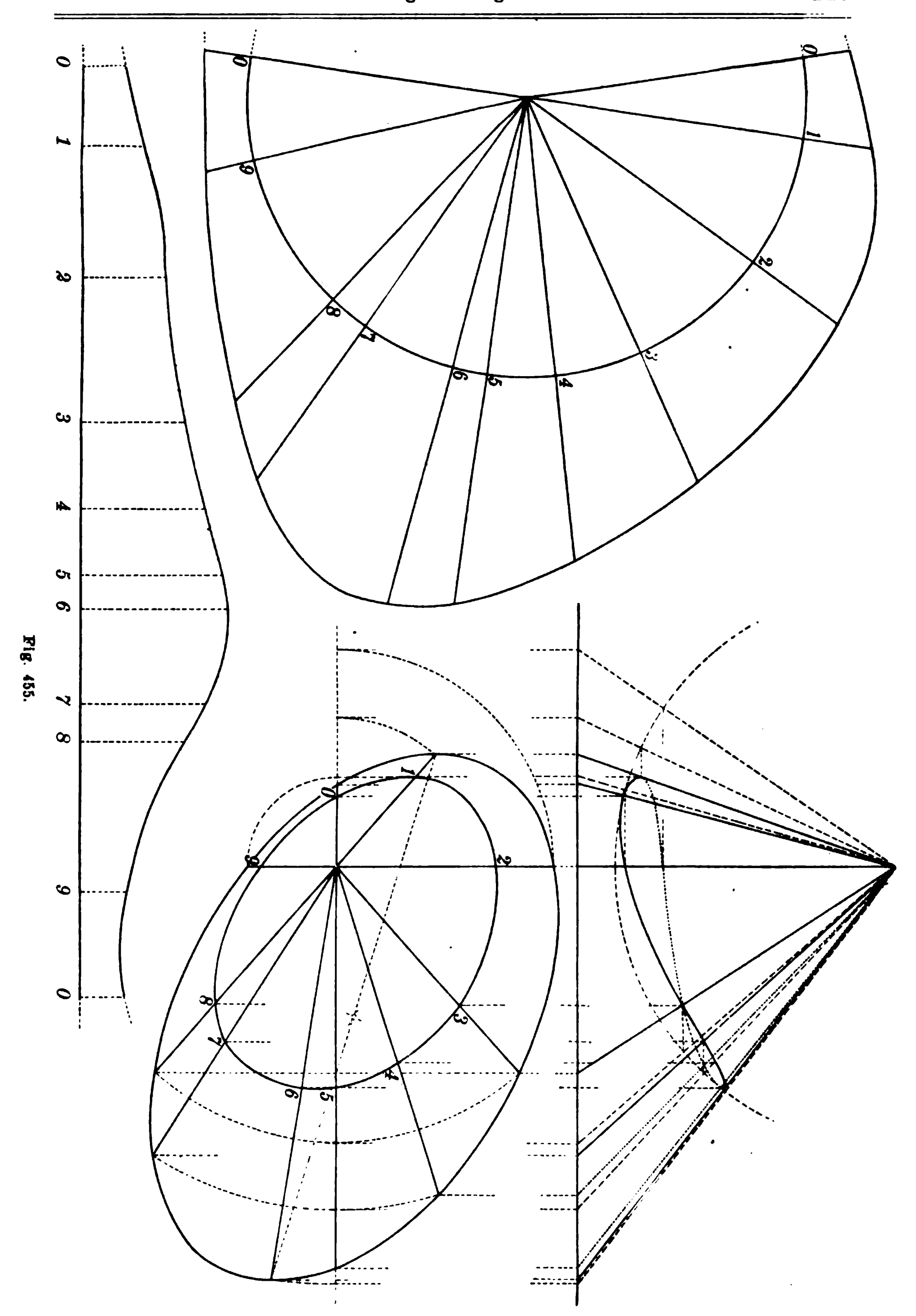


Fig. 455.

der Ebene abgeschnittenen Stücke ab, deren wahre Längen durch Parallelen zur Projektionsachse auf der Umrißmantellinie bestimmt werden (Fig. 454).

Handelt es sich um *die Abwicklung eines schiefen Kegels*, so kann diese näherungsweise dadurch ausgeführt werden, daß derselbe in eine Anzahl schmale durch zwei Mantellinien begrenzte Dreiecke zerlegt wird die dann als eben angesehen werden können.

Genauer, wenn auch umständlicher, kann die Abwicklung eines beliebigen Kegelmantels, etwa eines Kegels zweiter Ordnung, dessen Horizontalspur eine Ellipse ist (Fig. 455), wiederum dadurch geschehen, daß auf ihm zunächst eine Kurve hergestellt wird, deren Entwicklung bekannt ist; es geschieht das dadurch, daß auf den einzelnen Mantellinien von der Spitze aus gleiche Strecken abgeschnitten werden, deren Endpunkte eine Raumkurve bilden, die bei der Abwicklung des Mantels ein Kreis wird. Die Kurve kann auch aufgefaßt werden als *Schnitt des Kegels mit einer Kugel, deren Mittelpunkt in der Spitze des Kegels liegt. Um zunächst die Projektion der Raumkurve zu bestimmen*, dreht man die einzelnen Mantellinien um ihre Höhen, bis sie parallel zur Vertikalebene liegen, wobei ihre Fußpunkte in der Horizontalebene Kreise um die Projektion der Spitze des Kegels beschreiben. Da sich die Mantellinien in dieser Stellung in wahrer Gestalt projizieren, können auf ihnen in der Vertikalprojektion die konstanten Stücke durch einen Kreis um die Kegelspitze abgeschnitten werden. Durch Zurückdrehen der Mantellinien in ihre ursprüngliche Lage erhält man auf ihnen Punkte der gesuchten Kurve; je zwei Mantellinien von gleicher Länge geben dabei Punkte in gleicher Höhe.

Dieses Verfahren wird zunächst mit nur wenigen Mantellinien ausgeführt; erst später werden an Stellen, wo man über den Verlauf der Kurve genauere Auskunft haben möchte, weitere Mantellinien eingefügt. Natürlich werden von vornherein alle Mantellinien, die sich von selbst darbieten, und die charakteristisch für den Verlauf der Kurve sind, in Behandlung genommen. Zu diesen gehören die beiden Mantellinien parallel der Vertikalebene; diese gehen durch den zum Abschneiden der konstanten Mantellinienstücke benutzten Umriß der Kugel; auf ihnen muß daher die Schnittkurve den Kugelumriß berühren. Als besonders einfach bieten sich die beiden Umrißmantellinien dar, und endlich sind die beiden Mantellinien in der Ebene senkrecht zur Projektionsachse von Wichtigkeit.

Schon durch diese sechs Punkte läßt sich erkennen, daß die Kurve in ihrem Verlaufe einen *Doppelpunkt* besitzt. Zu seiner Konstruktion gelangt man durch folgende Überlegung: Die durch ihn gehenden beiden Mantellinien müssen sich in der Vertikalprojektion decken, die Verbin-

dungslinie ihrer Fußpunkte steht daher in der Horizontalprojektion senkrecht auf der Projektionsachse; daher ist das von den durch den Doppelpunkt gehenden beiden Mantellinien begrenzte Dreick in der Horizontalprojektion gleichschenklig und wird von der Horizontalprojektion derjenigen Mantellinie halbiert, die parallel der Vertikalebene ist; auf dieser kann daher der Mittelpunkt der Verbindungslinie der beiden Mantellinienfußpunkte dadurch bestimmt werden, daß man zur Richtung der Verbindungslinie den konjugierten Durchmesser bestimmt; dieser ergibt sich aber ohne weiteres als Verbindungslinie der Fußpunkte der beiden Umrißmantellinien.

Hat man so die Projektionen der *Raumkurve* bestimmt, so muß diese zunächst *rektifiziert* werden; es geschieht das, wie bei Raumkurven im allgemeinen, dadurch, daß man den sie projizierenden vertikalen Zylinder abwickelt. Zu diesem Zwecke ist die Horizontalprojektion der Raumkurve mittels kleiner Zirkelöffnung auf einer geraden Linie zu rektifizieren und in den Fußpunkten der einzelnen Mantellinien deren Länge senkrecht aufzutragen. Die Verbindungslinie der Endpunkte der einzelnen Mantellinien bestimmen die rektifizierte Raumkurve (Fig. 455).

Endlich kann zur *eigentlichen Abwicklung des Kegelmantels* — speziell des Stückes zwischen Spur und Spitze — geschritten werden. Die Abwicklung der Raumkurve wird ein Kreisbogenstück mit dem Kugelradius als Halbmesser. Auf diesem Kreisbogen werden die einzelnen Bogenlängen, die zwischen zwei behandelten Mantellinien liegen, von dem abgewickelten Zylinder übertragen, indem man etwa mit einer der beiden Umrißmantellinien beginnt und so die Lage der einzelnen Mantellinien in der Abwicklung ermittelt. Auf jeder wird endlich ihre Länge abgetragen, die bereits bei der Herstellung der Projektion der Raumkurve erhalten wurde. Durch Verbindung der Endpunkte erhält man schließlich die Abwicklung des von der Horizontalspur des Kegels begrenzten Mantels (Fig. 455).

134. Ebene Schnitte von Kegel- und Zylinderflächen. Die Bestimmung der Schnittkurve einer Ebene mit einer Kegel- oder Zylinderfläche bietet keine Schwierigkeit. Sie gestaltet sich besonders einfach, *wenn die Ebene senkrecht auf einer der Projektionsebenen steht* (Fig. 453 und 454). *Ist das nicht der Fall, so kann diese Lage durch eine Transformation stets erreicht werden.* Im übrigen sei noch einmal darauf hingewiesen, daß die Konstruktion in allen Fällen identisch ist mit der für die ebenen Schnitte eines Prismas und einer Pyramide mitgeteilten

Sollen *die Schnittpunkte einer Geraden mit einem Zylinder oder Kegel*

bestimmt werden, so geschieht das dadurch, daß man durch die Gerade eine Hilfsebene legt, die die Fläche in zwei Mantellinien schneidet, deren Schnitt mit der gegebenen Geraden wiederum die gesuchten Schnittpunkte bestimmt (Fig. 456 und 457). Die Hilfsebene wird dadurch ermittelt, daß man durch einen beliebigen Punkt der Geraden, beim

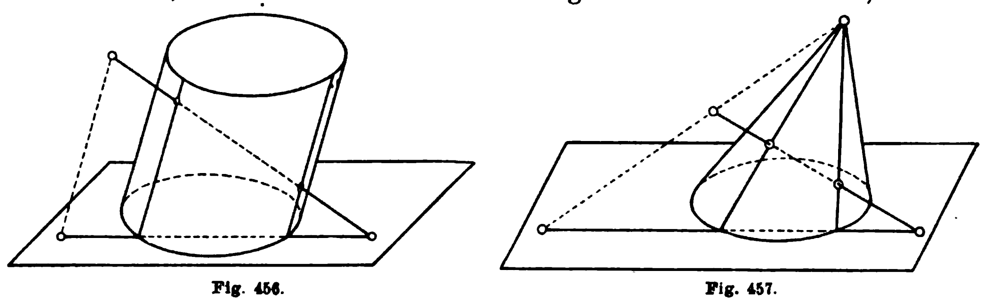


Fig. 456. Fig. 457.

Zylinder parallel zu den Mantellinien, beim Kegel durch dessen Spitze, eine Hilfsgerade legt. Durch die Spuren dieser Hilfsgeraden und der gegebenen Geraden muß die Spur der Hilfsebene gehen; ihr Schnittpunkt mit der Spur des Zylinders oder Kegels bestimmt die von der Hilfsebene herausgeschnittenen Mantellinien, auf denen die gesuchten Schnittpunkte der gegebenen Geraden mit der Fläche liegen.

135. Durchdringungen krummer Flächen im allgemeinen. *Zwei krumme Flächen schneiden sich in einer Kurve; einzelne Punkte derselben werden durch eine Schar von Hilfsflächen derart bestimmt, daß man zunächst die Schnittkurve einer Hilfsfläche mit jeder der beiden gegebenen Flächen bestimmt* (Fig. 458). *Ein Schnittpunkt dieser beiden Schnittkurven muß dann gleichzeitig ein Punkt der gesuchten Schnittkurve sein,* weil die drei Schnittlinien dreier Flächen durch einen Punkt gehen. Dabei richtet sich die Wahl der Hilfsfläche jeweilig nach den beiden gegebenen Flächen; man sucht solche Hilfsflächen auf, die mit beiden gegebenen Flächen möglichst einfache Schnitte ergeben, d. h. also, wenn irgendmöglich, gerade Linien oder Kreise. Daher sind die Hilfsflächen stets einfacher Natur, meist Ebenen oder doch Zylinder, Kegel oder Kugeln. Als letztes Mittel, wenn je eine Schar von Hilfsflächen sich nicht sofort ergeben sollte, die mit jeder der beiden gegebenen Flächen eine einfache Schnittkurve bilden, bleibt stets ein System von parallelen Hilfsebenen senkrecht einer Grundebene; die Schnitte dieser Hilfsebenen mit allen krummen Flächen bieten in der Theorie keine Schwierigkeit.

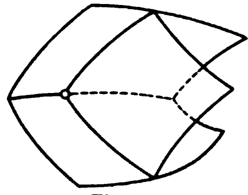


Fig. 458.

Ist eine der beiden sich schneidenden Flächen von der m^{ten} Ordnung, die andere von der n^{ten}, so ist die Schnittkurve von der $m \cdot n^{ten}$ Ordnung. Dieselbe kann zerfallen in mehrere Kurven niederer Ordnung, eine Kurve vierter Ordnung, z. B. in zwei Kegelschnitte oder in eine gerade Linie und eine Kurve dritter Ordnung. Ähnlich wie bei der Durchdringung zweier Polygone findet auch bei der Durchdringung zweier krummer Flächen entweder ein vollständiges Durchstoßen der einen Fläche durch die andere oder ein gegenseitiges Ausschneiden statt, wobei sich die Flächen gabelförmig umfassen. Im letzteren Falle ist die *Durchdringungskurve eine einzige zusammenhängende Linie,* im ersteren *zerfällt sie in einzelne Teile.*

136. Durchdringung zweier Zylinder. Die einfachste Schnittkurve, in der ein Zylinder geschnitten werden kann, ist eine Mantellinie desselben. Man wird daher zur Bestimmung der Schnittkurve zweier Zylinder *eine Schar von Hilfsebenen benutzen, die beide Zylinder in Mantellinien schneiden, d. h. parallel den Mantellinien beider Flächen sind.* Liegen die beiden Grundflächen in der Horizontalebene, so ist das Verfahren genau dasselbe wie bei zwei Prismen, deren Grundflächen in der Horizontalebene liegen. In einer Nebenfigur bestimmt man zunächst die Richtung der Horizontalspuren aller Hilfsebenen und schneidet die beiden Grundflächen, die beide Kreise sein mögen, durch eine Anzahl paralleler Linien, von denen jede für jeden Zylinder diejenigen beiden Mantellinien bestimmt, die von der betreffenden Hilfsebene aus den Flächen herausgeschnitten werden (Fig. 459). Die vier Schnittpunkte von je vier auf diese Weise bestimmten Mantellinien, sind Punkte der gesuchten Schnittkurve.

Zunächst werden nur wenige Hilfsebenen willkürlich herausgewählt und erst nachträglich an geeigneten Stellen weitere eingefügt. Als *ausgezeichnete Punkte* ergeben sich diejenigen Punkte, die auf den vier Umrißmantellinien in der Horizontalprojektion und ebenso auf den vier Umrißmantellinien der Vertikalprojektion liegen; in diesen Punkten muß die Schnittkurve die betreffenden Mantellinien berühren. Als weitere unentbehrliche Hilfsebenen ergeben sich diejenigen, die einen der beiden Zylinder berühren, deren Spuren also eine der Zylinderspuren berühren. Durch einen solchen Berührungspunkt gehen zwei unendlich nahe Mantellinien, also müssen die entsprechenden beiden Mantellinien des anderen Zylinders die Kurve gleichfalls berühren.

Um die Punkte der Schnittkurve richtig miteinander zu verbinden, läuft man zweckmäßig auf einer Horizontalspur eines Zylinders um diesen

herum von Mantellinie zu Mantellinie. Gelangt man dabei an einen Punkt, für welchen die durch ihn gehende Spur der Hilfsebene den anderen Zylinder berührt, so muß man umkehren und den ersten Zylinder rückwärts umlaufen.

In jedem beliebigen Punkte der Schnittkurve kann die Tangente an diese

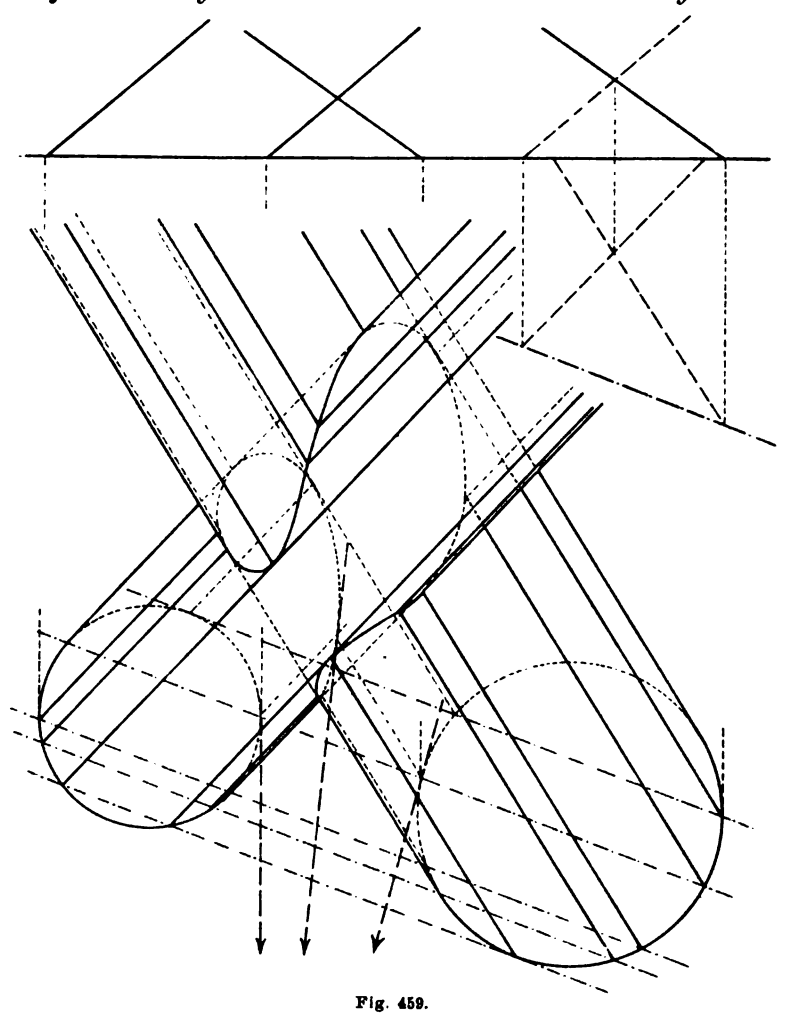


Fig. 459.

dadurch *hinzugefügt werden,* daß man die Schnittlinie der beiden Tangentialebenen in dem betreffenden Punkt an die Zylinder bestimmt; diese Schnittlinie ist Tangente der Kurve. Es geschieht das dadurch, daß man in denjenigen beiden Punkten der Grundrißkurven, durch welche die beiden Mantellinien, die den betreffenden Punkt der Schnittkurve bilden, hin-

durchgehen, die Tangenten an die Grundkurven zieht. Durch den Schnittpunkt derselben muß auch die Tangente des betrefffenden Raumkurvenpunktes gehen (Fig. 459).

Die *Bestimmung der sichtbaren und unsichtbaren Teile der Kurve* geschieht wie bei Polyedern.

Ob die Raumkurve eine einzige geschlossene Linie ist oder in zwei Kurven zerfällt, läßt sich von vornherein entscheiden. Wenn die beiden Spuren der Hilfseben, welche die Horizontalspur des einen Zylinders be-

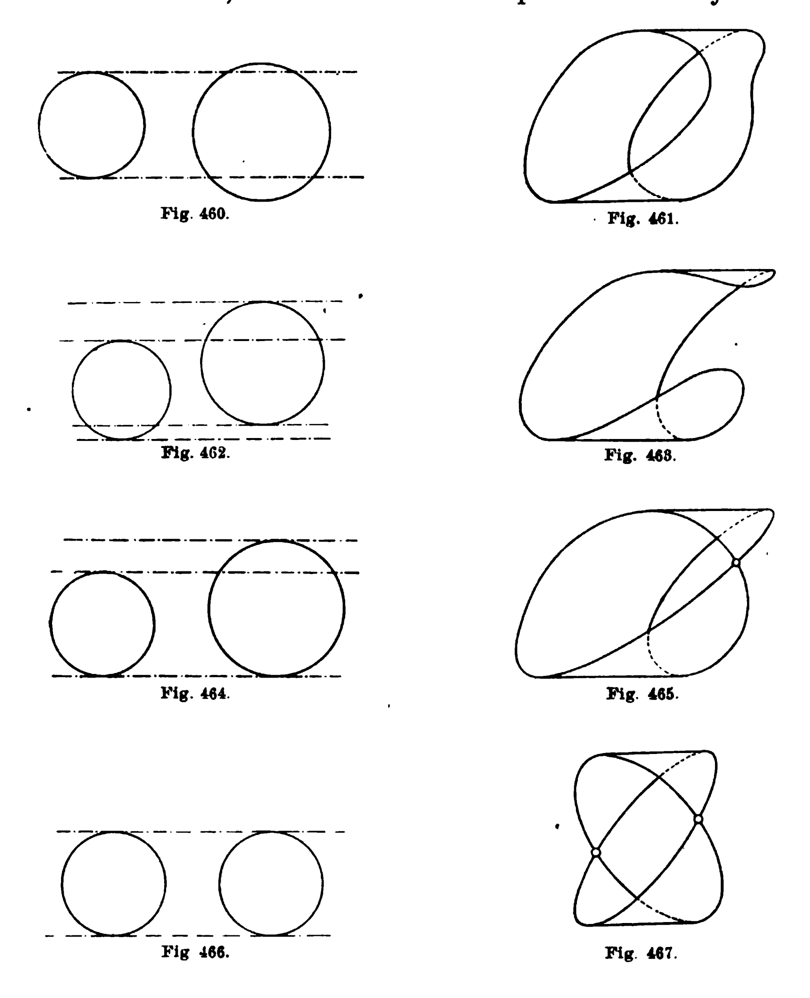
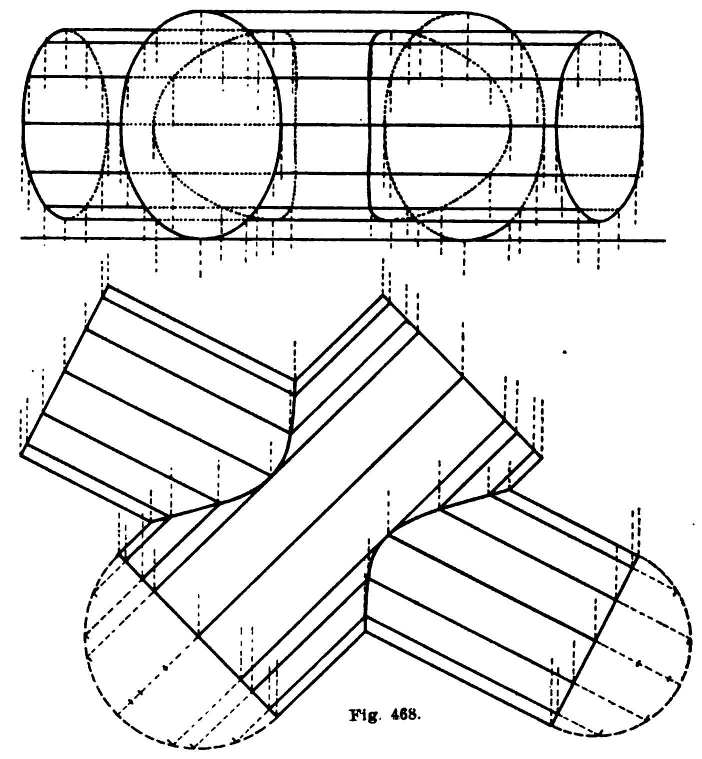


Fig. 460. Fig. 461. Fig. 462. Fig. 463. Fig. 464. Fig. 465. Fig 466. Fig. 467.

rühren, die Horizontalspur des anderen Zylinders schneiden (Fig. 460), so durchstößt der erste Zylinder den anderen, die Raumkurve zerfällt also (Fig. 461); schneidet nur eine der beiden Berührungsspuren der

Grundkurve des einen Zylinders die Grundkurve des anderen (Fig. 462), so findet ein gegenseitiges Ausschneiden der Flächen statt, die Durchdringungskurve besteht also aus einem einzigen Zuge (Fig. 463).

Berührt eine Spur der Hilfsebenen gleichzeitig beide Kreiszylinderspuren (Fig. 464), eine der Hilfsebenen also beide Zylinder, so besitzt die Kurve einen Doppelpunkt (Fig. 465), *besitzen die beiden Zylinder zwei gemeinschaftliche Tangentialebenen* (Fig. 466), *so besitzt die Schnittkurve*


Fig. 468.

zwei Doppelpunkte, sie zerfällt dann bei zwei Zylindern zweiter Ordnung in zwei sich schneidende Kurven zweiter Ordnung (Fig. 467).

Praktisch kommen derartige Zylinderschnitte bei sogenannten *Gewölbeaugen* vor, die entstehen, wenn ein Tonnengewölbe von einem anderen niederen durchsetzt wird. Die Schnittkurve der hier horizontal liegenden Kreiszylinder wird durch eine Schar horizontaler Ebenen ermittelt, von denen jede die beiden Stirnflächen der Zylinder in gleicher Höhe schneidet. Durch Umklappen der Stirnflächen werden die vier Mantellinien, die von einer Ebene aus den Zylindern herausgeschnitten werden, bestimmt (Fig. 468).

Läßt man den kleineren der beiden Zylinder wachsen, bis beide

gleich groß sind, so schneiden sich die beiden Zylinder in einem *Kreuzgewölbe,* dessen Konstruktion dieselbe ist wie beim allgemeineren Fall des Gewölbeauges. Wird das Kreuzgewölbe von demjenigen Stück, das

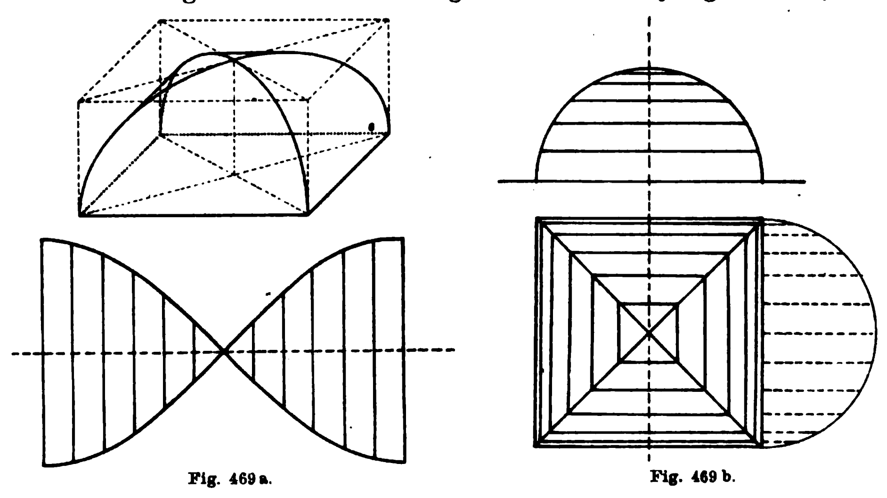


Fig. 469 a. Fig. 469 b.

beiden Zylinderkörpern gemeinsam ist, gebildet, so entsteht *das geschlossene oder das Klostergewölbe* (Fig. 469). Wird das Kreuzgewölbe dadurch gewonnen, daß von jedem Zylinder nicht die Stücke, die zwischen

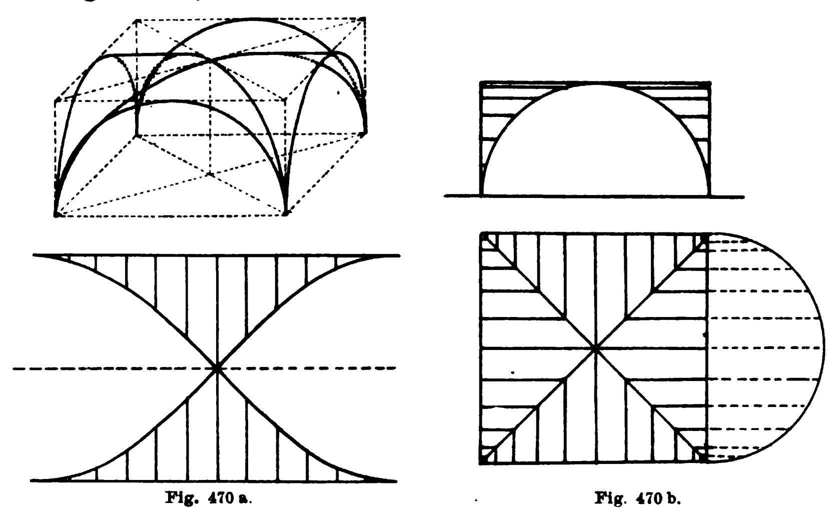


Fig. 470 a. Fig. 470 b.

den beiden Schnittkurven liegen, wie beim Klostergewölbe, benutzt werden, sondern dadurch, daß beide Zylinder durch je zwei vertikale, den Stirnflächen parallele, die Schnittkurven berührende Ebenen abgeschnitten werden, und daß von jedem Zylinder gerade diejenigen Flächenstücke, die das Kloster-

gewölbe bilden, weggelassen werden, — so entsteht *das römische oder das offene Kreuzgewölbe* (Fig. 470). *Die Gratbögen beider Kreuzgewölbe sind Ellipsen.* Die Abwickelungen sind beigefügt.

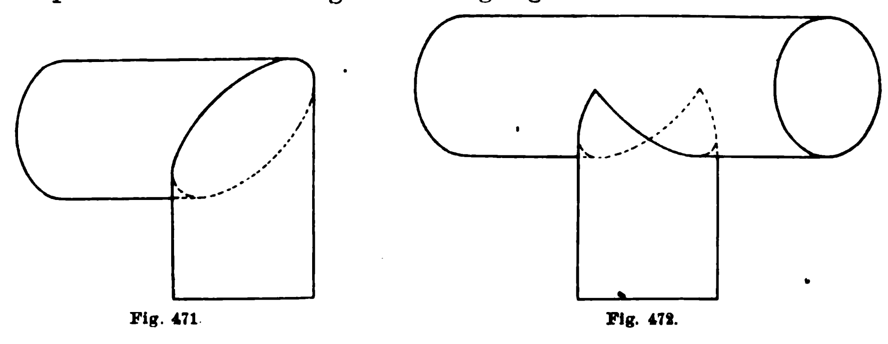


Fig. 471. Fig. 472.

Eine Fllipse als Schnittkurve entsteht auch, wenn *zwei kreiszylindrische Röhren zu einem Knie zusammengesetzt* werden (Fig. 471). Aus Halbellipsen besteht die Schnittkurve *eines* T-*förmigen Rohrstückes*

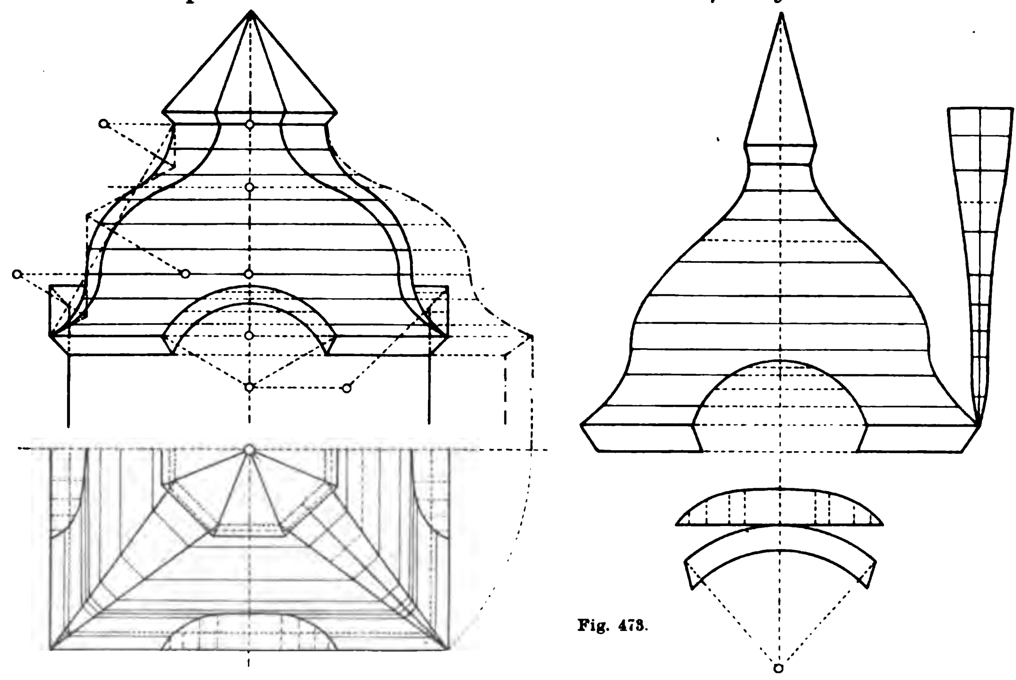


Fig. 473.

(Fig. 472). Ein praktisches Beispiel aus dem Gebiete der Architektur für Schnittkurven horizontaler Zylinder bietet Fig. 473, welche ein mit Kupferblech belegtes *Dach* darstellt; die Abwicklungen der einzelnen Dachflächen sind hinzugefügt. Fig. 474 und 475 zeigen zwei *Ziersteine*, bei

denen sich horizontale und vertikale Zylinder in einfachster Weise durchschneiden.

Die Bestimmung der Schnittkurve zweier Zylinder kann auch im allgemeinsten Falle durch eine Schar horizontaler Ebenen bestimmt

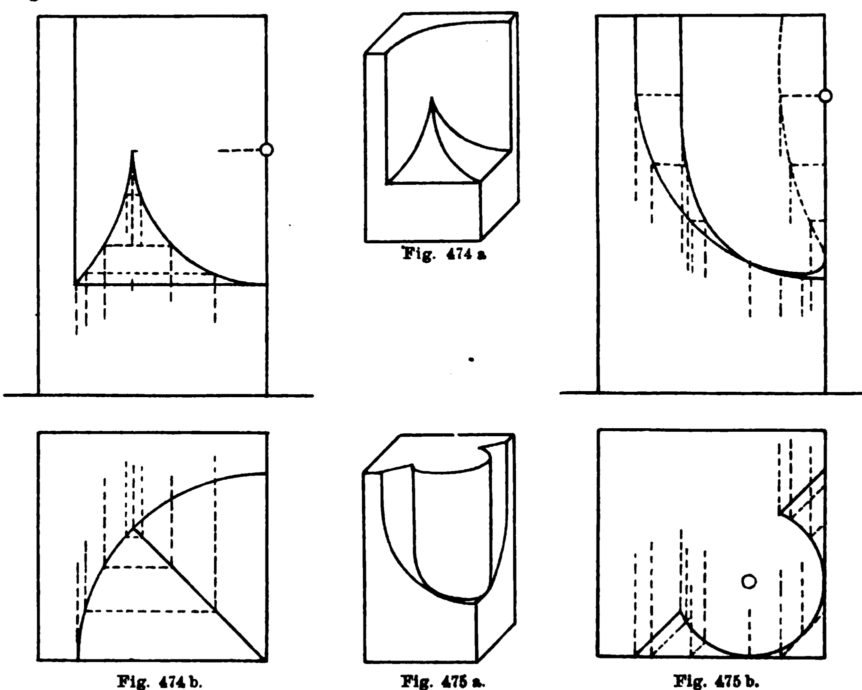


Fig. 474 a

Fig. 474 b. Fig. 475 a. Fig. 475 b.

werden, doch ist dieses Verfahren nur dann praktisch anwendbar, wenn die Horizontalspur beider Zylinder Kreise sind; selbst dann ist aber die Benutzung einer Schar von Ebenen, parallel den Mantellinien, einfacher.

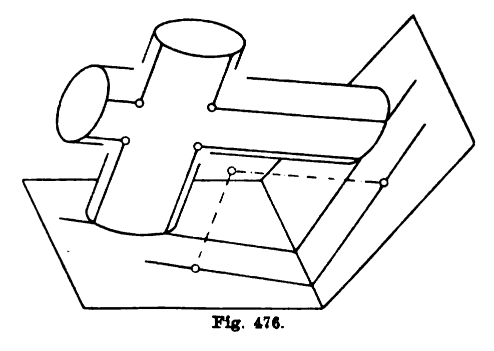


Fig. 476.

Sind die Horizontalspuren der beiden Zylinder nicht bekannt, so ist es nicht nötig, dieselben zu bestimmen. Man kann statt der Horizontalebene dann auch die Ebenen der Grundflächen der Zylinder benutzen (Fig. 476). Jede Hilfsebene schneidet die beiden Grundebenen in Spuren, die sich auf der Schnittlinie der beiden Grundebenen schneiden; alle Spuren derselben Grundebene sind parallel. Um

die Richtung derselben zu bestimmen, zieht man von einem beliebigen Punkte aus zwei Linien parallel den Zylindermantellinien und legt durch diese Linien eine Ebene, welche die beiden Grundebenen in Linien schneidet, die die gesuchte Richtung besitzen.

137. Durchdringung eines Zylinders und eines Kegels. Zur Bestimmung einzelner Punkte der Schnittkurve eines Kegels und eines

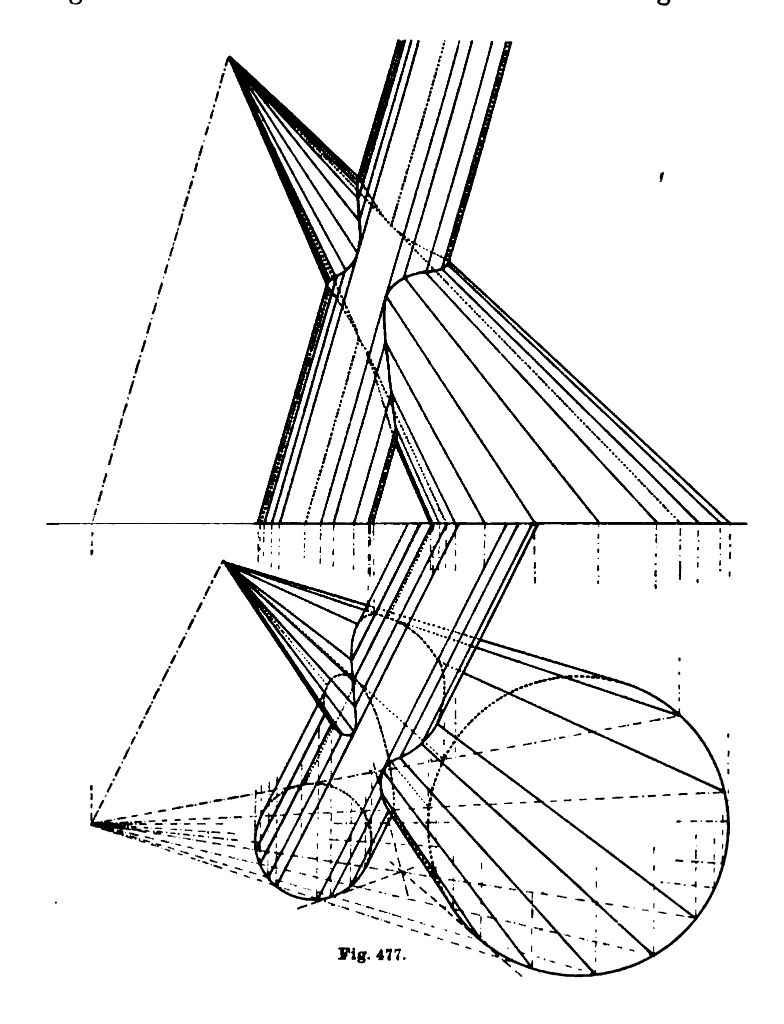


Fig. 477.

Zylinders bedient man sich einer Schar von Hilfsebenen, die wiederum beide Flächen in Mantellinien schneiden; es sind das *Ebenen, die durch die Spitze des Kegels parallel den Zylindermantellinien gehen.* Sie müssen

daher alle durch eine gerade Linie hindurchgehen, die durch die Spitze des Kegels parallel den Zylindermantellinien gezogen wird; die Spuren aller Ebenen müssen also durch die Spur dieser Hilfsgeraden hindurchgehen. Bei dem Schnitte zweier Zylinder lag dieser Punkt im Unendlichen, daher waren die Spuren aller Hilfsebenen parallel. Im übrigen geschieht *die Bestimmung der Schnittkurve eines Kegels und eines Zylinders genau ebenso wie bei zwei Zylindern;* auch die Tangente kann in jedem Punkte der Schnittkurve in ähnlicher Weise hinzugefügt werden (Fig. 477).

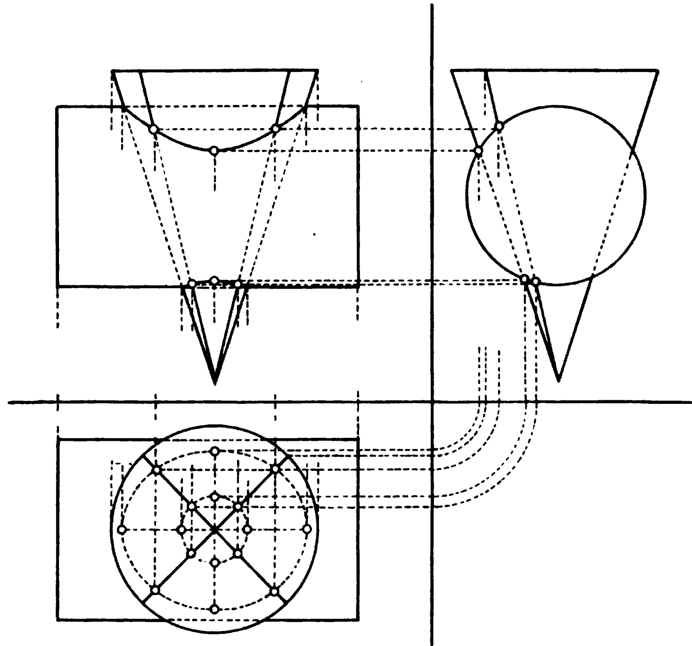


Fig. 478.

Praktisch kommen derartige Schnitte bei der Durchdringung eines zylinderförmigen und eines kegelförmigen Maschinenteiles, z. B. bei einem *Kegelventil in zylindrischer Röhre* (Fig. 478) oder dergl., vor. *Liegt der Zylinder* wie hier *horizontal und parallel der Vertikalebene, so benutzt man zur Konstruktion* zweckmäßig *einen Seitenriß.* In ähnlicher Weise wie hier der Seitenriß kann der *Grundriß* benutzt werden, *wenn der Zylinder vertikal steht* wie bei dem zylinderförmigen *Kännchen mit konischer Schnauze* in Fig. 479, bei welcher die Abwicklungen hinzugefügt sind. Wie bei zwei Zylindern besitzt die Schnittkurve dann einen Doppelpunkt, wenn Kegel und Zylinder eine gemeinsame Tangentialebene besitzen.

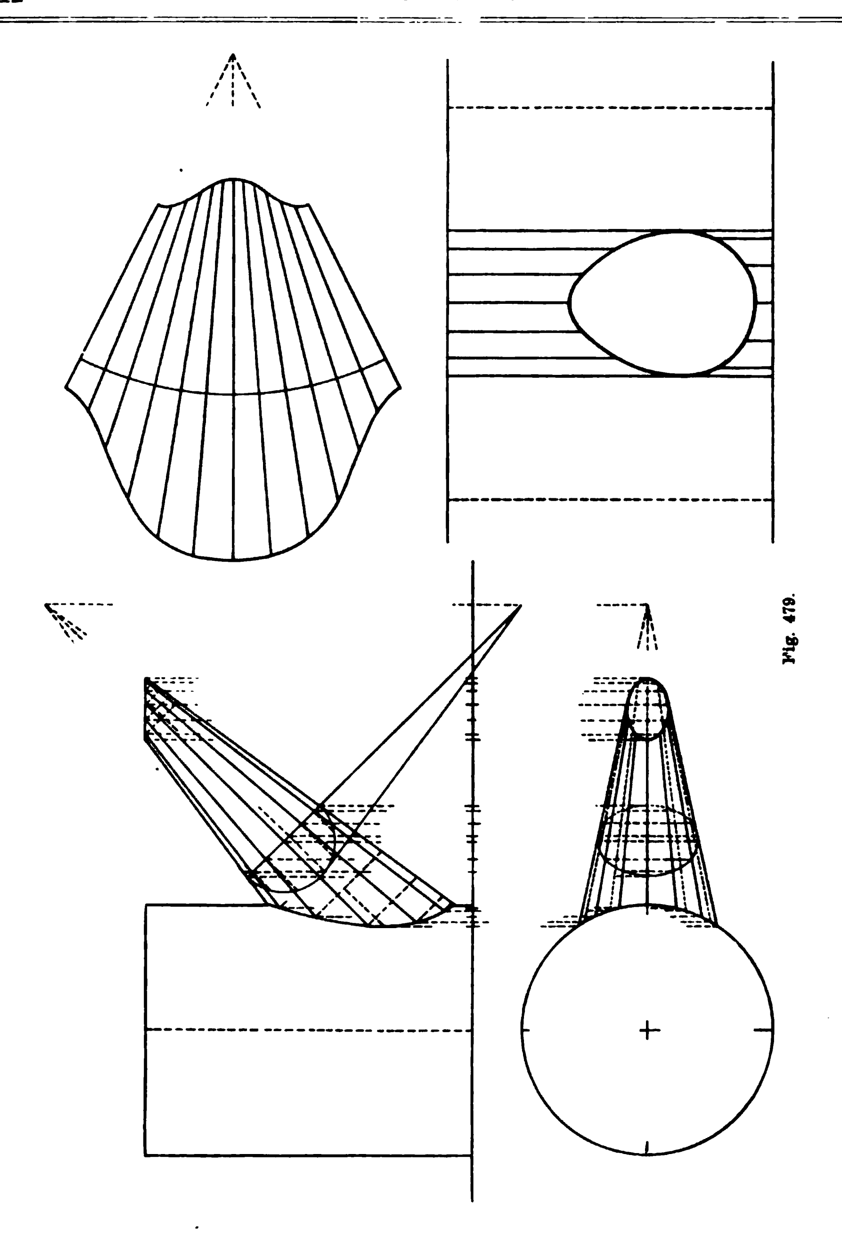


Fig. 479.

Die Kurve vierter Ordnung besitzt zwei Doppelpunkte, wenn die beiden Flächen zwei gemeinsame Tangentialebenen haben, sie zerfällt dann wiederum in zwei Kegelschnitte. Das ist z. B. bei einer *Windkappe in zylindrischem Rauchfang* der Fall (Fig. 480).

Auch in eine Kurve dritter Ordnung und eine gerade Linie kann die

Schnittkurve zerfallen, es müssen dann Kegel und Zylinder eine Mantellinie gemeinsam haben; *die Spitze des Kegels liegt dann in der Zylinderfläche* (Fig. 481).

Auch bei Kegel und Zylinder kann die Schnittkurve durch eine Schar horizontaler Ebenen bestimmt werden, doch ist diese Methode praktisch nur anwendbar, wenn die Horizontalspuren beider Flächen Kreise sind; auch dann ist aber die Anwendung von Ebenen durch die Spitze des Kegels, parallel den Zylindermantellinien, einfacher.

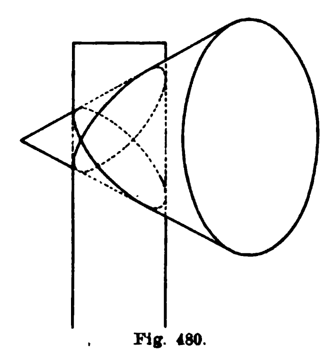


Fig. 480.

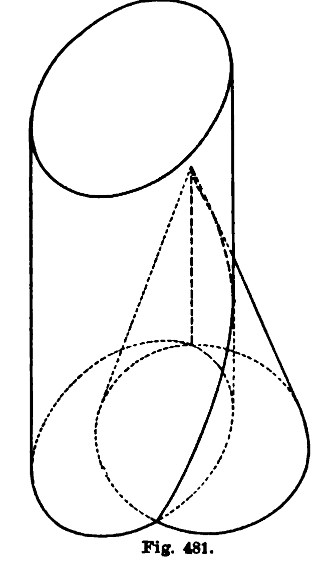


Fig. 481.

138. Durchdringung zweier Kegel. Zur Bestimmung einzelner Punkte der Schnittkurve zweier Kegel bedient man sich einer Schar von Hilfsebenen, die beide Flächen in Mantellinien schneiden.

Alle Hilfsebenen müssen daher *durch die Verbindungsgerade beider Kegelspitzen hindurchgehen,* ihre Spuren also durch die Spur dieser Geraden. *Im übrigen bleibt alles genau so wie bei zwei Zylindern* oder einem Zylinder und einem Kegel.

Sind die Horizontalspuren beider Kegel nicht bekannt, so kann man statt der Horizontalebene auch die Ebenen der Grundflächen der Kegel benutzen. Jede Hilfsebene muß dann durch die Verbindungslinie der Kegelspitzen gehen (Fig. 482 und 483). Alle Spuren der Hilfsebenen in einer und derselben

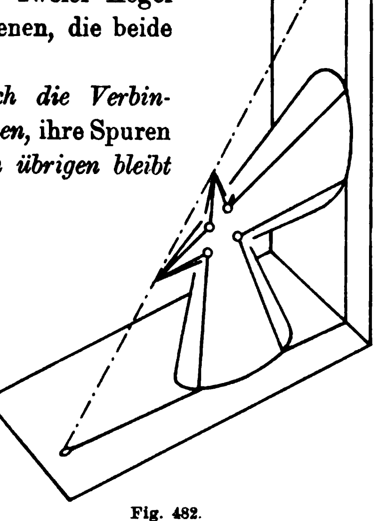


Fig. 482.

Grundfläche müssen also durch den in dieser liegenden Spurpunkt hindurch gehen, und die beiden Spuren derselben Hilfsebene müssen sich in der Schnittlinie beider Grundflächen schneiden.

Die Bestimmung der Schnittkurve eines Kegels oder Zylinders mit einer Pyramide oder einem Prisma bietet keine Schwierigkeit. Die

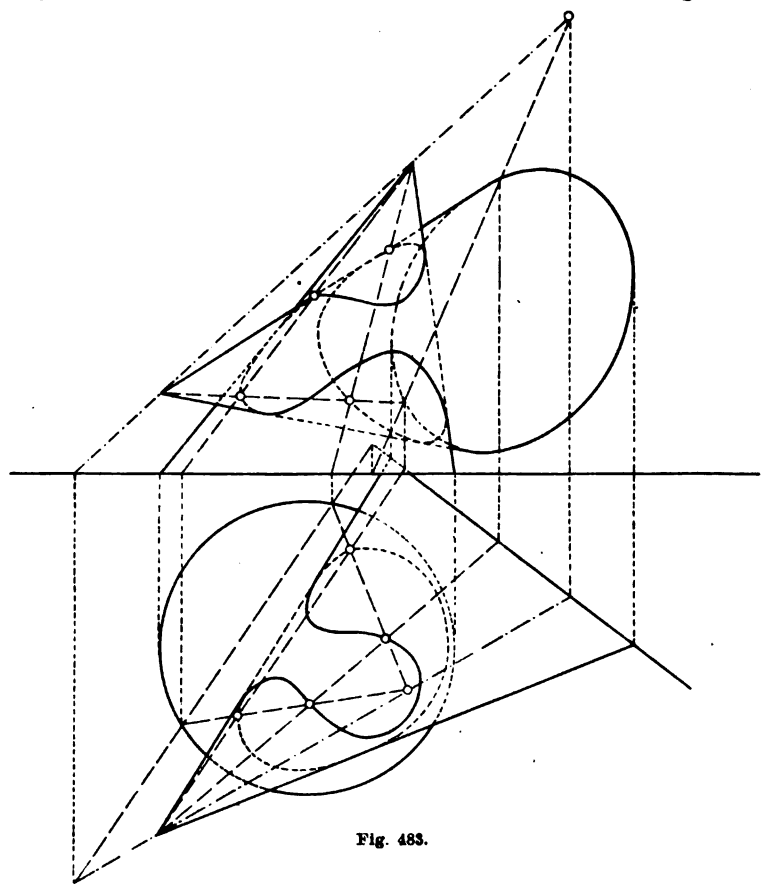


Fig. 483.

Pyramide ist als Kegel, das Prisma als Zylinder aufzufassen, deren Leitkurve je ein geradliniges Polygon ist. Natürlich müssen die Schnittpunkte, die auf den Pyramiden und Prismenkanten liegen, alle bestimmt werden man wird daher damit beginnen, die einzelnen Hilfsebenen durch die Zylinder-, bzw. Prismenkanten zu legen, und erst nachträglich zwischen diesen Hilfsebenen einige weitere einfügen.

139. Bestimmung des Schnittpunktes einer Kurve mit einem Zylinder oder Kegel. Um die Schnittpunkte einer Kurve mit einem

Zylinder oder einem Kegel zu bestimmen, legt man durch dieselbe *eine beliebige Hilfsfläche* und bringt diese mit dem Kegel, bzw. dem Zylinder zum Schnitt. Die Schnittpunkte der so erhaltenen Hilfskurve mit der gegebenen Kurve sind dann die gesuchten Schnittpunkte der letzteren mit dem Kegel, bzw. dem Zylinder.

Bei der *Wahl der Hilfsfläche* wird man darauf bedacht sein, eine möglichst einfache Schnittkurve zu erhalten. Daher benutzt man, wenn es sich um die Schnittpunkte einer geraden Linie mit einem Zylinder oder Kegel handelt, eine Hilfsebene, die beim Kegel durch die Spitze desselben geht, beim Zylinder parallel den Mantellinien ist, wie bereits in § 134 angegeben wurde.

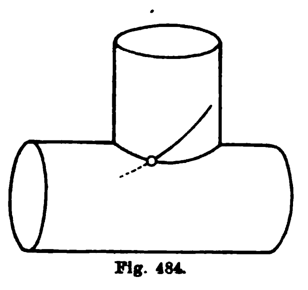


Fig. 484.

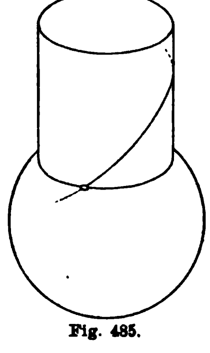


Fig. 485.

Handelt es sich um eine ebene Kurve, deren Ebene nicht durch die Spitze des Kegels geht, bzw. nicht parallel den Zylindermantellinien ist, oder um eine Raumkurve, so ist in weitaus den meisten Fällen der die Raumkurve projizierende Zylinder — bei Zentralprojektionen Kegel — die einfachste Hilfsfläche (Fig. 484).

Der projizierende Zylinder, bzw. Kegel wird auch verwendet, wenn es sich um die Schnittpunkte einer Kurve mit irgend einer anderen Fläche handelt (Fig. 485).

VI. Teil.

Rückungsflächen.

XVI. Kapitel.

Nichtentwickelbare Flächen im allgemeinen.

140. Entwickelbare und nichtentwickelbare Flächen. Die Tangente eines Flächenpunktes war bereits als Grenzlage einer Sekante definiert, bei der zwei benachbarte Schnittpunkte der Fläche zusammengefallen waren; ebenso war die Tangentialebene eines Punktes bereits definiert

als die Gesamtheit aller Tangenten desselben. *Der charakteristische Unterschied einer nichtentwickelbaren Fläche und einer entwickelbaren kommt nun im Verhalten der Tangentialebene zur Fläche am klarsten zum Ausdruck.* Bei den entwickelbaren Flächen hatten wir gesehen, daß die Berührung der Tangentialebene stets in einer Mantellinie ihrer ganzen Länge nach stattfindet. *Die Tangentialebene hat mit der entwickelbaren Fläche ein unendlich schmales, unendlich langes Flächenstück gemein. Bei nichtentwickelbaren Flächen findet die Berührung der Tangentialebene nur in einem einzigen Punkte statt.* Im allgemeinsten Falle wird die Fläche von jeder Tangentialebene in einer Kurve geschnitten, die durch den Berührungspunkt geht; in einem besonderen Falle, und zwar ist das der für die Anschauung geläufigere, berührt die Tangentialebene eine Fläche in einem einzigen Punkte, ohne die Fläche in einer Kurve zu schneiden, die durch den Berührungspunkt geht. Im nächsten Paragraphen wird das Verhalten der Tangentialebene in Flächenpunkten verschiedener Art genauer untersucht werden.

Von einem Punkte können im allgemeinen unendlich viele *Tangenten* an eine Fläche gelegt werden, sie bilden die Mantellinien des *Berührungskegels.* Die einzelnen Berührungspunkte bilden die Berührungskurve, und umgekehrt liegt der Berührungspunkt einer Mantellinie des Berührungskegels auf der Berührungskurve desselben. Ebenso können von einem Punkte unendlich viele *Tangentialebenen* an eine Fläche gelegt werden, jede berührt den Berührungskegel längs einer Mantellinie, die Tangente der Fläche ist; die Berührungspunkte liegen also auf der Berührungskurve, und die Tangentialebenen erzeugen den Berührungskegel durch Umhüllung. *Bei entwickelbaren Flächen degeneriert der Berührungskegel zu einer Ebene; dieselbe ist durch einen ihrer Punkte bestimmt, während bei nichtentwickelbaren Flächen eine Tangentialebene erst durch zwei Punkte oder eine Gerade bestimmt ist.* Fällt letztere ins Unendliche, so kann sie durch eine Richtungsebene ersetzt werden, parallel zu der die Tangentialebene liegen soll. Fällt der Punkt, von dem aus die Tangenten, bzw. die Tangentialebenen an die Flächen gelegt werden, ins Unendliche, so wird aus dem Berührungskegel ein *Berührungszylinder.* Derselbe wird also erzeugt durch die Tangenten oder die Tangentialebenen, die parallel einer gegebenen Geraden an die Fläche gelegt werden.

141. Die Krümmung der krummen Flächen. Um das Verhalten einer Fläche zur Berührungsebene im Berührungspunkte zu untersuchen, denken wir uns etwa *eine Bohnenfläche und legen an dieselbe in einem Punkt A eine Tangentialebene.* Dann *wird die Fläche im allgemeinsten*

Falle von der Ebene in einer Kurve geschnitten (Fig. 486), *die in A einen Doppelpunkt hat, der zugleich für beide Äste der Kurve Wendepunkt ist;*

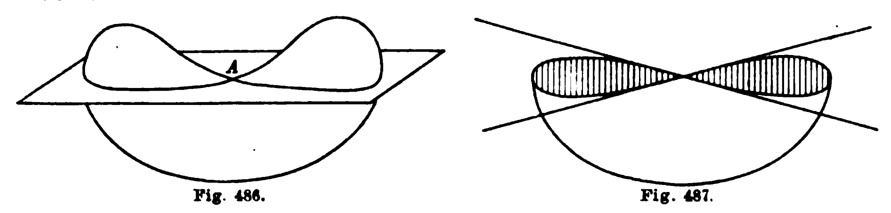


Fig. 486. Fig. 487.

durch ihn gehen also zwei Wendetangenten hindurch, die hier auch *Haupttangenten der Fläche* genannt werden (Fig. 487). Verrückt man die tangentiale Ebene ein wenig, so öffnet sich die Kurve und zerfällt in zwei Zweige, ähnlich wie eine Hyperbel. Je nachdem man die Tangentialebene nach der einen oder anderen Seite verrückt, liegen die beiden

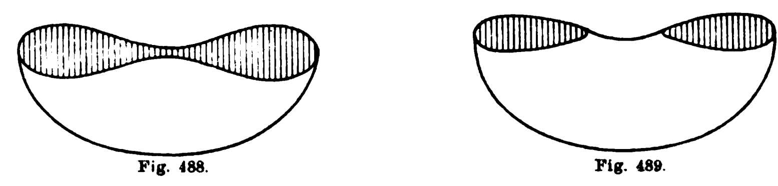


Fig. 488. Fig. 489.

Zweige im einen oder anderen Scheitelwinkelraum (Fig. 488—490). Ein Punkt, in dem sich die Tangentialebene in dieser Weise zur Fläche verhält, heißt *ein hyperbolischer Punkt*, und man sagt, *die Fläche besitzt in diesem Punkt hyperbolische oder sattelförmige Krümmung.*

Dreht man um die Normale des Berührungspunktes eine Schnittebene, so

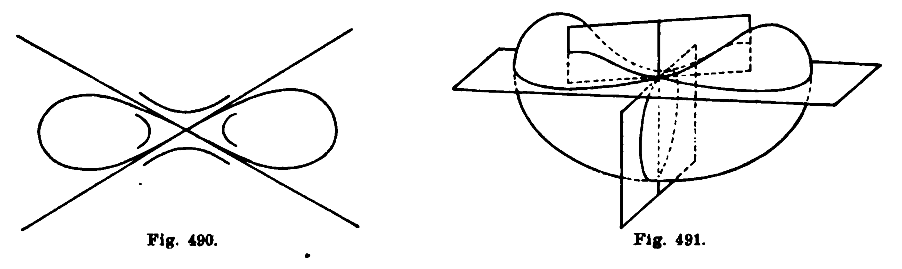


Fig. 490. Fig. 491.

liegt die Schnittkurve und damit auch ihr *Krümmungshalbmesser* bald auf der einen Seite der Tangentialebene, bald auf der anderen (Fig. 491). Als Grenzlagen der Schnittebene sind diejenigen zu betrachten, die durch die Wendetangenten hindurchgehen. Der Krümmungsradius der Schnittkurve ist hier unendlich groß. Bei einer Drehung der Schnittebene um 180^0 nimmt also der Krümmungsradius einen endlichen positiven Wert an, wächst dann, bis er gleich unendlich wird, wird dann negativ, und seine

Länge sinkt wieder herunter auf einen endlichen Wert, um dann abermals zu wachsen und durch das Unendliche hindurch wieder einen positiven endlichen Wert anzunehmen.

Bewegt man nun die Tangentialebene so, daß der Doppelpunkt der Schnittkurve zum isolierten Punkte wird, so wird die Fläche von der Tangentialebene nicht mehr in einer Kurve geschnitten, die durch den Berührungspunkt hindurchgeht (Fig. 492). Verrückt man die Tangentialebene um unendlich wenig, so schneidet sie die Fläche in einer ellipsenähnlichen Kurve. Ein Flächenpunkt, in dem sich die Tangentialebene in dieser Weise zur Fläche verhält, heißt *ein elliptischer Punkt,* und man sagt, *die Fläche besitzt in diesem Punkt elliptische oder kuppenförmige Krümmung.* Die Wendetangenten sind in einem solchen Punkt imaginär geworden.

Dreht man um die Normale in einem elliptischen Punkte eine Ebene, so liegen die von dieser aus der Fläche geschnittenen Kurven sämtlich

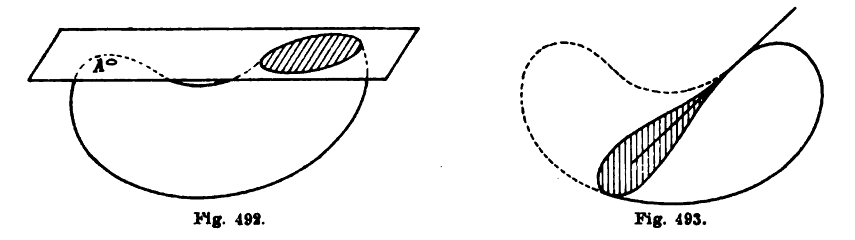


Fig. 492. Fig. 493.

auf derselben Seite der Tangentialebene. Der *Krümmungsradius* liegt also gleichfalls für alle Schnittkurven auf derselben Seite der Tangentialebene und hat stets einen endlichen Wert.

Bei der Bewegung der Tangentialebene längs der Bohnenfläche findet zwischen denjenigen Lagen, in denen die Schnittkurve einen Doppelpunkt besitzt, und denjenigen, in denen dieser zum isolierten Punkte geworden ist, *eine Grenzlage* statt. *Diese ist dadurch charakterisiert, daß der Doppelpunkt zum Rückkehrpunkt geworden ist und die beiden Wende- oder Haupttangenten zusammengefallen sind* (Fig. 493). Verrückt man in einem solchen Punkte die Tangentialebene um unendlich wenig, so wird die Fläche in einer parabelartigen Kurve geschnitten. Ein Flächenpunkt, in dem die Tangentialebene dieses Verhalten zur Fläche zeigt, heißt *ein parabolischer Punkt,* und man sagt, *die Fläche besitzt in diesem Punkte parabolische Krümmung.*

Dreht man wieder eine Ebene um die Normale eines parabolischen Punktes, so liegen die einzelnen Schnittkurven und damit auch die *Krümmungsradien* zwar auch sämtlich auf derselben Seite der Tangential-

ebene, der Krümmungsradius wächst aber hier bis zum Werte ∞, und zwar bei derjenigen Schnittkurve, deren Ebene durch die zusammengefallenen Haupttangenten geht.

Im allgemeinen kommen *auf einer Fläche* alle drei Charaktere von Punkten vor, und zwar so, daß *ganze Gebiete nur elliptische und andere nur hyperbolische Punkte enthalten. Beide Gebiete sind getrennt durch eine Kurve, deren Punkte parabolische Krümmung besitzen* (Fig. 494).

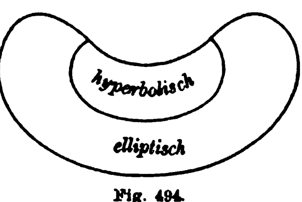


Fig. 494.

Ganze Gebiete mit parabolischen Punkten im eigentlichen Sinne kann es nicht geben, doch können *die entwickelbaren Flächen* als solche angesehen werden. Die beiden zusammengefallenen Haupttangenten fallen dann mit zwei unendlich nahen Mantellinien zusammen. Der Krümmungshalbmesser bleibt auch hier bei allen Schnittkurven durch dieselbe Normale auf derselben Seite der Tangentialebene und nimmt für einen Schnitt durch die Mantellinie den Wert ∞ an. — *Ein Analogon* hierzu findet sich *bei der Krümmung der Kurven.* Diese können konvex oder konkav gekrümmt sein; ein Übergang findet durch einen Wendepunkt statt; eine Kurve mit lauter Wendepunkten gibt es nicht, doch kann die gerade Linie als solche angesprochen werden.

XVII. Kapitel.

Rotationsflächen.

142. Meridiane und Parallelkreise. *Denkt man sich eine Kurve fest mit einer geraden Linie verbunden und um diese als Achse gedreht, so beschreibt die Kurve eine Fläche, die Rotationsfläche heißt* (Fig. 495). Dabei beschreibt jeder Punkt der Erzeugenden einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Achse liegt, und dessen Ebene senkrecht zur Achse ist. Diese Schar von Kreisen heißen *Parallelkreise;* der größte oder kleinste Parallelkreis heißt *Äquator*, letzterer auch *Kehlkreis.* — Umgekehrt schneidet jede Ebene senkrecht zur Achse die Rotationsfläche in einem Kreise. *Eine Rotationsfläche kann also auch durch Parallelverrückung eines Kreises erzeugt werden, wenn sein Mittelpunkt sich auf einer Geraden bewegt, und sein Radius sich bei der Bewegung ständig ändert,* wobei seine Länge durch eine Leitkurve bestimmt wird. *Eine Rotationsfläche kann also auch als Rückungsfläche aufgefaßt werden.*

Eine Ebene, die durch die Rotationsachse geht, heißt *Meridianebene.* Alle von den Meridianebenen herausgeschnittenen Kurven sind kongruent und heißen Meridiankurven, kurz *Meridiane.* Gewöhnlich wird die Meridiankurve auch als Erzeugende benutzt. Ist das nicht der Fall, so ist es zweckmäßig, nachträglich die Meridiankurve als Erzeugende einzusetzen. Die Meridiankurve hat die Achse als Symmetralachse und wird von dieser in zwei Halbmeridiane geteilt. Jede Meridianebene ist für alle Parallelkreise Symmetralebene. *Durch die Meridiankurve wird die Gestalt der Fläche am charakteristischsten zum Ausdruck gebracht;* eben deshalb wird sie meist als Erzeugende benutzt. *Die Eigenschaften des Meridians übertragen sich auf die Fläche*; so erzeugt eine Symmetralachse des Meridians eine Symmetralebene, ein Wendepunkt erzeugt einen Wendekreis, der elliptische und hyperbolische Gebiete der Fläche trennt, und dessen Punkte parabolisch sind (Fig. 495). Ein höchster oder tiefster Punkt erzeugt gleichfalls einen parabolischen Krümmungskreis, der die elliptischen von den hyperbolischen Punkten trennt. Schneidet der Meridian die Achse, so findet ein Selbstdurchschnitt der Fläche statt.

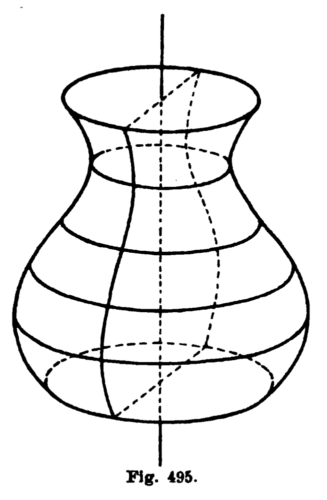


Fig. 495.

143. Darstellung der Rotationsflächen. *Zur Darstellung der Rotationsflächen bieten sich zwei wichtige Scharen von Kurven dar, die Parallelkreise und die Meridiane.* Beide Systeme können zur Darstellung der Fläche benutzt werden, je nachdem dieselbe als Rückungs- oder Drehungsfläche aufgefaßt wird. Am einfachsten projizieren sich beide Systeme von Kurven, wenn *die Rotationsachse senkrecht auf* einer der beiden Projektionsebenen, etwa *der Horizontalebene*, steht. Alle Parallelkreise projizieren sich dann in der Vertikalebene als gerade Linien und in der Horizontalebene als Kreise, und die Meridiane projizieren sich wenigstens in der Horizontalprojektion als Geraden, während ihre Vertikalprojektionen als Kurven erscheinen, die zum Meridian affin sind (Fig. 496). Eine Lage der Rotationsfläche, bei welcher beide Projektionen der Meridiane einfach sind, ist nicht möglich. Benutzt man also die Parallelkreise als Erzeugende, so ergeben sich einfachere Konstruktionen, und mit Rücksicht darauf ist *die Betrachtung der Rotationsflächen*

als Rückungsflächen einfacher, wenngleich das Drehen des Meridians um die Achse als einfacheres Bewegungsgesetz erscheint.

Derjenige Meridian, der parallel der Vertikalebene liegt, projiziert sich in wahrer Gestalt und heißt daher *Hauptmeridian*. In der Horizontalebene projiziert er sich als Gerade parallel der Projektionsachse.

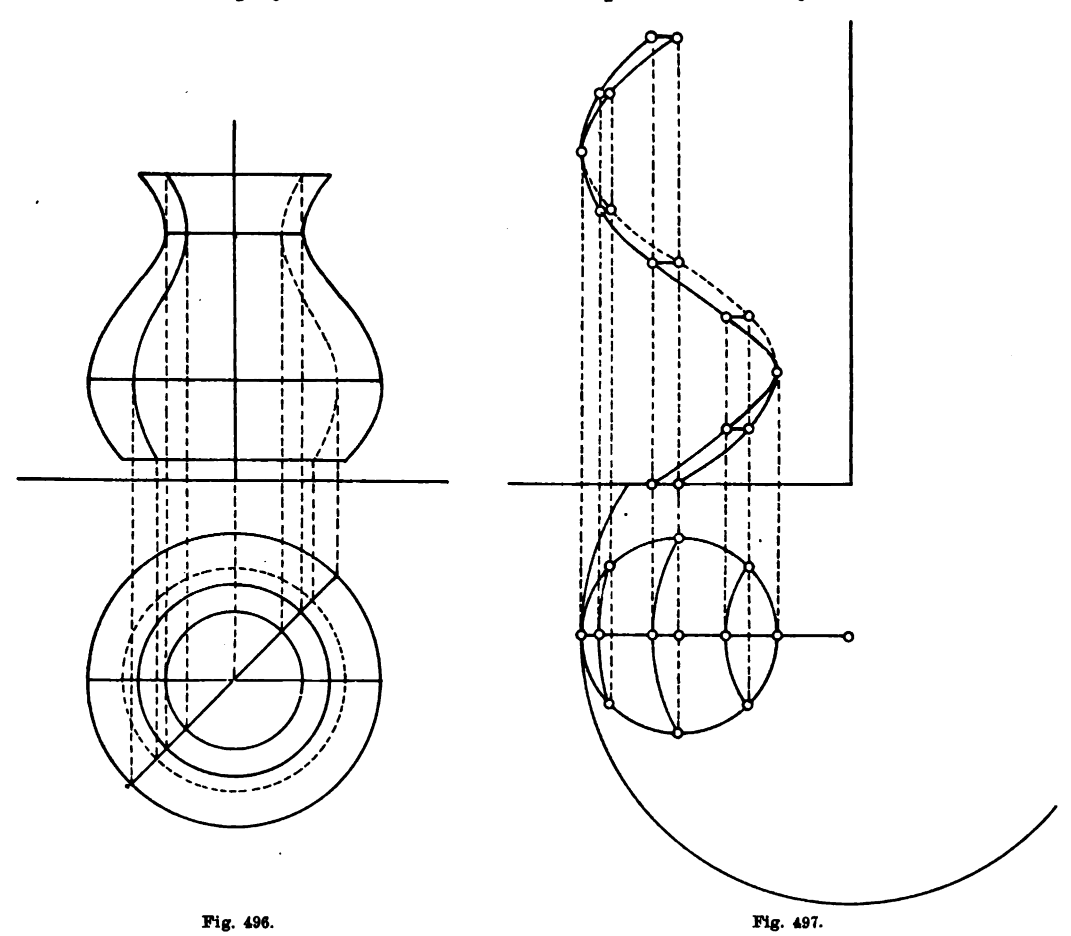


Fig. 496. Fig. 497.

Er eignet sich am besten dazu, den Parallelkreisen als Leitkurve zu dienen. Ein beliebiger Parallelkreis projiziert sich in der Vertikalebene als Sehne parallel der Projektionsachse. Die Sehne ist der Durchmesser des Parallelkreises und seiner Horizontalprojektion. Der größte, bzw. kleinste Parallelkreis bildet *den Umriß der Fläche* in der Horizontalebene, während in der Vertikalebene der Hauptmeridian Umriß ist. Ist von einem *Flächenpunkt* eine Projektion gegeben, so ist die andere mit Hilfe

des durch ihn gehenden Parallelkreises zu ermitteln. Zu jeder Vertikalprojektion eines Punktes gibt es zwei Horizontalprojektionen. Um einen *beliebigen Meridian* zu bestimmen, der etwa durch den Winkel, den er mit dem Hauptmeridian bildet, gegeben ist, werden die Schnittpunkte seiner geradlinigen Horizontalprojektion mit einer Reihe von Parallelkreisen auf die zugehörigen Vertikalprojektionen der letzteren hinaufgelotet und die so bestimmten Punkte miteinander verbunden. Da die Meridiane erst mit Hilfe von Parallelkreisen gezeichnet werden können, so zeigt sich hier am besten, daß man unverhältnismäßig einfachere Konstruktionen erhält, wenn man die Rotationsfläche als Rückungsfläche — als ein Skelett von Parallelkreisen — auffaßt. Freilich liefert die Darstellung der Fläche durch eine Reihe von Meridianen ein plastischeres Bild der Fläche; doch wirken auch die Parallelkreise plastisch, sobald sie sich nicht geradlinig projizieren. Häufig werden gleichzeitig beide Systeme der Kurven zur plastischen Darstellung von Rotationsflächen benutzt.

Ist als Erzeugende eine Raumkurve gegeben, z. B. eine Schraubenlinie, so verfährt man am besten, wenn man zunächst den Hauptmeridian der Fläche bestimmt, und diesen nachträglich als Erzeugende einsetzt. Der Hauptmeridian wird dadurch ermittelt, daß man eine Reihe von Punkten der Schraubenlinie auf horizontalen Kreisen in die Ebene des Hauptmeridians dreht und die so erhaltenen Punkte miteinander verbindet. Es sei besonders darauf aufmerksam gemacht, daß die Vertikalprojektion der Schraubenlinie nicht identisch mit dem Hauptmeridian ist (Fig. 497).

Um *eine Projektion einer Rotationsfläche in unsymmetrischer Stellung* zu erhalten, geht man von der symmetrischen aus und führt diese durch Drehen oder Transformieren oder axonometrische Konstruktionen in die verlangte Stellung über. Alle Kreise werden dabei zu ähnlichen Ellipsen; den Umriß erhält man durch Umhüllung, kann ihn aber auch besser direkt erhalten durch den Berührungszylinder, bzw. Kegel, wie im nächsten Paragraphen gezeigt werden wird.

144. Tangentialaufgaben für Rotationsflächen. *Um in einem Punkte einer Rotationsfläche die Tangentialebene zu konstruieren*, kann man den für alle Flächen gültigen Weg einschlagen und durch den Punkt zwei auf der Fläche liegende Kurven legen — am besten den Parallelkreis und Meridian —, in dem Schnittpunkte der Kurven die Tangenten an diese legen und durch diese die Tangentialebene (Fig. 498).

Während sich die Tangente an den Parallelkreis ohne weiteres

zeichnen läßt, muß die *Tangente an den Meridian*, wenn man vermeiden will, diesen selbst zu zeichnen, durch einen kleinen Kunstgriff ermittelt werden; dreht man die durch den Meridian gehende vertikale Ebene um die Rotationsachse, bis dieser mit dem Hauptmeridian zusammenfällt, so kann man an diesen die Tangente zeichnen. Dadurch ist der Schnittpunkt der Tangente mit der Rotationsachse bestimmt, der beim Zurückdrehen der Tangente an Ort und Stelle liegen bleibt.

Man kann die Aufgabe auch dadurch lösen, daß man an die Rotationsfläche einen Berührungskegel legt, der die Fläche in demjenigen

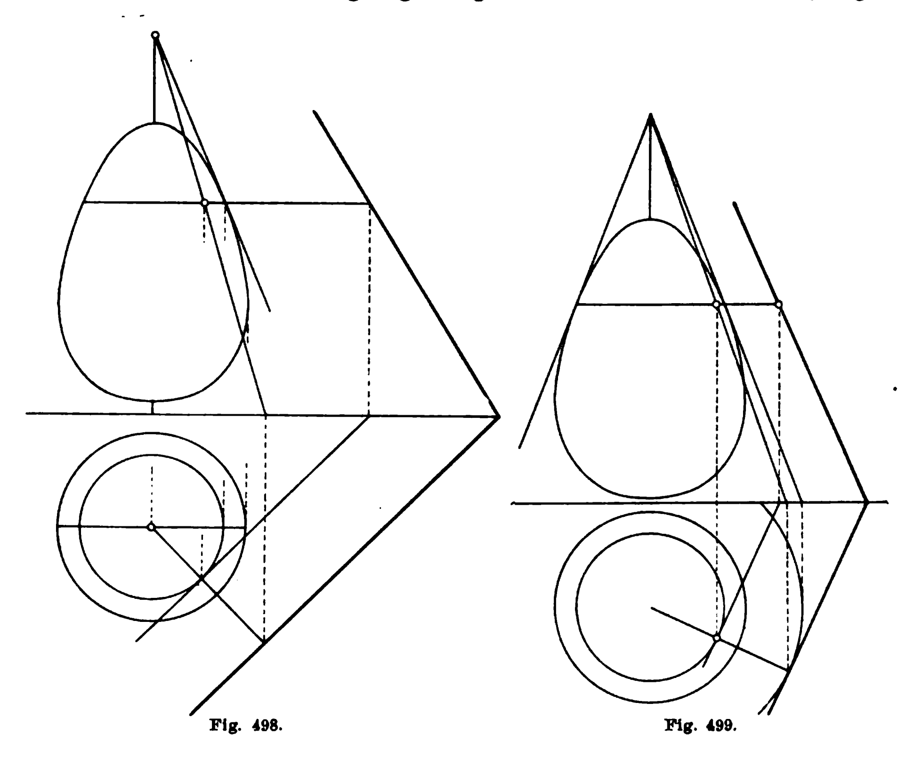


Fig. 498. Fig. 499.

Parallelkreis berührt, auf dem der gegebene Punkt liegt. *Jede Ebene, die diesen Kegel*, wir wollen ihn *einen Parallelkreiskegel* nennen, *berührt, berührt auch die Fläche.* Legt man also eine Tangentialebene an den Kegel, die durch die Tangente seines Berührungskreises im gegebenen Punkte geht, so hat man damit die Tangentialebene an die Rotationsfläche im gegebenen Punkte bestimmt (Fig. 499).

Während bei entwickelbaren Flächen eine Tangentialebene bereits durch einen Punkt bestimmt war, ist bei einer nicht entwickelbaren Fläche eine Tangentialebene erst durch zwei Punkte oder eine Gerade

bestimmt. — Durch einen Punkt lassen sich unendlich viele Tangentialebenen legen, die die Fläche längs einer Kurve berühren, dabei umhüllen sie einen Berührungskegel, dessen Spitze in dem gegebenen Punkte liegt. Rückt dieser ins Unendliche, so wird aus dem Berührungskegel ein Berührungszylinder.

Die Bestimmung der Berührungskurven eines Berührungszylinders oder -kegels ist für alle Flächen von der größten Wichtigkeit; einmal wird bei Zentral- oder Parallelperspektiven *der Umriß* einer Fläche am besten als Schnitt eines projizierenden Berührungskegels, bzw. Zylinders mit der Bildebene bestimmt. Dann aber spielen die Berührungskurven auch *bei Schattenkonstruktionen* eine wichtige Rolle. Versteht man unter Wendeschatten diejenige Kurve, welche die beleuchtete Seite der Fläche von der im Eigenschatten liegenden trennt, so erhält man durch Projektion des Wendeschattens den Schlagschatten der Fläche. Der Wendeschatten ist aber die Berührungskurve eines Berührungszylinders parallel den Sonnenstrahlen — eines Berührungskegels bei Kerzenbeleuchtung. Der Schlagschatten der Fläche ergibt sich dann als Schnitt des Berührungszylinders oder -kegels mit der Auffangsfläche (Fig. 500).

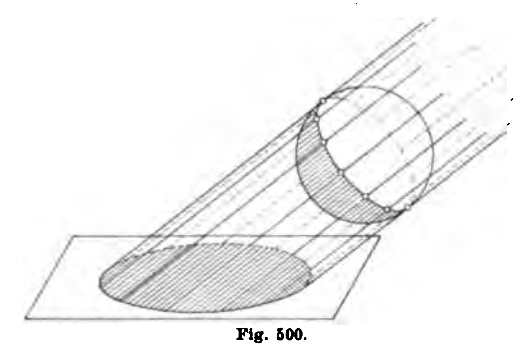


Fig. 500.

Um den Berührungskegel, dessen Spitze in einem Punkte A liegt, an eine Rotationsfläche zu konstruieren, lege man einen beliebigen Parallelkreiskegel an die Fläche (Fig. 501). Bestimmt man den Schnittpunkt der Verbindungslinie der Spitze des Kegels und des Punktes A mit der Ebene des Berührungskreises, und legt von diesem Schnittpunkte aus die beiden Tangenten an diesen Kreis, so sind die beiden Berührungspunkte zwei Punkte der gesuchten Berührungskurve.

Das zur Bestimmung mehrerer Punkte notwendige Zeichnen von Tangenten kann dadurch *vereinfacht* werden, daß man diese nicht in den verschiedenen Parallelkreisebenen zieht, sondern in derjenigen horizontalen Ebene, die durch A geht. Die Berührungspunkte aller von dieser Ebene aus den einzelnen Parallelkreiskegeln herausgeschnittenen Kreise mit den von A aus an sie gezogenen Tangenten liegen dann auf einem Kreise über OA als Durchmesser und sind als Schnitt mit diesem Kreise bestimmt (Fig. 502).

Vier Punkte der Berührungskurve ergeben sich direkt. Zieht man

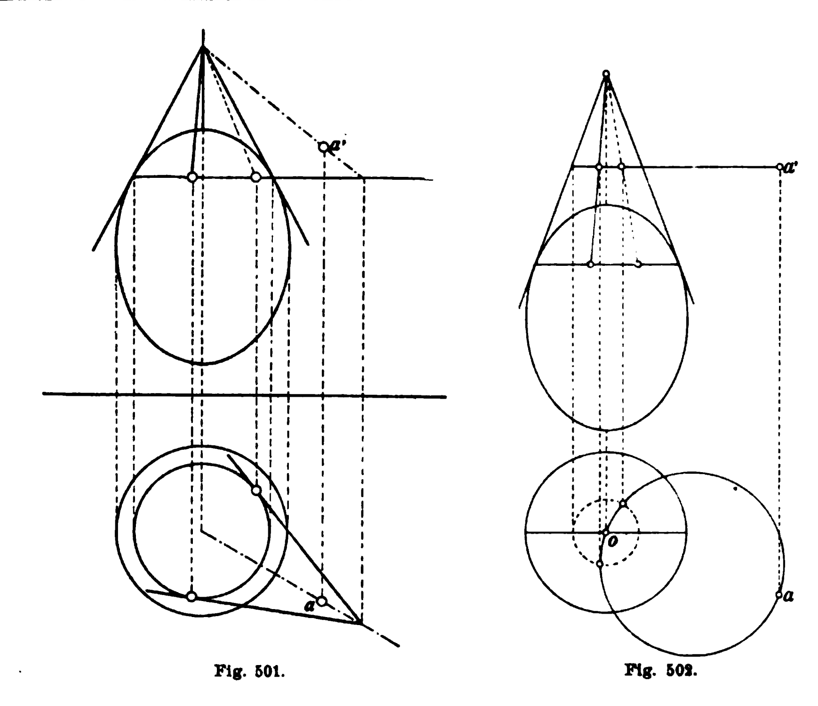


Fig. 501. Fig. 502.

nämlich von A aus in der Vertikalprojektion *die Tangenten an den Umriß*, so sind in den Berührungspunkten diejenigen Punkte bestimmt, in denen die Berührungskurve den Umriß berührt. Dieselben können sofort auf die Horizontalprojektion des Umrisses — den Durchmesser parallel der Projektionsachse — heruntergelotet werden. Ebenso bestimmen in der Horizontalprojektion die Tangenten von A aus an den Umrißkreis die beiden Punkte, in denen dieser von der Berührungskurve berührt wird. Dieselben können sofort in die Vertikalprojektion dieses Kreises — den Äquator — hinaufgelotet werden (Fig. 503).

Außer diesen vier Punkten sind meistens nur noch ganz wenige Parallelkreiskegel nötig, um die Berührungskurve zu bestimmen.

Auch *der höchste und tiefste Punkt der Berührungskurve* kann leicht direkt ermittelt werden. Beide Punkte werden in der durch A gehenden Meridianebene durch die beiden Tangenten, die von A an den Meridian gelegt werden können, bestimmt. Dreht man diese Meridianebene um

Fig. 503.

die Rotationsachse, bis der Meridian mit dem Hauptmeridian zusammenfällt, und zieht von dem mitgedrehten Punkte A an diesen die Tangenten, so erhält man durch Zurückdrehen der beiden Berührungspunkte an Ort und Stelle den höchsten und

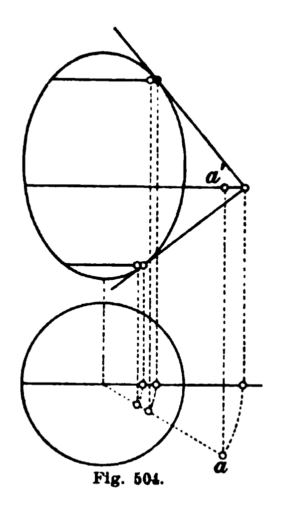
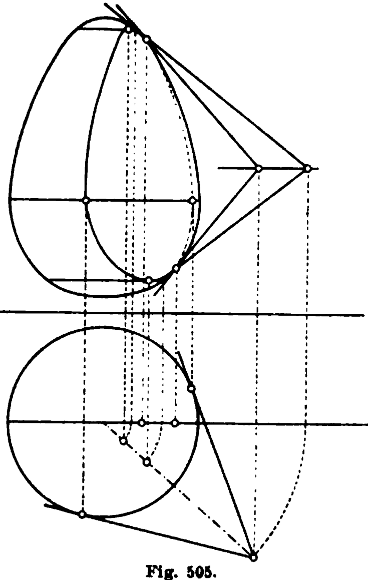


Fig. 504.


Fig. 505.

tiefsten Punkt der Berührungskurve (Fig. 504). Häufig genügen diese beiden Punkte zusammen mit den vier auf dem Umriß bestimmten Punkten bereits zur Festlegung der Berührungskurve (Fig. 505).

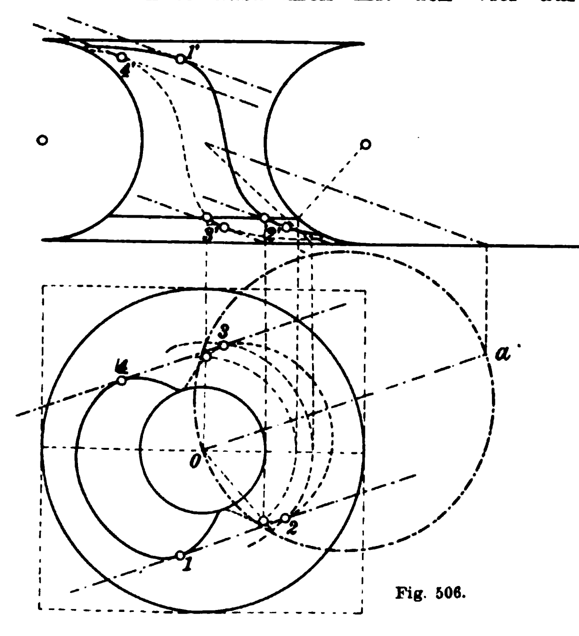


Fig. 506.

Genau in derselben Weise wird auch der Berührungszylinder bestimmt, nur tritt anstelle der Verbindungslinie der Spitze eines Parallelkreiskegels mit dem Punkte A eine Parallele zu den Zylindermantellinien durch die Spitze eines Parallelkreiskegels.

Das Zeichnen der Tangenten in den einzelnen Parallelkreisebenen

kann hier dadurch *vermieden werden*, daß man die verschiedenen Parallelkreiskegel parallel mit sich selbst so verrückt, daß die Spitzen aller Kegel in denselben Punkt der Achse (bei Fig. 506 in die Mitte der Achse) fallen, und daß man alle Kegel durch die Horizontalebene abschneidet. Die Berührungspunkte aller Grundkreise liegen dann auf einem Kreise über Oa als Durchmesser, wobei a die Horizontalspur der durch die gemeinsame Spitze aller Kegel gehenden Zylindermantellinie ist.

Der Umriß hyperbolisch gekrümmter Flächen zeigt häufig eine beachtenswerte Merkwürdigkeit. Diese kommt dann zustande, wenn bestimmte Projektionsstrahlen nicht nur die Fläche berühren, sondern gleichzeitig auch Tangenten an die von dem projizierenden Zylinder — bzw. Kegel — bestimmte Berührungskurve sind (Fig. 506, Punkt 1, 2, 3 und 4). Fällt aber eine Kurventangente mit einem Projektionsstrahl zusammen, so projiziert sich der Berührungspunkt als *Rückkehrpunkt*, wie bereits in § 115 gezeigt wurde (Fig. 507, Punkt 1, 2, 3 und 4). Besitzt der Umriß einer hyperbolisch gekrümmten Fläche auf diese Weise entstandene Rückkehrpunkte, so wird er in diesen Punkten gleichzeitig unsichtbar; es scheint dann so, als ob der Umriß mitten in der Fläche plötzlich aufhört oder gar allmählich verläuft. Beides kann natürlich nicht der Fall sein; der Umriß wird eben nur von den Rückkehrpunkten an durch die Fläche selbst zum Teil verdeckt, also unsichtbar.

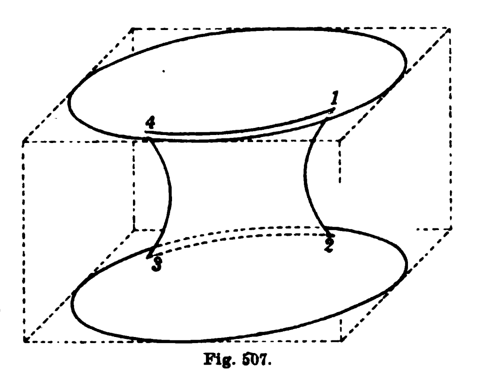


Fig. 507.

In praktischen Fällen ist es meist nicht notwendig, den Rückkehrpunkt genau zu bestimmen als Punkt, in welchem die Flächentangente gleichzeitig die Kurve berührt, da derselbe durch Schätzung gewöhnlich mit genügender Genauigkeit bestimmt werden kann und zudem noch mehr oder weniger verschleiert erscheint.

Mittels des Berührungszylinders und -kegels lassen sich nun auch die Aufgaben lösen, eine Tangentialebene durch eine gerade Linie an eine Fläche zu legen und eine Tangentialebene parallel einer Richtungsebene zu bestimmen.

Zur *Bestimmung einer Tangentialebene durch eine gegebene Gerade* bieten sich die folgenden vier Konstruktionsmöglichkeiten dar:

1. Man legt von einem Punkte der gegebenen Geraden einen Be-

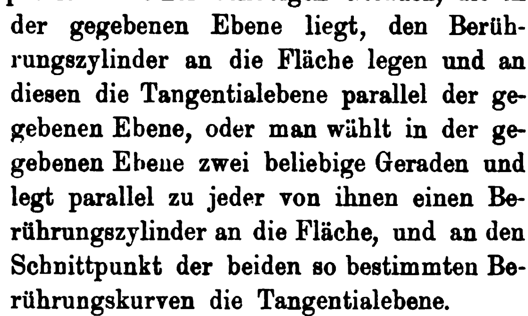
rührungskegel an die Fläche und an diesen eine Tangentialebene durch die gegebene Gerade.

2. Man legt parallel der gegebenen Geraden den Berührungszylinder an die Fläche und an diesen durch die Gerade die Tangentialebene.

3. Man legt von zwei Punkten der Geraden je den Berührungskegel an die Fläche und legt in dem Schnittpunkte der beiden so bestimmten Berührungskurven die Tangentialebene an die Fläche.

4. Man legt von einem Punkte der Geraden den Berührungskegel und parallel der Geraden den Berührungszylinder an die Fläche und bestimmt die Tangentialebene der Fläche im Schnittpunkte der beiden so bestimmten Berührungskurven. — Welcher dieser vier Wege der zweckmäßigste ist, hängt von den jeweiligen Umständen der betreffenden Aufgabe ab.

Um eine Tangentialebene parallel einer gegebenen Ebene an die Fläche zu legen, kann man entweder parallel zu einer beliebigen Geraden, die in



der gegebenen Ebene liegt, den Berührungszylinder an die Fläche legen und an diesen die Tangentialebene parallel der gegebenen Ebene, oder man wählt in der gegebenen Ebene zwei beliebige Geraden und legt parallel zu jeder von ihnen einen Berührungszylinder an die Fläche, und an den Schnittpunkt der beiden so bestimmten Berührungskurven die Tangentialebene.

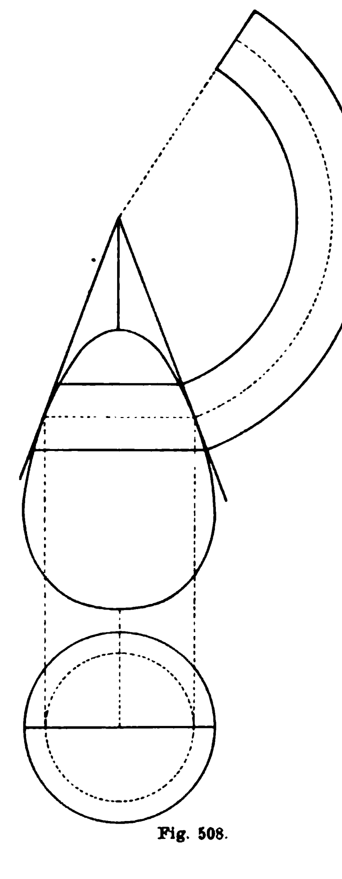


Fig. 508.

145. Die angenäherte Abwicklung von Rotationsflächen. Die Abwicklung einer Rotationsfläche ist nur annäherungsweise möglich; sie ist jedoch zum Übertragen von Ornamenten oder aus anderen Gründen, z. B. um einen Erdglobus mit bedrucktem Papier zu überkleben, von Wichtigkeit. *Durch die beiden Systeme von Kurven — Meridiane und Parallelkreise — sind zwei Wege zur angenäherten Abwicklung von Flächenstreifen vorgeschrieben.*

Ein Parallelkreiskegel hat das zwischen zwei unendlich nahen Parallelkreisen liegende Mantelstück mit der Fläche gemein. Rückt man die beiden Parallelkreise um

eine endliche, aber kleine Entfernung auseinander, so fällt die zwischen diesen beiden Ebenen liegende Zone des Kegelmantels und der Fläche noch annähernd zusammen. *Die Flächenzone kann also angenähert als Kegelmantelzone abgewickelt werden.* Als Kegelmantel wird dabei derjenige benutzt, der die Rotationsfläche in dem in der Mitte zwischen den beiden Grenzmeridianen liegenden Meridian berührt. Die Länge dieses mittleren Meridians wird dann mittels kleiner Zirkelöffnung auf die Abwicklung übertragen (Fig. 508).

Legt man an die Fläche einen *Berührungszylinder parallel mit den Ebenen der Parallelkreise,* so berührt derselbe die Fläche längs eines

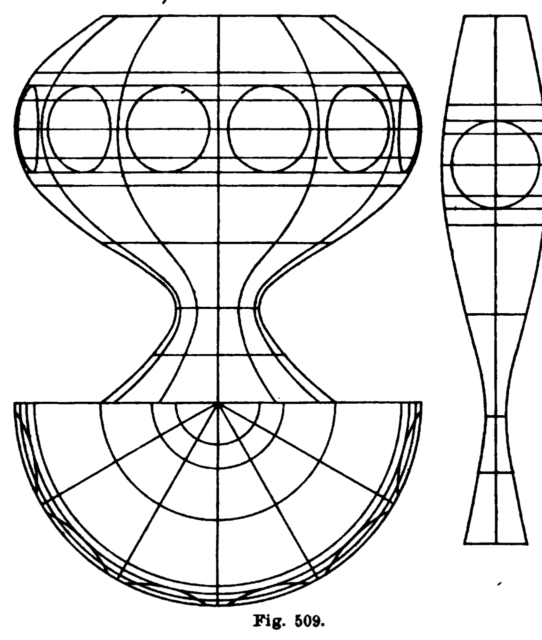
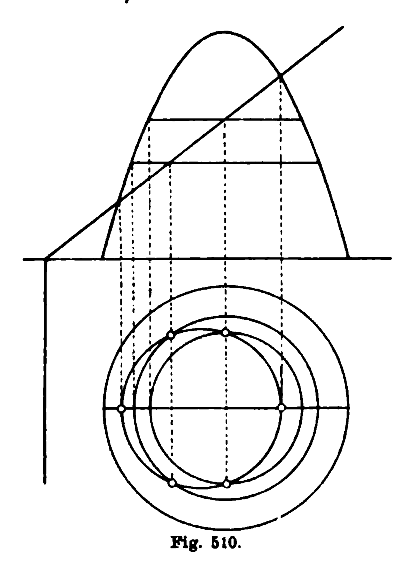


Fig. 509.

zylindrischen Flächenstückes, das zwischen zwei unendlich nahen Meridianen liegt. Dreht man den einen der Meridiane um einen kleinen Winkel um die Achse, so fällt *das Flächenstück der Rotationsfläche zwischen den beiden Meridianen* wenigstens noch annähernd mit dem Zylinder zusammen und *kann* daher *als Zylindermantel abgewickelt werden.* Zu diesem Zwecke rektifiziert man den in der Mitte zwischen den beiden Grenzmeridianen liegenden Meridian und bestimmt seine Schnittpunkte mit einer Anzahl von Parallelkreisen. Durch diese Punkte legt man senkrecht zum rektifizierten Meridian die aus der Horizontalprojektion entnommenen Stücke der einzelnen Parallelkreise, die zwischen den Grenzmeridianen liegen (Fig. 509).

Durch angenäherte Abwicklung ist es auch leicht möglich, ein Flächenmuster in die Projektion der Fläche zu übertragen. So ist z. B. in Fig. 509 eine Anzahl gleich großer Kreise, deren Mittelpunkte in gleichen Abständen auf dem Äquator liegen, auf die Rotationsfläche dadurch übertragen worden, daß die einzelnen von zwei Meridianen begrenzten Flächenstreifen, auf denen je ein Kreis liegt, als Zylinder abgewickelt wurden.

146. Ebene Schnitte von Rotationsflächen. *Die Schnittkurve einer Rotationsfläche mit einer Ebene* ist dann nicht schwer zu bestimmen, *wenn die Ebene senkrecht auf einer der Projektionsebenen, z. B. der Vertikalebene, steht.* Einzelne Punkte der Kurve ergeben sich dann direkt als Schnitte der Vertikalspur mit einzelnen Parallelkreisen (Fig. 510). Steht die Ebene nicht senkrecht auf einer der Projektionsebenen, so läßt sich *diese Lage* doch *stets durch eine Transformation* erreichen.


Fig. 510.

Indessen läßt sich *die Kurve auch da direkt* bestimmen. *Die einfachste Schar von Hilfsflächen,* von Flächen also, die mit beiden gegebenen Flächen die einfachsten Schnittkurven bilden, *sind horizontale Ebenen*; denn diese schneiden die gegebene Ebene in geraden Linien, die parallel der Horizontalspur der gegebenen Ebene liegen, und die Rotationsfläche in Parallelkreisen, die in der Horizontalprojektion als konzentrische Kreise erscheinen. Jeder dieser Kreise bestimmt mit der zugehörigen Geraden zwei Punkte der gesuchten Kurve in der Horizontalprojektion. Die zugehörigen Vertikalprojektionen erhält man durch Hinaufloten auf die entsprechenden Vertikalprojektionen der Parallelkreise. In Fig. 511 ist die durch die Achse gehende und senkrecht auf der Horizontalspur der gegebenen Ebene stehende Ebene für die Schnittkurve Symmetralebene. Ihre Schnittlinie mit der gegebenen Ebene bestimmt zwei Punkte, die hier wegen der eingeschnürten Form der Kurve als höchster und tiefster Punkt von Wichtigkeit sind. Man erhält diese beiden Punkte, wenn man die genannte Symmetralebene dreht, bis sie in die Ebene des Hauptmeridians fällt. In dieser bestimmt man die Schnittpunkte der

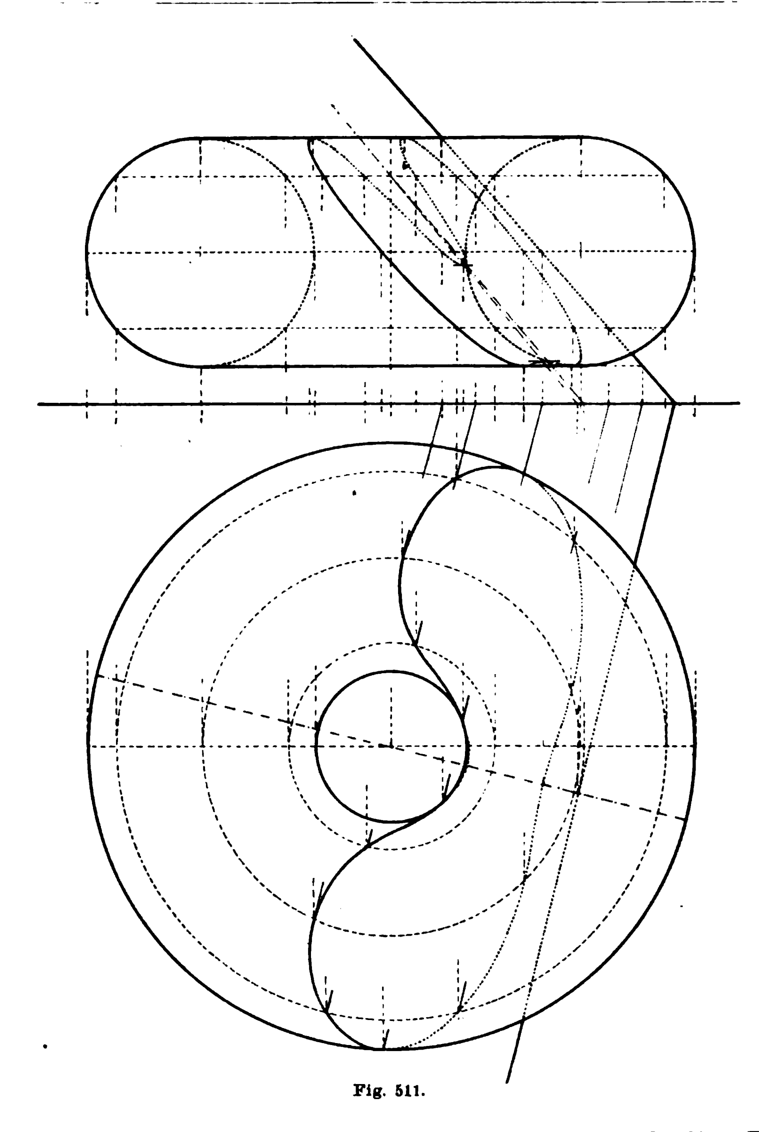


Fig. 511.

gedrehten Schnittgeraden mit dem Hauptmeridian und dreht diese Punkte zurück in die ursprüngliche Lage der Symmetralebene.

147. Durchdringung einer Rotationsfläche mit einer Zylinder- und Kegelfläche. *Wird eine Rotationsfläche von einem vertikalen Zylinder geschnitten,* so ergeben sich einzelne Punkte der Schnittkurve in der Horizontalprojektion direkt als Schnittpunkte der Grundkurve des Zylinders mit einer Schar von Parallelkreisen (Fig. 512). Handelt es sich

um einen *schiefen Zylinder, dessen Horizontalspur ein Kreis ist,* so werden beide Flächen wiederum durch *eine Schar von horizontalen Ebenen* geschnitten. In jeder derselben sind dann zwei Punkte der gesuchten Schnittkurve als Schnittpunkte der von ihr aus den beiden Flächen herausgeschnittenen Kreise bestimmt. *Ist die Horizontalspur eine kompliziertere Kurve,* so könnte man zwar einzelne Schnittpunkte auf dieselbe Weise konstruieren, doch hätte man dabei eine Anzahl von Kurven, die kongruent der Horizontalspur des Zylinders sind, zu zeichnen. Dieser Unbequemlichkeit kann man durch einen *Kunstgriff* aus dem Wege gehen. Dieser besteht darin, daß man jede der Hilfsebenen parallel mit sich selbst in der Richtung der Mantellinie des Zylinders verschiebt, bis die aus dem Zylinder herausgeschnittene Kurve mit dessen Horizontalspur zusammenfällt. Um den Kreis in der verschobenen Stellung zu zeichnen, genügt es, den Mittelpunkt desselben zu verschieben. Die in der Horizontalebene so bestimmten Schnittpunkte werden je längs einer Mantellinie des Zylinders auf den betreffenden Parallelkreis an Ort und Stelle zurückgeschoben. — Den höchsten und tiefsten Punkt der Kurve in Fig. 513 erhält man dadurch, daß man die oberste und unterste Mantellinie um die Achse dreht, bis sie in die Ebene des Hauptmeridians fallen, ihre Schnittpunkte mit diesem bestimmt und sie zurückdreht in die alte Lage.

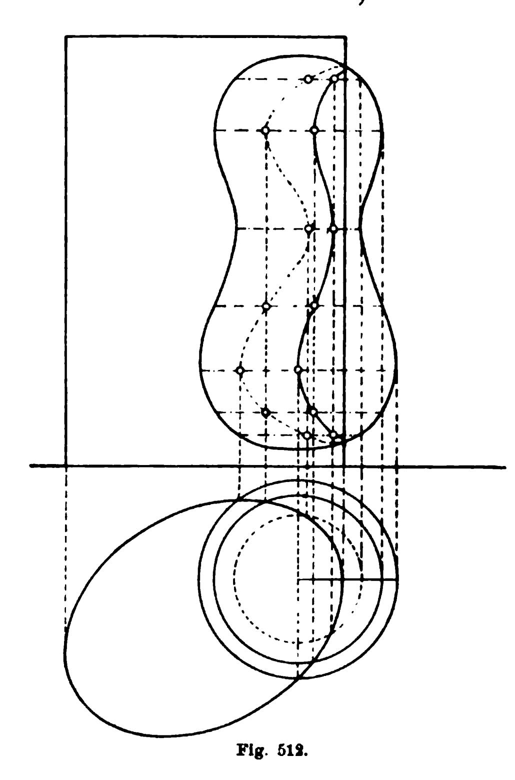


Fig. 512.

Dasselbe Verfahren des Verrückens einer Hilfsfläche in die Horizontalebene kann in etwas modifizierter Weise auch angewendet werden, *wenn es sich um den Schnitt einer Rotationsfläche mit einem Kegel handelt* (Fig. 514). Hier wird jede Hilfsebene so verrückt, daß sich der Mittelpunkt des aus der Rotationsfläche herausgeschnittenen Kreises auf einer geraden Linie, die durch die Spitze des Kegels geht, bewegt. Bei der Verrückung denke man sich die aus den beiden Flächen herausgeschnittenen Kurven

ihre Dimensionen ständig so verändern, daß die aus dem gegebenen Kegel herausgeschnittene Kurve immer auf dem Mantel desselben bleibt, wobei der aus der Rotationsfläche herausgeschnittene Kreis sich so verändert, daß er den Mantel eines Hilfskegels beschreibt, dessen Spitze in

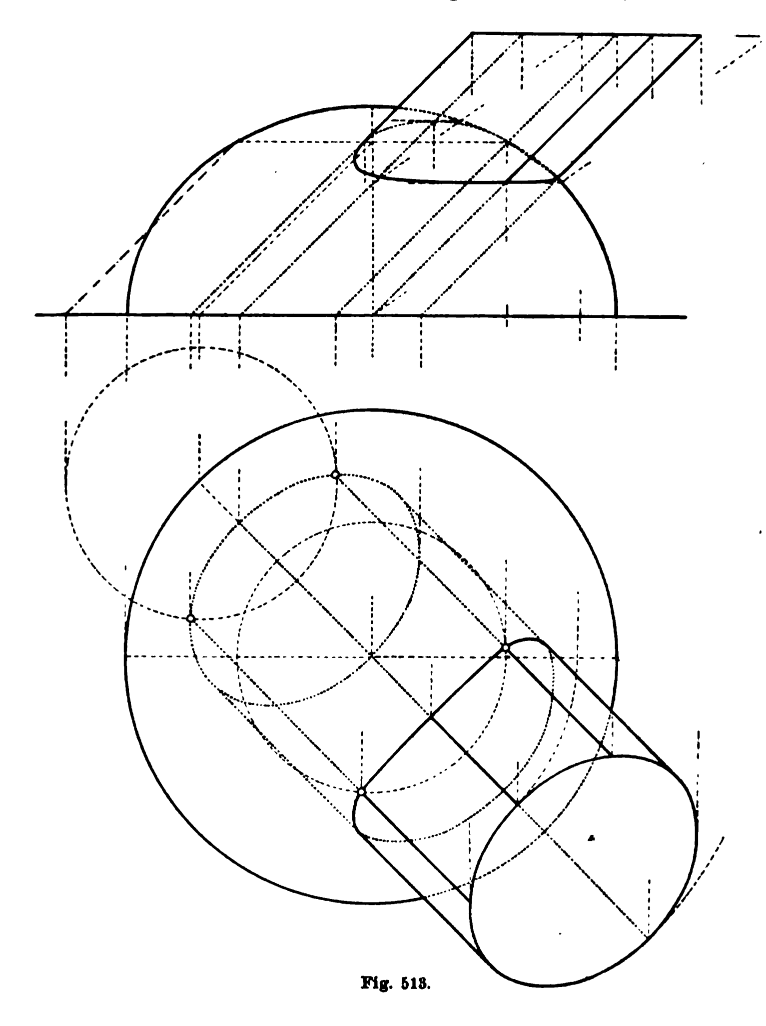


Fig. 513.

der Spitze des gegebenen Kegels liegt. Hat man in dieser Weise eine Hilfsebene in die Horizontalebene verschoben, so fällt die Schnittkurve des gegebenen Kegels mit dessen Horizontalspur zusammen, während der verschobene Mittelpunkt des Kreises die Spur einer durch die Spitze des Kegels und den Mittelpunkt des Kreises gehenden geraden Linie ist.

Der Radius dieses Kreises wird in der Vertikalebene auf der Projektionsachse durch die Verbindungslinie der Spitze des Kegels mit dem Mittelpunkt des Parallelkreises und durch die Verbindungslinie der Kegelspitze mit dem Endpunkte der Strecke, in die sich der Parallelkreis projiziert, begrenzt.

Die beiden so in der Horizontalebene erhaltenen Kurven, die auch als *Zentralprojektion der in einer Hilfsebene liegenden beiden Kurven* aufgefaßt werden können, bestimmen durch ihre Schnittpunkte diejenigen Kegelmantellinien, auf denen die durch die betreffende Hilfsebene bestimmten Punkte der gesuchten Durchdringungskurve liegen; dieselben sind daher durch den Schnitt dieser Mantellinien mit dem Kreise an Ort und Stelle bestimmt.

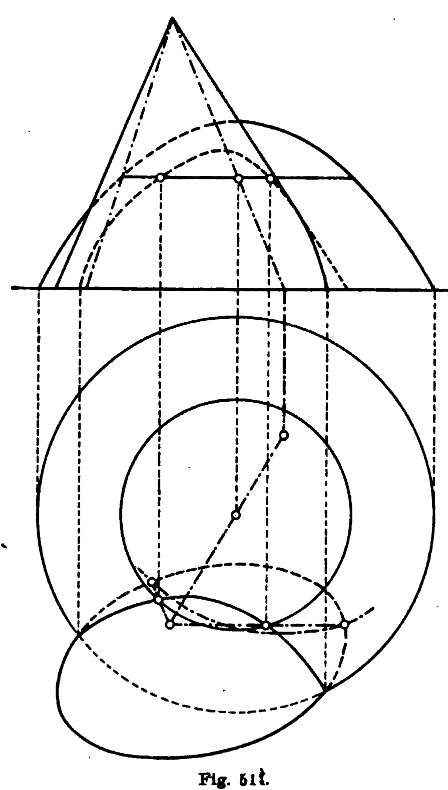


Fig. 514.

148. Durchdringung zweier Rotationsflächen. *Sind die Achsen zweier sich schneidender Rotationsflächen parallel* und senkrecht auf der Horizontalebene, so kann man einzelne Punkte der Schnittkurve leicht dadurch bestimmen, daß man beide Flächen durch eine Schar horizontaler Ebenen schneidet (Fig. 515). In jeder Hilfsebene sind zwei Punkte durch den Schnitt der beiden aus den Flächen herausgeschnittenen Kreise bestimmt.

Schneiden sich die beiden Achsen der Rotationsflächen, so projiziere man dieselben so, daß eine Achse senkrecht auf der Horizontalebene, die andere parallel der Vertikalebene liegt. Als Hilfsflächen eignen sich hier eine Schar von konzentrischen Kugeln um den Schnittpunkt der Achsen als Mittelpunkt. Jede dieser Kugeln schneidet die beiden Rotationsflächen in Kreisen, die sich in der Vertikalprojektion als gerade Linien darstellen. Der Schnitt derselben ist die Vertikalprojektion zweier sich deckender Punkte der Durchdringungskurve. Die zugehörigen Horizontalprojektionen erhält man durch Herunterloten auf den entsprechenden

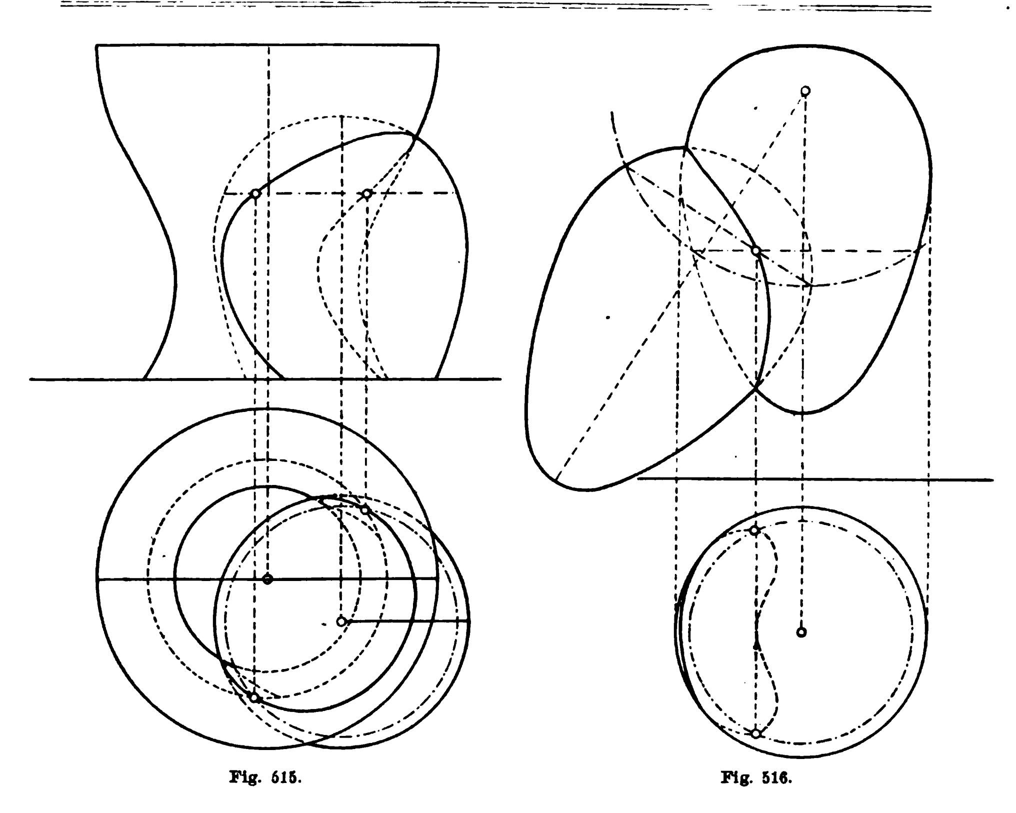


Fig. 515. Fig. 516.

Parallelkreis derjenigen Rotationsfläche, deren Achse vertikal steht (Fig. 516).

Sind die Achsen beider Rotationsflächen windschief, oder handelt es sich um eine Rotationsfläche und eine kompliziertere andere Fläche, so wird im allgemeinen eine Schar horizontaler Ebenen am einfachsten zur Bestimmung der Durchdringungskurve benutzt werden können.

XVIII. Kapitel.

Die Flächen zweiter Ordnung als Rückungsflächen.

149. Polare Beziehungen. Eine Fläche zweiter Ordnung wurde bereits definiert als eine Fläche, die von jeder Geraden in zwei und nur zwei Punkten geschnitten wird. Aus dieser Definition folgt sofort, *daß eine solche Fläche von einer Ebene in einem Kegelschnitt geschnitten wird;* denn die Schnittkurve darf von jeder in der Ebene liegenden Geraden nur in zwei Punkten geschnitten werden.

Zieht man durch einen Punkt P außerhalb der Fläche eine Sekante s, die die Fläche in A und B schneidet, so entsteht sofort die Frage nach dem geometrischen Ort für den vierten harmonischen Punkt zu P, A und B (Fig. 517).

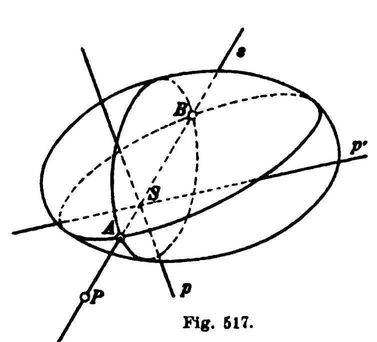


Fig. 517.

Um diesen zu ermitteln, lege man durch P eine beliebige Schnittebene und bestimme mit Bezug auf die Schnittkurve die Polare p zu P; sodann lege man durch s eine zweite Schnittebene und bestimme auch mit Bezug auf diese Schnittkurve zu P die Polare p'. Ist dann S der Schnittpunkt von p und s, so ist S der vierte harmonische Punkt zu P, A und B und muß daher auch auf p' liegen. p und p' müssen sich daher schneiden. Ebenso müssen sich alle weiteren Polaren zu P schneiden, die man durch andere und andere, durch den Punkt P gehende Schnittebenen erhält. *Alle Polaren zu P bestimmen* somit *eine Ebene π, die die Polarebene zu P mit Bezug auf die Fläche zweiter Ordnung heißt.*

Liegt der Punkt P innerhalb der Fläche, so ergibt sich in ähnlicher Weise als geometrischer Ort für den vierten harmonischen Punkt zu P, A und B, wo A und B wieder die Schnittpunkte irgendeiner durch P gehenden Sekante der Fläche sind, wieder eine Ebene, die endlich, *wenn P auf der Fläche selbst liegt, in die Tangentialebene in diesem Punkte* übergeht, welche von der Gesamtheit aller durch P an die verschiedenen Schnittkurven gelegten Tangenten gebildet wird.

Läßt man *eine durch P — außerhalb der Fläche — gezogene* Sekante dadurch zur *Tangente* werden, daß man ihre Schnittpunkte A und B zusammenfallen läßt, so ergibt sich, daß *der Berührungspunkt in der Polarebene zu P liegen muß.* Läßt man die durch P gehende Tangente an

der Fläche entlang gleiten, so daß dieselbe den Mantel eines *Berührungskegels* beschreibt, so müssen alle Berührungspunkte in der Polarebene zu P liegen. *Die Berührungskurve des Kegels ist also identisch mit der Schnittkurve der Polarebene, ist also ein Kegelschnitt* (Fig. 518).

Liegt ein Punkt R in einer Ebene π, so geht die Polarebene ϱ zu R durch den Pol P zu π, und umgekehrt: geht eine Ebene ϱ durch

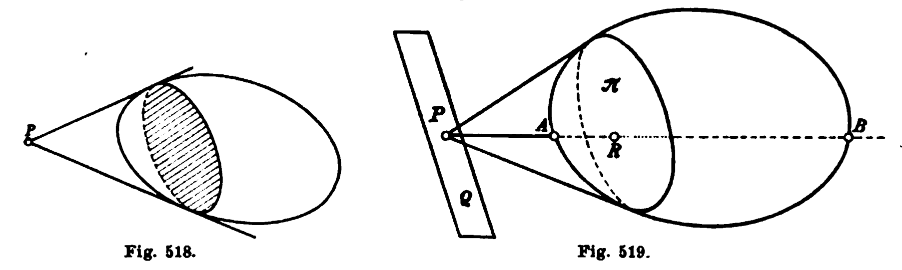


Fig. 518. Fig. 519.

einen Punkt P, so liegt der Pol R zu ϱ in der Polarebene π zu P (Fig. 519); bewegt sich also ein Punkt P in einer Ebene ϱ, so dreht sich die Polarebene π zu P um den Pol R zu ϱ; und umgekehrt: dreht sich eine Ebene ϱ um einen Punkt P, so bewegt sich der Pol R zu ϱ in der Polarebene π zu P. Dreht sich demnach π um zwei Punkte, d. h. also um eine

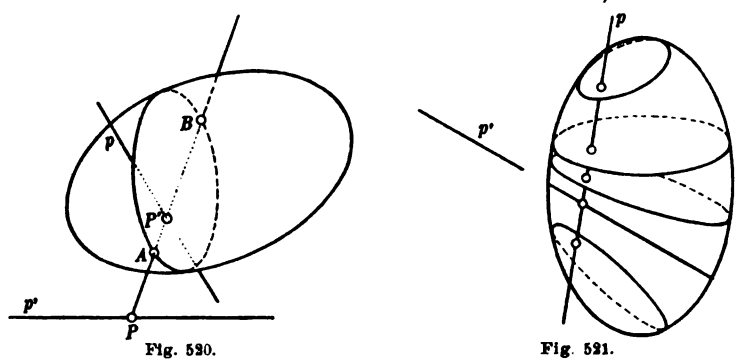


Fig. 520. Fig. 521.

Gerade, so bewegt sich ihr Pol P gleichzeitig in zwei Ebenen, d. h. in der Schnittgeraden derselben. Bewegt sich umgekehrt P auf der Schnittgeraden zweier Ebenen, so dreht sich seine Polarebene π um zwei Punkte, d. h. um deren Verbindungslinie. Von *zwei Geraden* p *und* p', die einander in dieser Weise zugeordnet sind, heißt *jede die Polare der anderen. Dieselben haben demnach die folgenden Eigenschaften:*

1. *Für jeden Punkt auf* p *geht die Polarebene durch* p' *und umgekehrt.*

2. *Irgendeine Sekante, die* p *und* p' *in* P *und* P' *schneidet, wird von*

der Fläche in A und B so geschnitten, daß A, B, P und P′ vier harmonische Punkte sind (Fig. 520).

3. *Legt man durch p′ eine beliebige Schnittebene, so liegt der Pol zu p′ mit Bezug auf die Schnittkurve auf p* (Fig. 521).

150. Das Reziprozitätsgesetz des Raumes. Im vorigen Paragraphen ist durch eine Fläche zweiter Ordnung jedem Punkte eine Ebene, jeder Geraden wieder eine Gerade und jeder Ebene ein Punkt zugeordnet worden. Dadurch läßt sich zu jeder räumlichen Konfiguration aus Punkten, Geraden und Ebenen eine andere aus Ebenen, Geraden und Punkten herstellen. Zwei Konfigurationen, die in dieser Weise durch Vermittlung einer Fläche zweiter Ordnung zueinander in Beziehung stehen, heißen *reziprok. Durch diese reziproke Beziehung lassen sich alle Eigenschaften der Lage einer räumlichen Konfiguration auf eine andere derart übertragen,* daß, wenn in der einen zwei Punkte auf einer Geraden liegen, in der anderen zwei Geraden durch einen Punkt gehen; liegen drei Punkte in einer Ebene, so schneiden sich in der reziproken Konfiguration drei Ebenen in einem Punkte; die Verbindungslinie zweier Punkte wird zur Schnittgeraden zweier Ebenen, und endlich der Verbindungsebene zweier paralleler Geraden entspricht die Schnittgerade zweier Ebenen.

Wendet man dieses räumliche Reziprozitätsgesetz auf Flächen dadurch an, daß man zu jedem Punkte einer Fläche die Polarebene bestimmt, so umhüllen alle diese Ebenen die zur ersten reziproke Fläche, und *jeder Fläche n^{ter} Ordnung wird eine andere n^{ter} Klasse zugeordnet.*

151. Mittelpunkt, Durchmesser, Achsen und Hauptschnitte der Flächen zweiter Ordnung. Wir wollen die polaren Beziehungen dazu benutzen, um wichtige Aufschlüsse über *die Gestalt der Flächen zweiter Ordnung,* namentlich auch über *Symmetrieverhältnisse,* zu erhalten.

Betrachtet man den unendlich fernen Punkt als Pol, so werden die durch ihn gehenden Sekanten parallel, und die Polarebene wird durch die Mitten der durch die Fläche aus den Sekanten herausgeschnittenen Sehnen bestimmt. Eine solche Ebene heißt *Diametralebene.* Sie ist identisch mit der Ebene der Berührungskurve, die durch den Berührungszylinder parallel der Sehnenrichtung bestimmt wird (Fig. 522). *Jede Diametralebene heißt den Sehnen konjugiert, die sie halbiert.* Alle Diametralebenen gehen durch einen Punkt O, der der Pol der unendlich fernen Ebene ist. Alle Sehnen, die durch O gehen, werden durch diesen Punkt halbiert. Alle Schnittkurven, deren Ebenen durch ihn gehen, haben

in ihm ihren Mittelpunkt, er heißt daher der *Mittelpunkt* der Fläche zweiter Ordnung. Eine durch den Mittelpunkt gehende Sehne heißt *Durchmesser*.

Rückt eine von zwei Geraden p und p', von denen jede die Polare der anderen ist, etwa p' ins Unendliche, so werden alle durch p'

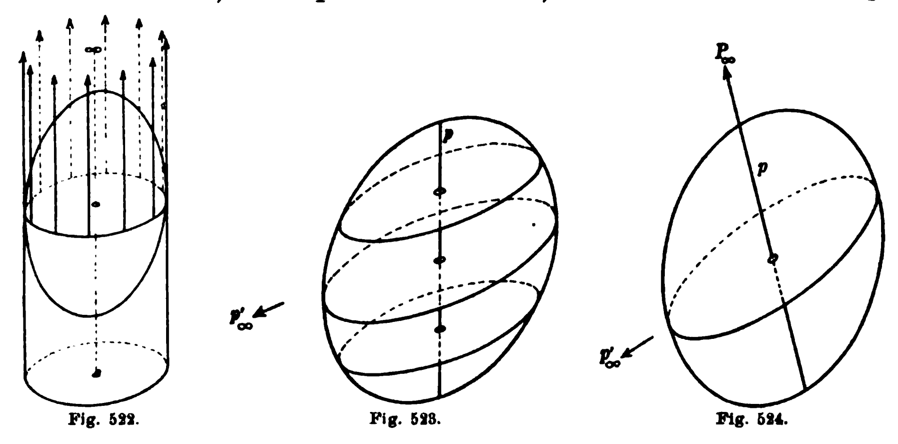


Fig. 522. Fig. 523. Fig. 524.

gehenden Schnittebenen parallel, und die Polare p zu p' wird durch die Mittelpunkte aller aus der Fläche herausgeschnittenen parallelen Kurven bestimmt; p wird also Durchmesser (Fig. 523). Der durch seinen Mittelpunkt O gehende Parallelschnitt ist Diametralebene, und zwar diejenige, die zu p konjugiert ist (Fig. 524), denn die Polarebene des unendlich fernen Punktes von p muß durch die unendlich ferne Gerade p' gehen. Zwischen einer Diametralebene und dem zu ihr konjugierten Durchmesser findet also die gegenseitige Beziehung statt, daß *die Diametralebene alle zum konjugierten Durchmesser parallelen Sehnen halbiert, während der Durchmesser alle zu seiner konjugierten Diametralebene parallelen Schnittkurven in deren Mittelpunkten trifft.*

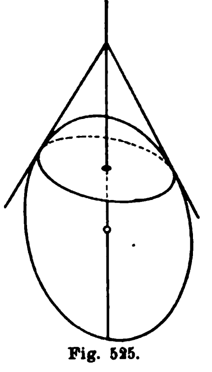


Fig. 525.

Läßt man die Schnittebene so weit hinausrücken, bis sie Tangentialebene wird, so ergibt sich, daß *die Berührungspunkte der beiden parallelen Tangentialebenen die Endpunkte des Durchmessers sind, der zu der den Tangentialebenen parallen Diametralebene konjugiert ist.* — Auch *liegen die Spitzen aller Berührungskegel, die die Fläche in einem der Parallelschnitte berühren, auf dem konjugierten Durchmesser* (Fig. 525); denn würde die Spitze nicht auf p liegen, so könnte die Ebene der Berührungskurve dieses Kegels auch nicht durch die unendlich ferne Polare p' gehen, also nicht einer der Parallelschnitte sein.

Dreht man eine Ebene um einen Durchmesser und bestimmt für jede Schnittkurve den zu diesem konjugierten Durchmesser, so liegen alle diese auf der Diametralebene, die zu dem Durchmesser konjugiert ist, um den gedreht wurde (Fig. 526), denn jeder konjugierte Durchmesser in der Diametralebene ist der geometrische Ort für die Mitten der Sehnen, die parallel zum Drehungsdurchmesser sind. Greift man in der Diametralebene, die zu einem Durchmesser a konjugiert ist, zwei unter sich konjugierte Durchmesser b und c willkürlich heraus, so bilden a, b und c *ein Tripel konjugierter Durchmesser* (Fig. 527). *Von ihnen ist jeder konjugiert zu der Ebene der beiden anderen;* denn wenn a zur Ebene von b und c konjugiert ist, und b zu c, so halbiert die Ebene durch a und c alle Sehnen parallel zu b. — Zu je zwei konjugierten Durchmessern ist ein dritter eindeutig bestimmt. — *Die drei durch ein Tripel konjugierter*

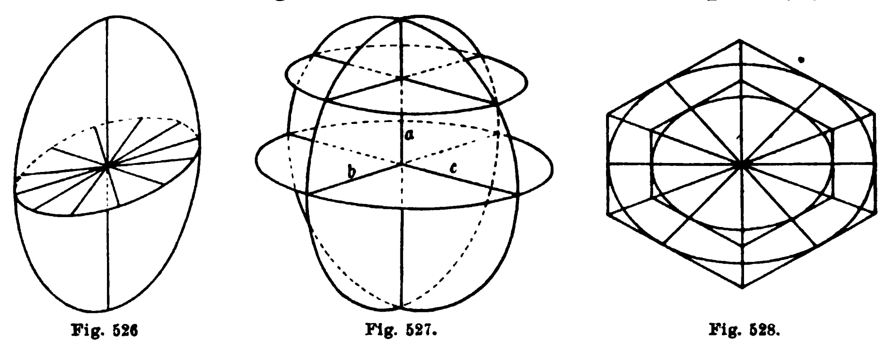


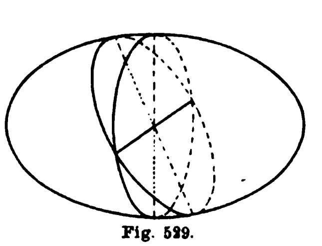
Fig. 526 Fig. 527. Fig. 528.

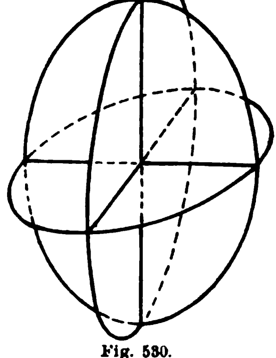
Durchmesser bestimmten Diametralebenen heißen gleichfalls konjugiert. Durch je zwei ist die dritte eindeutig bestimmt.

Hat man drei konjugierte Diametralebenen und legt einen beliebigen Parallelschnitt zu einer derselben, so schneiden die beiden anderen aus der Schnittkurve zwei konjugierte Durchmesser heraus (Fig. 527). In zwei Parallelschnitten sind also sämtliche Paare konjugierter Durchmesser parallel. Daraus folgt, daß *Parallelschnitte einer Fläche zweiter Ordnung ähnliche und ähnlich liegende Kurven sind.* Zwei ebene Figuren sind nämlich dann ähnlich, wenn die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch einen Punkt gehen, und entsprechende Geraden parallel sind (Fig. 528). Das ist aber bei zwei Parallelschnitten nach dem Gesagten der Fall, wenn man den einen parallel mit sich selbst und ohne ihn zu drehen verrückt, bis er, Mittelpunkt auf Mittelpunkt, in die Ebene des anderen fällt. Als entsprechende Geraden sind bei den beiden Kurven die durch die beiden Tangenten in entsprechenden Punkten bestimmte Kurvenelemente anzusehen.

Damit sind aber die Flächen zweiter Ordnung charakterisiert als Rückungsflächen. Sie können dadurch erzeugt werden, daß von zwei Kegelschnitten mit gemeinschaftlichem Durchmesser der eine sich so parallel bewegt, daß sich sein Mittelpunkt auf dem zum gemeinsamen Durchmesser konjugierten bewegt. Dabei verändert er seine Gestalt derart, daß er stets zur Ausgangslage ähnlich und ähnlich liegend — wenn auch in verschiedenen Ebenen — bleibt, und stets den festen Kegelschnitt, der dabei die Rolle einer Leitkurve übernimmt, schneidet.

Ehe wir auf diese Weise die verschiedenen Typen der Flächen zweiter Ordnung erzeugen, wollen wir, um eventuell das Verfahren möglichst zu vereinfachen, vorher noch untersuchen, ob nicht ein Durchmesser existiert, der auf seiner konjugierten Diametralebene senkrecht steht. Da der Kegelschnitt der Diametralebene zwei aufeinander senkrecht stehende Achsen besitzt, so würde es dann *ein Tripel von konjugierten Durchmessern* geben, *von denen jeder auf den beiden anderen senkrecht steht.* Zu diesem Zwecke stellen wir die folgende Überlegung an. Unter allen möglichen Durchmessern der Fläche wird — wenn überhaupt ein endlicher vorhanden ist — einer der kleinste sein. Dieser bildet die kleine Achse von allen durch ihn hindurchgehenden Schnittellipsen, oder die reelle Achse aller Schnitthyperbeln. Dreht man also eine Schnittebene um diesen kleinsten Durchmesser (Fig. 529), so bestimmen die anderen Achsen der aus der Fläche herausgeschnittenen Kegelschnitte die zu ihm konjugierte Diametralebene; und zwar steht dieselbe auf ihm senkrecht, weil die sie bestimmenden Achsen der Schnittkurven alle senkrecht auf dem kleinsten Durchmesser der Fläche stehen. Es gibt also drei konjugierte Durchmesser, von denen jeder senkrecht auf den beiden anderen steht (Fig. 530); dieselben heißen *Achsen* der Fläche und die durch sie bestimmten Diametralebenen *Hauptschnitte.* Letztere sind zugleich *Symmetralebenen.* Jede von ihnen teilt die Fläche in zwei symmetrische Hälften; durch alle drei wird dieselbe in *acht kongruente oder symmetrische Oktanten zerlegt.*


Fig. 529.


Fig. 530.

Es sei noch bemerkt, daß *der kleinste Durchmesser auch gleich Null* sein kann; dann schneidet eine Ebene, die durch den Mittelpunkt der

Fläche geht, diese in zwei sich schneidenden geraden Linien, d. h. die Fläche ist der Kegel zweiter Ordnung. — Der Fall, daß der Mittelpunkt ins Unendliche fällt, ist noch besonders zu betrachten.

152. Erzeugung der Flächen zweiter Ordnung als Rückungsflächen. Anknüpfend an die Existenz dreier Hauptschnitte, von denen jeder auf den beiden anderen senkrecht steht, kann *eine Fläche zweiter Ordnung dadurch als Rückungsfläche erzeugt werden, daß ein Kegelschnitt und dessen eine Achse als Leitlinien dienen, während ein anderer Kegelschnitt als Erzeugende sich so bewegt, daß seine Ebene beständig senkrecht zur Achse des ersten ist, daß sein Mittelpunkt auf dieser Achse und zwei Scheitelpunkte auf dem anderen Kegelschnitt gleiten, während seine Form sich zwar ständig ändert, die einzelnen Lagen aber alle ähnlich und ähnlich liegend sind.* — Je nach dem Typus der Leitkurve und der Erzeugenden erhält man *verschiedene Typen der Flächen zweiter Ordnung.* Es

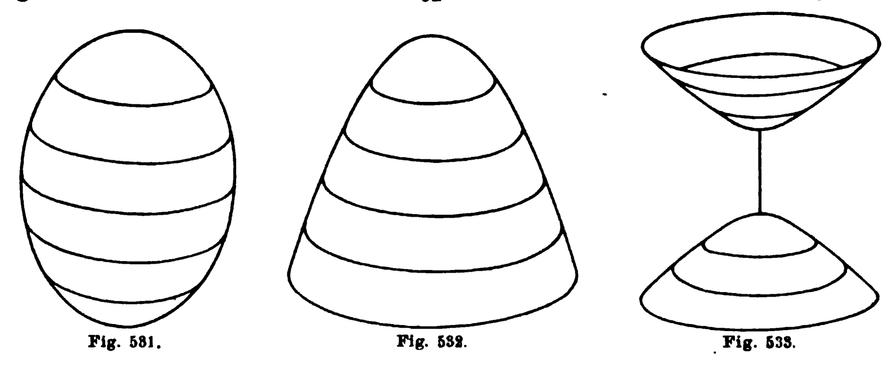


Fig. 531. Fig. 532. Fig. 533.

sei vorweg bemerkt, *daß durch Gleiten eines Kegelschnittes K_1 an einem anderen K_2 dieselbe Fläche entsteht, wie durch Gleiten von K_2 an K_1.*

I. Es sei zunächst *die Erzeugende eine Ellipse.*

Ist die Leitkurve

a) eine Ellipse, so entsteht das *Ellipsoid* (Fig. 531),

b) eine Parabel, so entsteht das *Paraboloid* (Fig. 532),

c) eine Hyperbel mit reeller Achse, so entsteht das *zweimantelige Hyperboloid* (Fig. 533),

d) eine Hyperbel mit imaginärer Achse, so entsteht das *einmantelige Hyperboloid* (Fig. 534). Zerfällt die Leitkurve

e) in zwei sich schneidende Geraden, so entsteht der *Kegel zweiter Ordnung* (Fig. 441). Zerfällt die Leitkurve

f) in zwei parallele Gerade, so entsteht der *elliptische Zylinder* (Fig. 440).

Der Kegel erscheint hierbei als Mittelglied oder Übergangstypus zwischen dem ein- und zweimanteligen Hyperboloid.

II. Es sei nunmehr *die Erzeugende eine Parabel*, die man sich hier zweckmäßig als eine Ellipse, wie sie im Falle I als Erzeugende benutzt wurde, vorstellt, — eine Ellipse, bei der ein Scheitel und der Mittelpunkt ins Unendliche fallen.

Daraus, daß der Mittelpunkt der Erzeugenden ins Unendliche fällt, folgt sofort, daß auch die Leitachse der Leitkurve ins Unendliche fallen muß. Auch ist zu beachten, daß hier *aus den ähnlichen Ellipsen unter I jetzt kongruente Parabeln werden*, weil der Ähnlichkeitspunkt der Mittelpunkt der Kurve ist, der bei der Parabel ins Unendliche fällt (Fig. 535).

a) Ist die Leitkurve eine Ellipse, so muß ihre Leitachse, wie eben gesagt, ins Unendliche fallen, d. h. die Leitkurve muß gleichfalls eine Parabel sein. Es entsteht das *Paraboloid* (Fig. 536). Man könnte

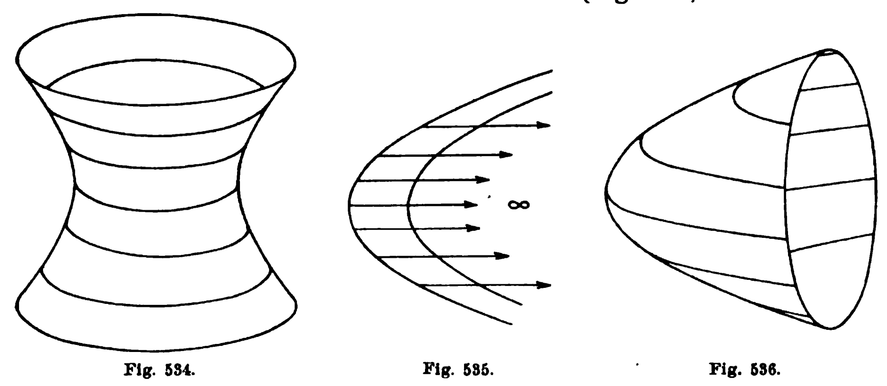


Fig. 534. Fig. 535. Fig. 536.

die unter I b) erzeugte Fläche *elliptisches Paraboloid*, und die unter II a) erzeugte Fläche *parabolisches Paraboloid* nennen. Beide Flächen sind aber *von demselben Typus*, was daraus hervorgeht, daß die Schnitte des parabolischen Paraboloids senkrecht zur Achse der Leitkurve wieder Ellipsen sind.

b) und c) Soll die Leitkurve eine Parabel oder eine Hyperbel mit reeller Achse sein, so läßt sich dadurch eine Fläche nicht erzeugen, weil die Achse der Parabel, bzw. die reelle Achse der Hyperbel nicht ins Unendliche fallen kann.

d) Ist die Leitkurve eine Hyperbel mit imaginärer Achse, so muß diese ins Unendliche fallen, die Hyperbel also zur Parabel werden. Während aber unter II a) die Achsen der leitenden und der erzeugenden Parabel nach derselben Seite gerichtet sind (Fig. 537), ist jetzt die

Achse der Erzeugenden entgegengesetzt der Achse der Leitparabel gerichtet (Fig. 538). Man erhält ein *Paraboloid, das aber keine elliptischen Schnitte besitzt,* also einen anderen Typus als das unter I b) und II a) erzeugte darstellt (Fig. 539). Man unterscheidet die beiden Typen als *elliptisches und hyperbolisches Paraboloid.*

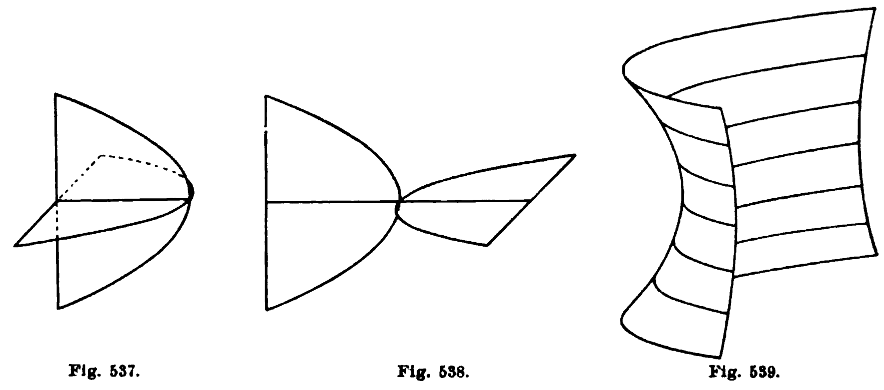


Fig. 537. Fig. 538. Fig. 539.

e) und f) Zerfällt die Leitkurve in zwei gerade Linien, so muß eine von diesen ins Unendliche fallen. Man erhält den *parabolischen Zylinder* (Fig. 442).

III. Ist endlich *die Erzeugende eine Hyperbel,* so erhält man keine neuen Typen der Flächen zweiter Ordnung.

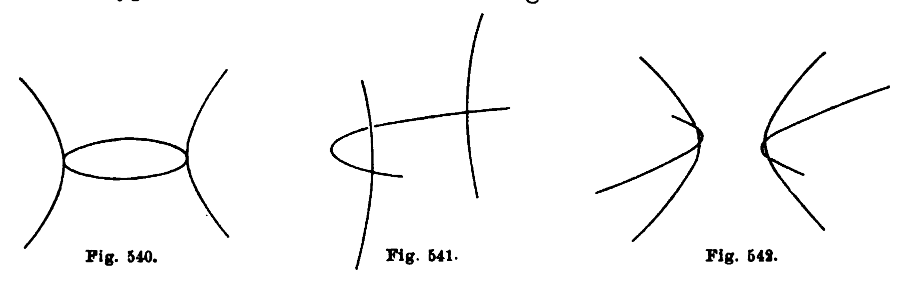


Fig. 540. Fig. 541. Fig. 542.

a) Ist die Leitkurve eine Ellipse, so erhält man das *einmantelige Hyperboloid* (Fig. 540),
b) eine Parabel, so erhält man das *hyperbolische Paraboloid* (Fig. 541),
c) eine Hyperbel mit reeller Achse, so entsteht das *zweimantelige Hyperboloid* (Fig. 542).
d) eine Hyperbel mit imaginärer Achse, so entsteht das *einmantelige Hyperboloid* (Fig. 543). Zerfällt die Leitkurve
e) in zwei sich schneidende Gerade, so wird der *Kegel zweiter Ordnung* erzeugt (Fig. 544).

f) Nur wenn die Leitkurve in zwei parallele Geraden zerfällt, ergibt sich ein neuer Typus des Zylinders, der *hyperbolische Zylinder* (Fig. 443).

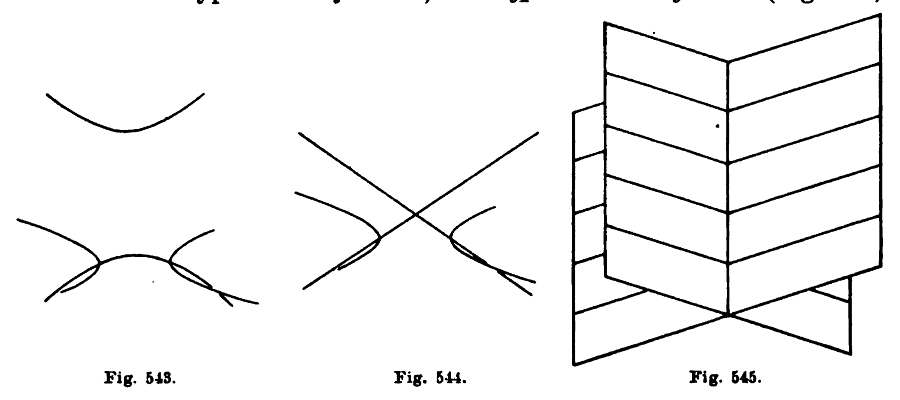


Fig. 543. Fig. 544. Fig. 545.

IV. *Zerfällt der erzeugende Kegelschnitt* endlich *in zwei gerade Linien*, so kann eine Fläche nur dann erzeugt werden, wenn die Leitkurve gleichfalls zerfällt. Die Fläche zweiter Ordnung zerfällt dann ebenfalls in zwei Flächen erster Ordnung, d. h. in *zwei Ebenen* (Fig. 545).

153. Zusammensetzung der Flächen zweiter Ordnung aus Punkten elliptischer, parabolischer und hyperbolischer Krümmung. Die einzelnen Typen der Flächen zweiter Ordnung erhält man auch dadurch, daß man dieselben zusammensetzt aus Punkten elliptischer, parabolischer und hyperbolischer Krümmung. Dabei ist es von vornherein klar, daß *auf einer und derselben Fläche nicht gleichzeitig elliptische und hyperbolische Punkte* existieren können, weil sonst eine Trennungslinie parabolischen Charakters vorhanden sein müßte, in deren Punkten die Tangentialebene von der Fläche in einer Kurve mit Rückkehrpunkt geschnitten werden würde. Eine Kurve zweiter Ordnung mit Rückkehrpunkt gibt es aber nicht. Es sind also nur *drei Gattungen von Flächen* möglich, nämlich I. *Flächen mit elliptischen Punkten*, II. *mit hyperbolischen* und III. *mit parabolischen Punkten.*

Innerhalb jeder dieser drei Gattungen *unterscheiden sich die einzelnen Typen noch durch ihr Verhalten im Unendlichen.* Die Fläche kann nämlich von der unendlich fernen Ebene a) nicht geschnitten, b) berührt und c) geschnitten werden.

I. Flächen zweiter Ordnung *elliptischer Krümmung.*

a) Schneidet die unendlich ferne Ebene nicht, so erhält man *das Ellipsoid,*

b) berührt sie, so erhält man das *elliptische Paraboloid*, und man erhält
c) das *zweimantelige Hyperboloid*, wenn die unendlich ferne Ebene die Fläche schneidet.

II. Flächen zweiter Ordnung *hyperbolischer Krümmung.*

a) Flächen, die nur Punkte hyperbolischer Krümmung besitzen, müssen unter allen Umständen auch unendlich ferne Punkte besitzen; daher gibt es keinen Typus der Flächen zweiter Ordnung hyperbolischer Krümmung, der von der unendlich fernen Ebene nicht geschnitten wird.
b) Berührt die unendlich ferne Ebene die Fläche, so erhält man das *hyperbolische Paraboloid*, und wenn
c) die unendlich ferne Ebene die Fläche schneidet, so ist sie ein *einmanteliges Hyperboloid.*

III. Flächen zweiter Ordnung *parabolischer Krümmung.*

Die einzige Fläche parabolischen Charakters ist der *Kegel zweiter Ordnung.* Diese geht dann in einen Zylinder über, wenn seine Spitze im Unendlichen liegt, und zwar ist es ein *elliptischer Zylinder*, wenn die unendlich ferne Ebene ihn nicht längs einer Mantellininie schneidet, ein *parabolischer Zylinder*, wenn die unendlich ferne Ebene ihn längs einer Mantellinie berührt, und endlich ein *hyperbolischer Zylinder*, wenn die unendlich ferne Ebene ihn in einer Mantellinie schneidet.

Bei der Unterscheidung der beiden Paraboloide durch den Zusatz elliptisches, bzw. hyperbolisches kommt demnach gleichzeitig die Krümmung der Fläche zum Ausdruck. Aus demselben Grunde wird *das zweimantelige Hyperboloid auch elliptisches, das einmantelige hyperbolisches Hyperboloid genannt.*

154. Das Ellipsoid. Da das Ellipsoid von der unendlich fernen Ebene weder berührt noch geschnitten wird, so besitzt es *nur elliptische Schnitte.* Alle Durchmesser und Achsen sind daher reell. Dasselbe gilt auch von den *drei elliptischen Hauptschnitten*, von denen je zwei eine Achse gemeinsam haben. Die Achsen unterscheidet man als *große, mittlere und kleine Achse* und bezeichnet ihre halben Längen mit a, b und c. Ihre sechs Endpunkte heißen *Scheitelpunkte.*

Ist die Erzeugende ein Kreis, so heißt die Fläche *Rotationsellipsoid.* Dasselbe kann auch durch Drehung einer Ellipse um eine ihrer Achsen erzeugt werden. Erfolgt die Rotation um die kleine Achse, so heißt die Fläche *abgeplattetes* —, erfolgt sie um die große Achse — *gestrecktes* Rotationsellipsoid. In einem Rotationsellipsoid sind zwei Achsen einander gleich;

ihre Lage dagegen innerhalb des kreisförmigen Hauptschnittes ist unbestimmt. Das gestreckte Rotationsellipsoid besitzt *zwei Brennpunkte*, die von sämtlichen Brennpunkten der Schnittellipsen, die durch die große Achse gehen, gebildet werden. Beim abgeplatteten Rotationsellipsoid beschreiben die Brennpunkte der rotierenden Ellipse einen *Brennkreis*. Im ersten Falle ist die Abstandssumme aller Flächenpunkte von den beiden Brennpunkten konstant. Beim abgeplatteten Rotationsellipsoid bestimmt der Brennkreis die Brennpunkte für alle durch den Mittelpunkt hindurchgehenden Schnittellipsen.

Das allgemeine Ellipsoid kann aus dem Rotationsellipsoid dadurch entstanden gedacht werden, daß alle Kreisordinaten bestimmter Richtung proportional verkürzt oder verlängert worden sind.

Wird nicht nur die Erzeugende, sondern auch die Leitkurve ein Kreis, so entsteht die *Kugel*. Bei dieser sind demnach alle Achsen einander gleich, ihrer Lage nach jedoch unbestimmt. Irgend drei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser können als Achsen angesehen werden Aus der Kugel geht das Rotationsellipsoid durch proportionale Verkürzung oder Verlängerung der vertikalen Ordinaten hervor. Da aus diesem, wie angegeben, das allgemeine Ellipsoid erzeugt werden kann, so *sind sämtliche Formen des Ellipsoids durch sukzessiven Übergang aus der Kugel zu erzeugen.*

Das allgemeine Ellipsoid kann auch direkt durch Bewegung eines Kreises erzeugt werden. Es existieren nämlich bei jedem Ellipsoid *zwei Systeme paralleler Kreisschnitte.* Zu diesen gelangt man durch folgende Überlegung: Dreht man eine beliebige durch die mittlere Achse gehende Schnittebene um diese, so bleibt sie aus Symmetriegründen für alle herausgeschnittenen Ellipsen Achse. Die anderen Achsen derselben sind bald größer, bald kleiner als die mittlere Achse, je nachdem die Schnittebene in der Nähe der großen oder der kleinen Achse verläuft. Es muß also eine Lage der Schnittebene geben, für welche die zweite Achse gleich der mittleren des Ellipsoids ist. Die Schnittkurve ist dann ein Kreis, und da alle Parallelschnitte ähnlich sind, sind dieselben alle Kreise, deren Mittelpunkte auf dem konjugierten Durchmesser liegen. Aus Symmetriegründen gibt es zwei Kreisschnitte durch den Mittelpunkt, die symmetrisch zu den Hauptschnitten liegen und sich in der mittleren Achse schneiden. Zu jedem System paralleler Kreisschnitte gibt es einen konjugierten Durchmesser; die vier Endpunkte derselben bestimmen auf dem durch a und c gehenden Hauptschnitt vier Punkte, die *Nabelpunkte* heißen. In ihnen hat die Berührungsebene mit dem Ellipsoid einen unendlich kleinen Kreis gemeinsam, sie heißen daher

auch *Kreispunkte.* In allen übrigen Flächenpunkten hat die Tangentialebene mit der Fläche eine unendlich kleine Ellipse gemein. Die *Konstruktion der Kreisschnitte* ist dadurch gegeben, daß der Durchmesser des größten Kreises gleich der mittleren Achse des Ellipsoids ist. Schlägt man also um den Mittelpunkt des durch a und c gehenden Hauptschnittes einen Kreis mit b, so ist durch die vier Schnittpunkte die Lage der durch den Mittelpunkt gehenden beiden Kreisschnitte bestimmt (Fig. 546).

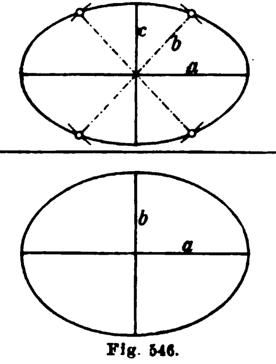


Fig. 546.

Bei einem Rotationsellipsoid fallen beide Systeme der Kreisschnitte zusammen, damit auch die beiden zu ihnen konjugierten Durchmesser, so daß auch je zwei Nabelpunkte in die Endpunkte der Rotationsachse zusammenfallen. — Bei der Kugel ist die Lage der parallelen Kreisschnitte unbestimmt geworden, jeder Schnitt ist ein Kreis, jeder Flächenpunkt ein Nabelpunkt.

Infolge der Existenz paralleler Kreisschnitte *kann jedes allgemeine Ellipsoid auch unter Benutzung eines Kreises als Erzeugende entstanden gedacht werden.* Der Mittelpunkt desselben bewegt sich dabei auf demjenigen Durchmesser der Leitellipse, der zur Richtung der parallelen Kreisebenen konjugiert ist.

155. Das elliptische Paraboloid. Beim elliptischen Paraboloid fällt *ein Scheitelpunkt, aber auch nur dieser, ins Unendliche,* da die unendlich ferne Ebene die Fläche berührt, und da, wenn man die Fläche um die Achse, deren Endpunkt im Unendlichen liegt, dreht, keine Schnittpunkte der Fläche mit der unendlich fernen Ebene auftreten dürfen. Da der Mittelpunkt der Pol der unendlich fernen Ebene, diese aber Tangentialebene ist, so fällt auch *der Mittelpunkt der Fläche ins Unendliche.* Das elliptische Paraboloid hat daher im Endlichen nur *eine Achse, einen Scheitelpunkt* und *zwei parabolische Hauptschnitte. Alle Durchmesser sind parallel der Achse.* Alle Beziehungen zwischen konjugierten Durchmessern und Diametralebenen bleiben im übrigen bestehen.

Jeder Schnitt parallel der Achse schneidet die Fläche in einer Parabel, jeder andere, da er keinen unendlich fernen Punkt hat, *in einer Ellipse.* Hyperbolische Schnitte sind nicht möglich, da sonst die Schnittkurve von der unendlich fernen Ebene geschnitten werden müßte. Alle parallelen Ellipsenschnitte sind wieder ähnlich, *jede Schar paralleler Parabelschnitte enthält,* wie schon in § 152 erwähnt, *kongruente Parabeln.*

Werden die beiden parabolischen Hauptschnitte kongruent, so heißt

die Fläche *Rotationsparaboloid.* Dasselbe kann auch durch Rotation einer Parabel um ihre Achse erzeugt werden. Es besitzt, ähnlich wie das gestreckte Rotationsellipsoid, einen *Brennpunkt,* außerdem eine *Direktrixebene,* die dadurch entstanden gedacht werden kann, daß man die Direktrix der Parabel mit dieser gleichzeitig rotieren läßt. Das Rotationsparaboloid erscheint dann als *geometrischer Ort für alle Punkte, die vom Brennpunkt und der Direktrixebene gleichen Abstand haben.* Denkt man sich das Innere der Fläche spiegelnd, so werden alle Brennstrahlen infolge der gleichen Eigenschaft der rotierenden Parabel parallel der Achse reflektiert. Hierauf beruht die Wirkung von parabolischen Brennspiegeln, parabolischen Reflektoren, Hörrohren usw.

Aus dem Rotationsparaboloid entsteht das allgemeine Paraboloid durch proportionale Verkürzung oder Verlängerung der vertikalen Kreisordinaten.

Die *beiden Systeme paralleler Kreisschnitte,* die beim Ellipsoid vorhanden sind, existieren auch beim Paraboloid. Sie sind parallel den großen Achsen der elliptischen Normalschnitte. Ein beliebiger Kreisschnitt hat als Durchmesser die große Achse derjenigen Ellipse, durch deren Mittelpunkt er hindurchgeht. Er ist also in ähnlicher Weise wie beim Ellipsoid zu konstruieren. Da *zwei Nabelpunkte* ins Unendliche fallen, liegen im Endlichen nur zwei, und zwar in demjenigen Hauptschnitt, der durch die kleine Achse eines elliptischen Normalschnittes hindurchgeht.

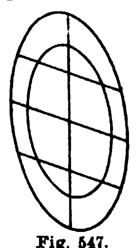
Das allgemeine elliptische Paraboloid kann daher in ähnlicher Weise wie das Ellipsoid *durch einen Kreis erzeugt werden.*

156. Das elliptische Hyperboloid. Das elliptische Hyperboloid hat einen imaginären Hauptschnitt und *zwei reelle hyperbolische Hauptschnitte,* zwei imaginäre und *eine reelle Achse,* an deren Enden die Fläche *zwei Scheitel* besitzt.

Da die Fläche von der unendlich fernen Ebene geschnitten wird, so liegt deren Pol, d. h. der *Mittelpunkt der Fläche, außerhalb derselben.* Es ist also möglich, von dem Mittelpunkte aus einen Berührungskegel an die Fläche zu legen. Die Ebene der Berührungskurve muß wieder die Polarebene des Mittelpunktes sein; daher liegt dieselbe in der unendlich fernen Ebene; die Fläche besitzt also einen *asymptotischen Kegel, dessen Spitze im Mittelpunkte liegt.* Jede Ebene durch den Mittelpunkt schneidet die Fläche und den asymptotischen Kegel in einer Hyperbel und ihren Asymptoten. Zieht man innerhalb einer solchen Ebene eine beliebige Sekante, so sind nach einem auf S. 185 bewiesenen Satze die beiden Stücke derselben, die zwischen der Hyperbel und den Asymptoten liegen, ein-

ander gleich. Faßt man die Sekante als Schnittlinie der Fläche auf, so gilt daher der Satz: *die beiden Stücke einer beliebigen Sekante eines elliptischen Hyperboloids, die zwischen der Fläche und ihrem asymptotischen Kegel liegen, sind einander gleich.*

Legt man durch die Fläche und ihren asymptotischen Kegel einen ganz beliebigen ebenen Schnitt, so entstehen zwei Schnittkurven. Nach dem soeben angegebenen Satze sind die Stücke je einer von mehreren parallelen in der Schnittebene liegenden Sekanten, die zwischen den Kurven liegen, einander gleich (Fig. 547). Daher sind die konjugierten Durchmesser dieser Sekanten für beide Kurven identisch. Die Kurven sind also ähnlich und ähnlich liegend. Man hat somit den Satz: *das elliptische Hyperboloid und sein asymptotischer Kegel werden von einer Ebene in zwei ähnlichen und ähnlich liegenden Kurven geschnitten.*


Fig. 547.

Nach diesem Satze sind auch die Typen der beiden Kurven stets dieselben, da aber jeder Kegel Ellipsen-, Hyperbel- und Parabelschnitte hat, so sind auch bei der Fläche *alle drei Typen der Kegelschnitte als Schnittkurven möglich.* Dabei ist es nicht schwer, *für jede Schnittebene sofort den Typus der Schnittkurve anzugeben*; man hat nur durch den Mittelpunkt der Fläche eine Ebene parallel zu der Schnittebene zu legen; schneidet diese Parallelebene den asymptotischen Kegel nicht, außer in seiner Spitze, so ist die Schnittkurve der Fläche eine Ellipse; berührt sie den Kegel längs einer Mantellinie, so ist die Kurve eine Parabel; schneidet sie den Kegel, so ist die Kurve eine Hyperbel.

Werden die beiden reellen hyperbolischen Hauptschnitte kongruent, so heißt die Fläche *elliptisches Rotationshyperboloid.* Dasselbe kann auch durch Drehung einer Hyperbel um ihre reelle Achse erzeugt werden. Rotieren dabei die Asymptoten auch mit, so beschreiben diese den asymptotischen Kegel. — Das Rotationsellipsoid besitzt *zwei Brennpunkte* auf der Rotationsachse; *die Differenz ihrer Abstände von einem beliebigen Flächenpunkte ist konstant.* Das allgemeine elliptische Hyperboloid kann durch proportionale Verkürzung oder Verlängerung aller Kreisordinaten in bestimmter Richtung aus dem Rotationshyperboloid erzeugt werden.

Ähnlich wie das elliptische Paraboloid, besitzt auch das Hyperboloid *zwei Systeme paralleler Kreisschnitte,* die parallel mit der großen Achse der elliptischen Normalschnitte, symmetrisch zu den beiden reellen Hauptschnitten liegen. Es existieren daher auf der Fläche auch *vier Nabelpunkte,* die in derjenigen Hauptebene liegen, die durch die kleine Achse eines elliptischen Normalschnittes geht.

Auch *das allgemeine elliptische Hyperboloid kann* daher *durch Benutzung eines Kreises als Erzeugende gewonnen werden.*

157. Kegel und Zylinder zweiter Ordnung. Die Eigenschaften des Kegels und Zylinders sind bereits besprochen. Beide können als *Degeneration eines Hyperboloids* aufgefaßt werden. Auch *zwei Systeme paralleler Kreisschnitte* sind vorhanden. *Jede Kegelfläche zweiter Ordnung,* gleichgültig, ob als Leitkurve eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel benutzt wurde, *kann* daher *als schiefer Kreiskegel aufgefaßt und durch Benutzung eines Kreises als Erzeugende gewonnen werden.*

Dasselbe gilt auch vom *elliptischen Zylinder.* Dagegen besitzt der *parabolische und* der *hyperbolische Zylinder* nur *parabolische,* bzw. hyperbolische Schnitte.

158. Das hyperbolische Hyperboloid. Bei dem hyperbolischen Hyperboloid sind alle *drei Hauptschnitte reell,* und zwar *zwei von ihnen hyperbolisch, einer elliptisch*; der letzte heißt auch die *Kehlellipse. Zwei Achsen sind reell,* eine ist imaginär; daher besitzt die Fläche *vier Scheitelpunkte.*

Da auch diese Fläche von der unendlich fernen Ebene geschnitten wird, so muß ihr *Mittelpunkt außerhalb* liegen und Spitze eines *asymptotischen Kegels* sein. Während aber beim elliptischen Hyperboloid die Fläche innerhalb des Kegels lag, liegt das hyperbolische Hyperboloid ganz außerhalb desselben. Umgekehrt dagegen liegt der Kegel bei beiden Hyperboloiden außerhalb der Fläche (Fig. 548).

Fig. 548.

Auch hier gilt der Satz: *Die beiden Stücke einer beliebigen Sekante, die zwischen der Fläche und dem asymptotischen Kegel liegen, sind gleich. Fläche und asymptotischer Kegel werden* auch beim hyperbolischen Hyperboloid *in ähnlichen und ähnlich liegenden Kurven geschnitten.* Daher gibt es auch hier *Ellipsen-, Parabel- und Hyperbelschnitte,* je nachdem eine durch den Mittelpunkt zur Schnittebene gelegte Parallelebene den Kegel außer der Spitze nicht mehr schneidet, diesen längs einer Mantellinie berührt oder ihn schneidet. Zu den Hyperbelschnitten gehören auch *zwei sich schneidende gerade Linien,* wie später gezeigt werden wird.

Werden die beiden hyperbolischen Hauptschnitte kongruent, so werden die Kehlellipse und alle Parallelschnitte zu ihr Kreise; die Fläche heißt dann *hyperbolisches Rotationshyperboloid.* Dasselbe kann auch

durch Drehung einer Hyperbel um ihre imaginäre Achse erzeugt werden, deren Asymptoten dabei den asymptotischen Kegel beschreiben, während ihre Brennpunkte den *Brennkreis* der Fläche bilden. Das allgemeine hyperbolische Hyperboloid kann aus der Rotationsfläche durch proportionale Verkürzung oder Verlängerung aller Kreisordinaten in bestimmter Richtung gewonnen werden.

Wiederum existieren *zwei Systeme paralleler Kreisschnitte,* die identisch mit den Kreisschnitten des asymptotischen Kegels sind. *Nabelpunkte* dagegen *gibt es nicht,* da keine Tangentialebene parallel mit den Kreisschnitten gelegt werden kann. Der konjugierte Durchmesser zu jedem elliptischen Schnitt ist nämlich imaginär und schneidet daher die Fläche in keinem reellen Punkte.

Zu jedem Kegel gibt es eine Schar elliptischer und eine Schar hyperbolischer Hyperboloide, für welche dieser Kegel asymptotischer Kegel ist. Alle Flächen werden von einer Ebene in ähnlichen und ähnlich liegenden Kurven geschnitten. Die beiden Systeme paralleler Kreisschnitte sind für alle Flächen parallel.

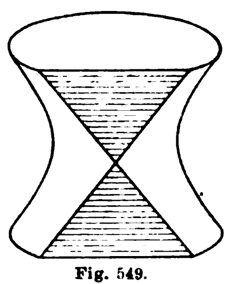


Fig. 549.

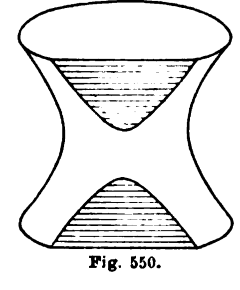


Fig. 550.

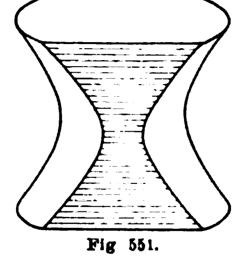


Fig 551.

Da das hyperbolische Hyperboloid nur Punkte hyperbolischer Krümmung hat, so muß jede Tangentialebene der Fläche diese in einer Kurve mit Doppelpunkt schneiden, die sich beim parallelen Verrücken der Tangentialebene nach zwei Seiten hin hyperbelartig öffnet. Das ist aber nur möglich, wenn *die von der Tangentialebene aus der Fläche herausgeschnittene Kurve zweiter Ordnung in zwei sich im Berührungspunkte schneidende Geraden zerfällt* (Fig. 549). Verrückt man die Tangentialebene ein wenig parallel mit sich selbst, so öffnen sich zwei Scheitelwinkel der Geraden zu einer Hyperbel (Fig. 550); verrückt man die Tangentialebene nach der anderen Seite ein wenig, so öffnen sich die beiden anderen von den Geraden gebildeten Scheitelwinkel zu einer Hyperbel (Fig. 551).

Die beiden von einer Tangentialebene aus einer Fläche geschnittenen Geraden sind identisch mit den beiden Haupttangenten des Berührungspunktes. Der Krümmungsradius für einen Schnitt, der durch eine dieser

Geraden und die Normale im Berührungspunkte geht, ist also unendlich groß.

Da in jedem Punkte der Fläche durch die Tangentialebene zwei gerade Linien, die ganz auf der Fläche liegen, bestimmt werden, so gibt es auf der Fläche *zwei Scharen gerader Linien, die in ihrer Gesamtheit die Fläche bilden und Mantellinien heißen.* Um eine Vorstellung vom *gegenseitigen Verhalten dieser beiden Scharen von Mantellinien* zu erlangen, denke man sich zunächst ein Rotationshyperboloid. Für dieses kann jede Kurve seiner Oberfläche nachträglich als Erzeugende eingesetzt werden. Wählt man also als Erzeugende eine der durch einen Punkt A gehenden beiden Geraden m, so bildet diese in den verschiedenen Lagen, die sie bei der Rotation einnimmt, die eine Schar der Mantellinien. Die andere Schar wird durch die andere durch A gehende Gerade n durch Rotation gebildet. Jede Gerade m ist zu jeder anderen Geraden m windschief; dagegen schneidet jede Gerade m jede Gerade n (Fig. 552). Läßt man nunmehr das Rotationshyperboloid durch proportionale Verkürzung der Kreisordinaten in einer bestimmten Richtung in das allgemeine übergehen, so wird dabei aus jeder Geraden wieder eine Gerade, und in dem gegenseitigen Verhalten der beiden Scharen von Mantellinien ändert sich nichts. Umgekehrt ist jede Ebene, die durch eine Gerade m und eine Gerade n geht, Tangentialebene, deren Berührungspunkt im Schnittpunkt von m und n liegt. Legt man eine beliebige Ebene durch eine Gerade m, so muß sie die Fläche in einer Geraden n schneiden; denn wenn ein Teil einer Kurve zweiter Ordnung geradlinig ist, so zerfällt dieselbe in zwei gerade Linien; der Restteil der Kurve muß also gleichfalls geradlinig sein. Daher ist *jede Ebene, die durch eine Gerade m geht, eine Tangentialebene.* Dreht man eine solche um eine Gerade m, so rückt der Berührungspunkt auf dieser fort, und eine Gerade n nach der anderen fällt in die Tangentialebene hinein.

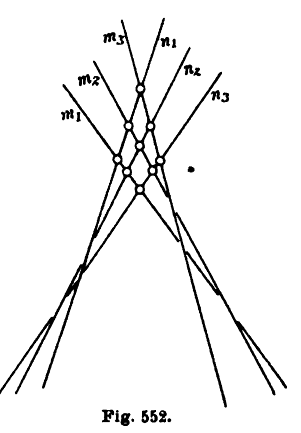


Fig. 552.

Legt man von einem beliebigen Punkte aus einen Berührungskegel an das Hyperboloid, so berührt jede Tangentialebene des Kegels auch die Fläche. Es gehen also durch den Berührungspunkt drei gerade Linien (Fig. 553). Liegt daher der Berührungspunkt im Unendlichen, und ist der Berührungskegel der asymptotische Kegel, so werden diese drei Geraden parallel. Daraus folgt, daß *zu jeder Geraden m eine par-*

allele Gerade n und eine parallele Mantellinie des asymptotischen Kegels existiert (Fig. 554). Oder: *Die durch den Mittelpunkt der Fläche gehenden Geraden, die parallel zu den Geraden m und n gehen, bilden den asymptotischen Kegel.* Oder: *Die Ebenen, die durch je zwei parallele Mantellinien gehen, bzw. durch eine Mantellinie und den Mittelpunkt, umhüllen den asymptotischen Kegel.* Jede Ebene, die einer solchen Ebene parallel

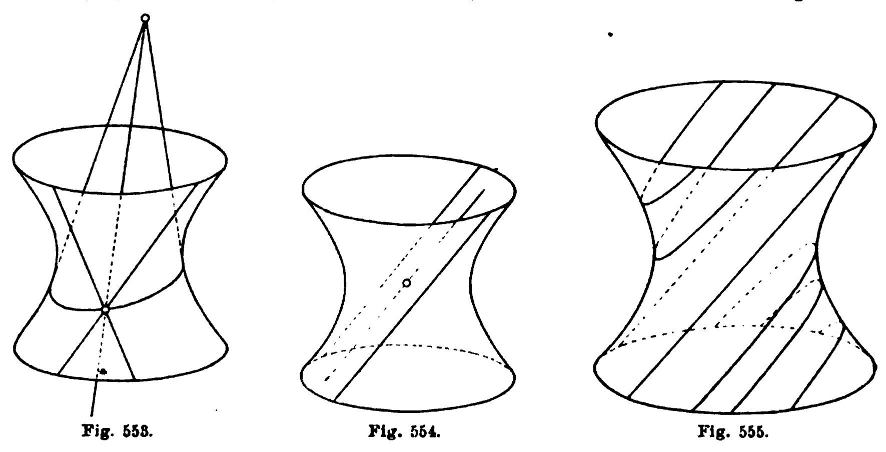


Fig. 553. Fig. 554. Fig. 555.

ist, schneidet die Fläche in einer Parabel; daher sind auch je zwei parallele Mantellinien als Parabel aufzufassen, welche die unendlich ferne Gerade von beiden Seiten mit beiden Scheiteln berührt (Fig. 555).

Das hyperbolische Hyperboloid gehört nach dem Gesagten auch *zu der Familie der windschiefen Regelflächen.* Die für die Technik äußerst wichtigen Eigenschaften desselben sollen erst im Zusammenhang mit dieser — im XXI. Kapitel — besprochen werden. Dasselbe gilt auch für das nachfolgende hyperbolische Paraboloid.

159. Das hyperbolische Paraboloid. Läßt man die Kehlellipse des hyperbolischen Hyperboloids durch Hinausrücken eines ihrer Scheitel ins Unendliche zur Parabel werden, so entsteht aus dem Hyperboloid das Paraboloid (Fig. 556). Dabei fällt sowohl die Ellipsen-, als auch die Hyperbeltangente des Punktes A' ins Unendliche und damit die ganze Tangentialebene dieses Punktes, also auch die beiden Mantellinien m und n, die durch ihn hindurchgehen. Die unendlich ferne Ebene schneidet somit das hyperbolische Paraboloid in zwei geraden Linien, während sie das Hyperboloid in einer Kurve schneidet.

Da auch der Mittelpunkt der Kehlellipse ins Unendliche fällt, so liegen der Mittelpunkt und zwei Achsen des Paraboloids im Unendlichen.

Die Fläche besitzt also im Endlichen nur *eine Achse mit einem Scheitelpunkt* und *zwei parabolische Hauptschnitte.*

Alle Durchmesser sind parallel der Achse. Unter Berücksichtigung dieser Lage der Durchmesser bleiben im übrigen die Eigenschaften der konjugierten Durchmesser und Ebenen bestehen.

Das hyperbolische Paraboloid hat keine elliptischen, daher auch keine Kreis-Schnitte. Im allgemeinen sind die *ebenen Schnitte der Fläche Hyperbeln; nur wenn die Schnittebene parallel der Achse ist, schneidet sie die Fläche in einer Parabel.* Aus den ähnlichen Hyperbeln paralleler Schnitte werden kongruente Parabeln.

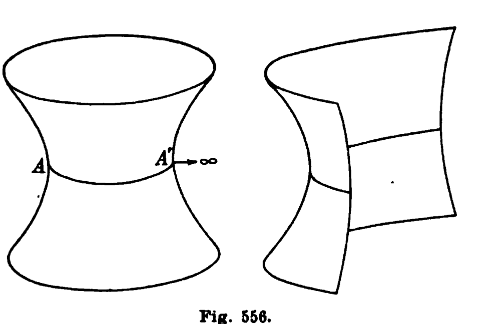


Fig. 556.

Fig. 557.

Eine rotatorische Form existiert nicht; ähnlich jedoch, wie die gleichseitige Hyperbel ein Analogon zur rotatorischen Form der Ellipse — zum Kreise — bildet, so ist *das gleichseitige Paraboloid,* in dem die beiden parabolischen Hauptschnitte kongruent sind, ein Analogon zum Rotationsellipsoid.

Die *beiden Scharen von Mantellinien,* die auf dem Hyperboloid existieren, sind auch auf dem Paraboloid vorhanden. *Eine Gerade von jeder Schar liegt jedoch im Unendlichen.* Da jede Gerade n, die im Unendlichen liegende Gerade m_∞ schneidet, so sind alle durch m_∞ und durch die einzelnen n gelegten Ebenen parallel. *Alle Geraden n sind daher einer Richtungsebene parallel. Ebenso sind auch alle Geraden m einer Richtungsebene parallel.* Da m_∞ durch den unendlich fernen Punkt der Achse geht, so sind *die beiden Richtungsebenen parallel der Achse.* Projiziert man daher die Fläche orthogonal auf eine Ebene senkrecht zur Achse, so sind die Projektionen aller Geraden m und ebenso diejenigen der Geraden n unter sich parallel (Fig. 584). Zwei Richtungsebenen können durch zwei beliebige Mantellinien, die durch einen Punkt gehen, bestimmt werden, z. B. durch die beiden Mantellinien des Scheitelpunktes (Fig. 557). *Die*

Richtungsebenen sind außerdem *parallel den Asymptoten eines senkrecht zur Achse geführten Hyperbelschnittes.*

Da jeder Schnitt durch die Achse die Fläche in einer Parabel schneidet, so muß auch jede Mantellinie als Parabel aufgefaßt werden; zu jeder dieser Parabeln gehört noch eine unendlich ferne Gerade. Von den beiden parallelen Mantellinien des Hyperboloids ist eine ins Unendliche gefallen.

160. Die konstruktive Behandlung der Rückungsflächen zweiter Ordnung. *Die konstruktive Behandlung der Rückungsflächen zweiter Ordnung schließt sich eng an diejenige der Rotationsflächen an, nur treten statt der Parallelkreise hier überall Kegelschnitte auf, die unter sich ähnlich, oder, wenn es Parabeln sind, kongruent sind. Die Konstruktionen bleiben im übrigen dieselben.*

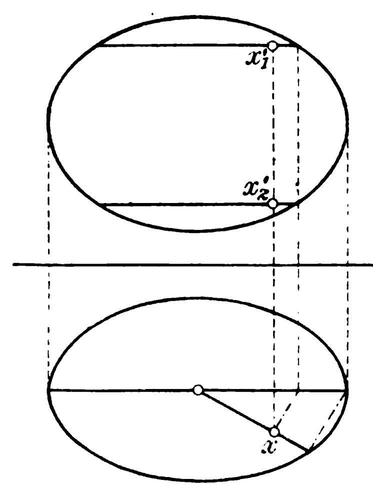


Fig. 558.

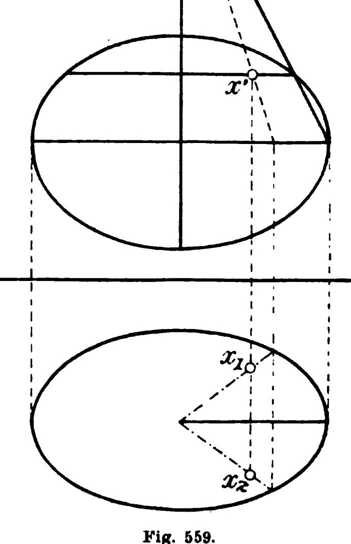


Fig. 559.

Wenn irgendmöglich vermeidet man es jedoch, diese horizontalen Kegelschnitte zu zeichnen, und ist bestrebt, *die Konstruktion so zu gestalten, daß nur der schon gezeichnete Umriß dabei benutzt wird.* Ist z. B. die Horizontalprojektion eines Punktes auf einem Ellipsoid gegeben und die zugehörige Vertikalprojektion gesucht, so kann man unter Benutzung *des Ähnlichkeitspunktes* das Zeichnen der durch den gegebenen Punkt gehenden horizontalen Ellipse auf folgende Weise umgehen: Man verbinde den Mittelpunkt der Ellipse mit dem gegebenen Punkt und ver-

längere diese Linie bis zur Umfangsellipse (Fig. 558); diesen Punkt verbinde man mit dem Endpunkt der großen Achse der Umfangsellipse und ziehe durch den gegebenen Punkt eine Parallele zu dieser Verbindungslinie. Diese bestimmt auf der großen Achse den Scheitelpunkt der durch den gegebenen Punkt gehenden horizontalen Ellipse. Lotet man diesen hinauf auf den vertikalen Umriß des Ellipsoids, so erhält man damit die sich als gerade Linie projizierende horizontale Ellipse, die durch den gegebenen Punkt geht; auf sie ist dessen Horizontalprojektion dann noch hinaufzuloten.

Ist umgekehrt die Vertikalprojektion eines Punktes gegeben und die Horizontalprojektion gesucht, so kann man *einen räumlichen Ähnlichkeits-*

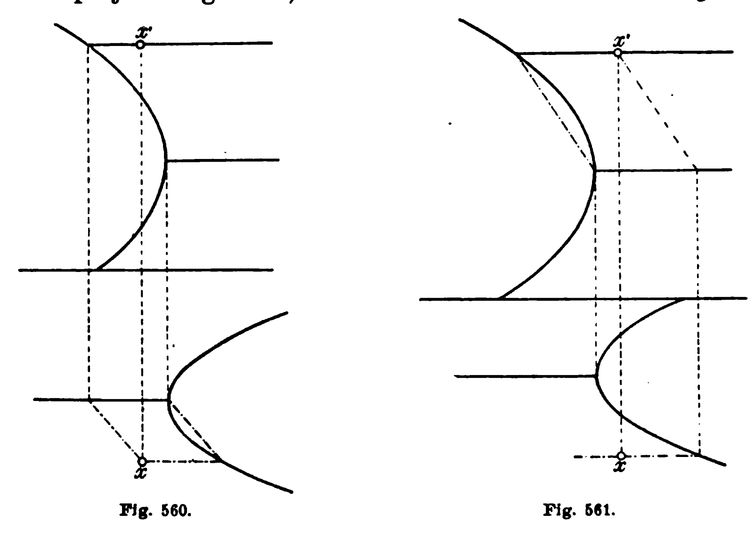


Fig. 560. Fig. 561.

punkt benutzen (Fig. 559). Zu diesem Zwecke verbindet man in der Vertikalprojektion die Endpunkte der großen Achsen der horizontalen Umrißellipse und derjenigen Ellipse, die durch den gegebenen Punkt geht; beide Ellipsen stellen sich als horizontale gerade Linien dar. Die Verlängerung dieser Verbindungslinie bestimmt auf der Achse des Ellipsoids den räumlichen Ähnlichkeitspunkt der beiden Ellipsen; von ihm ziehe man durch den gegebenen Punkt eine Linie bis zu der geradlinigen Vertikalprojektion der horizontalen Umfangsellipse, lote diesen Schnittpunkt hinunter in die Horizontalebene und verbinde ihn dort mit dem Mittelpunkt der Ellipse. Auf diese Verbindungslinie hat man dann die gebene Vertikalprojektion des Punktes noch herunterzuloten.

Ist die Erzeugende eine Parabel und daher in allen Lagen sich selbst kongruent, so können dieselben beiden Aufgaben durch Parallelverrückung

der durch den gegebenen Punkt gehenden Parabel in den Hauptschnitt hinein gelöst werden (Fig. 560 und 561).

Um in einem gegebenen Punkte die *Tangentialebene* zu bestimmen, benutzt man wie bei den Rotationsflächen einen Hilfskegel, der die Fläche in der durch den gegebenen Punkt gehenden Erzeugenden berührt. Durch die Horizontalspur der Mantellinie, die durch den gegebenen Punkt geht, muß die Horizontalspur der Tangentialebene gehen; sie muß aber außerdem parallel sein zu der Tangente an dem horizontalen Hauptschnitt in dessen Schnittpunkt mit der Kegelmantellinie. Gleich-

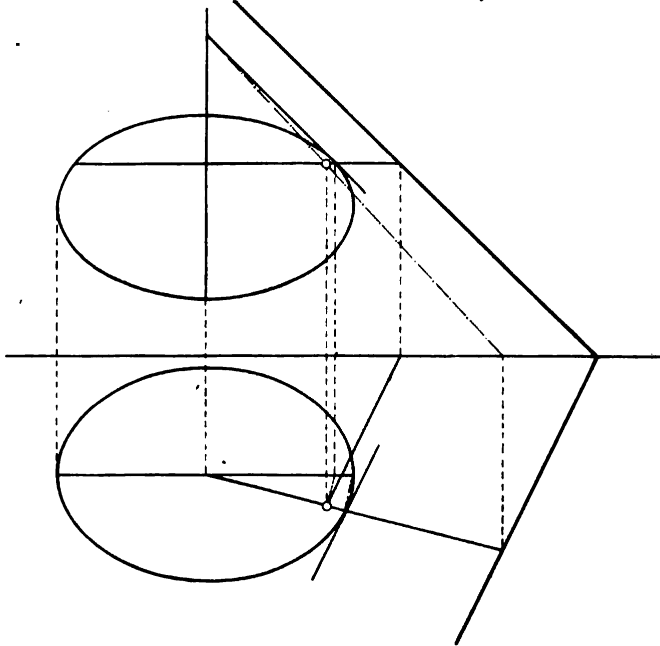


Fig. 562.

falls parallel zu dieser Tangente ist die Tangente im gegebenen Punkte an die Erzeugende, die durch ihn geht. Die Vertikalspur dieser Tangente bestimmt die Vertikalspur der Tangentialebene (Fig. 562).

Ist die Erzeugende eine sich kongruent bleibende Parabel, so benutzt man statt des Kegels einen Zylinder; im übrigen bleibt die Konstruktion dieselbe (Fig. 563).

Um endlich einen *Berührungskegel von einem Punkte A aus an eine Fläche zweiter Ordnung* zu legen, verfährt man wiederum genau so wie bei Rotationsflächen. Man denke sich zur Bestimmung zweier Punkte der Berührungskurve einen beliebigen Hilfskegel, der die Fläche längs einer

Erzeugenden berührt, und der durch eine zunächst beliebige horizontale Ebene begrenzt wird. Bestimmt man den Schnittpunkt der Verbindungslinie der Spitze des Kegels mit dem Punkte A und dieser Ebene und legt von diesem Schnittpunkte aus die beiden Tangenten an die Grundkurve des Hilfskegels, so bestimmen die beiden Berührungspunkte zwei Mantellinien und diese wiederum auf der Erzeugenden, in welcher der Hilfskegel die Fläche berührt, zwei Punkte der gesuchten Berührungskurve. Bei dieser Konstruktion kann das Zeichnen der Grundkurve des Hilfskegels dadurch umgangen werden, daß man den Hilfskegel so abschneidet, daß seine Grundkurve identisch mit dem horizontalen Umriß der Fläche wird (Fig. 564).

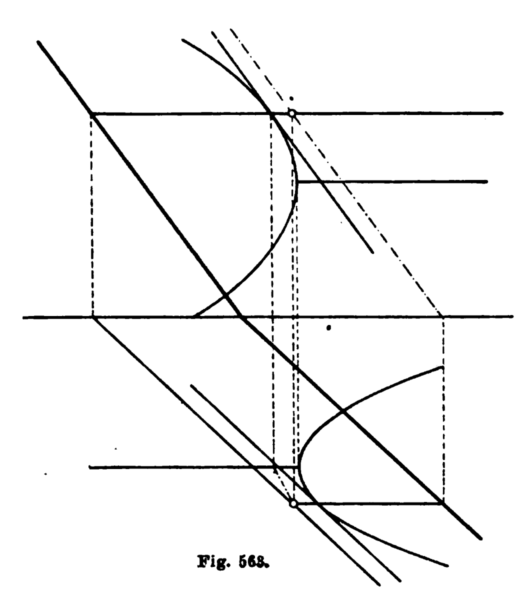


Fig. 563.

Wenn die Erzeugende eine sich stets kongruent bleibende Parabel ist, so tritt an Stelle jedes Hilfskegels ein Hilfszylinder (Fig. 565).

Liegt der Punkt A im Unendlichen, so wird aus dem Berührungskegel ein *Berührungszylinder* und an Stelle der Verbindungslinie des Punktes A mit der Spitze eines Hilfskegels tritt eine Parallele durch

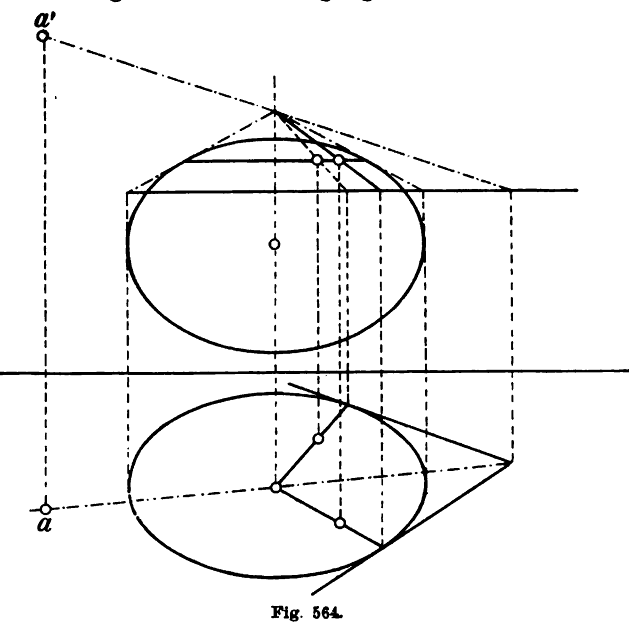


Fig. 564.

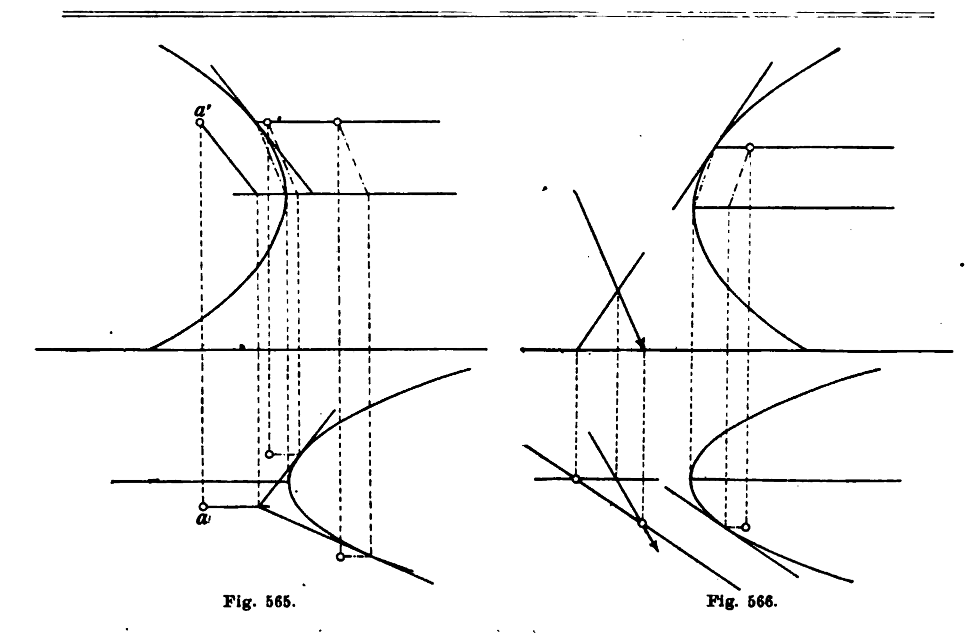


Fig. 565. Fig. 566.

diese zu der Richtungslinie des Zylinders. Ist die Erzeugende eine Parabel, so muß die Richtung der Tangente an die betreffende horizontale Parabel, in welcher ein Hilfszylinder die Fläche berührt, in einer Nebenfigur bestimmt werden (Fig. 566).

XIX. Kapitel.

Topographische Flächen.

161. Niveaulinien. Während die bisherigen Rückungsflächen von einer Erzeugenden beschrieben wurden, die sich selbst ähnlich oder kongruent blieb, kann das Gesetz, nach welchem sich die Erzeugende, sowohl hinsichtlich ihrer Lage, als auch hinsichtlich ihrer Gestalt ändert, ein wesentlich komplizierteres werden. Die Fläche ist dann, wenigstens annäherungsweise, bestimmt, wenn eine Anzahl einzelner Lagen der Erzeugenden gegeben ist. Ein Beispiel solcher *Rückungsflächen allgemeinster Art* sind die topographischen Flächen.

Denkt man sich im Gelände alle Punkte von bestimmter Höhe über dem Meeresspiegel miteinander verbunden, so entsteht dadurch eine horizontale Kurve, die *Niveaukurve* heißt. Denkt man sich eine Anzahl solcher Niveaukurven in gleichem Höhenabstande etwa im Abstande von

1 m, im Gelände bestimmt, so ist umgekehrt durch die Gestalt und die Lage dieser Niveaukurven eine Fläche bestimmt, die, abgesehen von kleineren Unregelmäßigkeiten, mit der Geländefläche übereinstimmt und einer geometrischen Behandlung zugänglich ist. Eine solche durch eine Anzahl von Niveaukurven gegebene Fläche heißt *topographische Fläche.* Die Niveaukurven können dabei als einzelne Lagen der Erzeugenden aufgefaßt werden (Fig. 567).

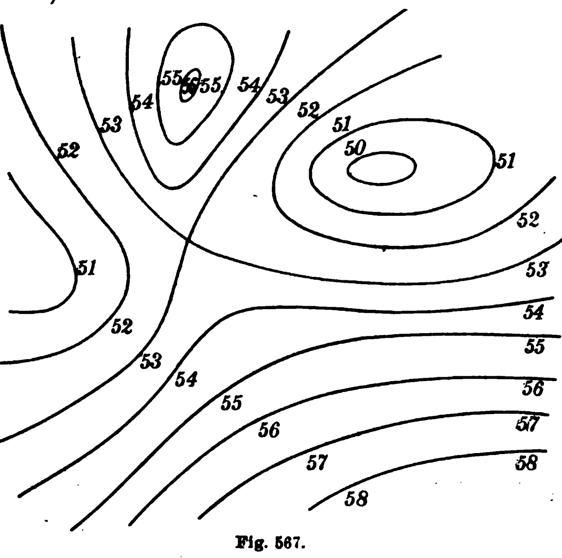


Fig. 567.

Auf einer topographischen Fläche gibt es drei Arten ausgezeichneter Punkte, nämlich *Gipfelpunkte,* die höher als alle ihre benachbarten Punkte sind, *Muldenpunkte,* die tiefer als jeder ihrer benachbarten Punkte liegen, und endlich *Sattelpunkte,* in denen zwei Niveaulinien gleicher Höhe sich kreuzen. In einem Gipfel- und in einem Muldenpunkte ist die Fläche elliptisch, in einem Sattelpunkte hyperbolisch gekrümmt.

162. Fundamentalaufgaben. *Die Höhe irgend eines zwischen zwei Niveaulinien liegenden Punktes kann* unschwer *durch graphische Interpolation bestimmt werden.* Zu diesem Zwecke schneide man die Fläche durch eine vertikale Ebene, deren Horizontalspur durch die Horizontalprojektion des gegebenen Punktes geht und klappe die Ebene dadurch um, daß man in den Schnittpunkten der Spur mit den einzelnen Niveaukurven die den letzteren zukommenden Höhen senkrecht auf der Spur aufträgt und ihre Endpunkte durch eine Kurve verbindet, welche die Höhe des gegebenen Punktes bestimmt (Fig. 568).

Um in einem Punkte x einer Niveaukurve die Tangentialebene zu bestimmen, lege man durch x die Tangente an die Niveaukurve und senkrecht zu dieser eine vertikale Ebene, deren Schnitt mit der Fläche wieder durch Umklappen bestimmt wird. Zieht man an die umgeklappte Schnittkurve in dem umgeklappten Punkte X eine zweite Tangente, so be-

19*

stimmt diese mit der Spur der Ebene einen Punkt T, durch den die Spur der Tangentialebene senkrecht zu Tx geht. Gleichzeitig hat man

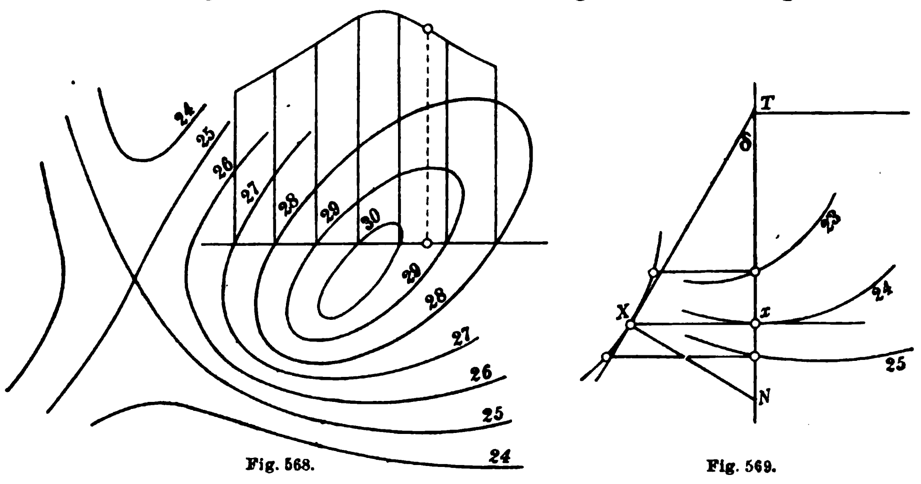


Fig. 568. Fig. 569.

in dem Winkel δ den *Neigungswinkel des Geländes* im Punkte x, und wenn man auf TX in X die Senkrechte bis N errichtet, die *Flächennormale* des Punktes x (Fig. 569).

Soll von einem Punkte A einer Niveaulinie aus eine *Linie konstanter Neigung gegen die Horizontalebene* eingezeichnet werden, so stelle man zunächst ein rechtwinkliges Neigungsdreieck her, dessen eine Kathete gleich der Höhendifferenz zweier aufeinander folgender Niveaulinien im benutzten Maßstabe, und dessen Winkel, der dieser Kathete gegenüberliegt, gleich dem verlangten Neigungswinkel ist. Die andere Kathete ist dann die Horizontalprojektion des konstanten Wegstückes zwischen je zwei aufeinander folgenden Niveaulinien. Man hat also mit dieser Kathete einen Kreis um A zu schlagen, der die nächste Niveaulinie in B trifft. Von B geht man in derselben Weise von Ni-

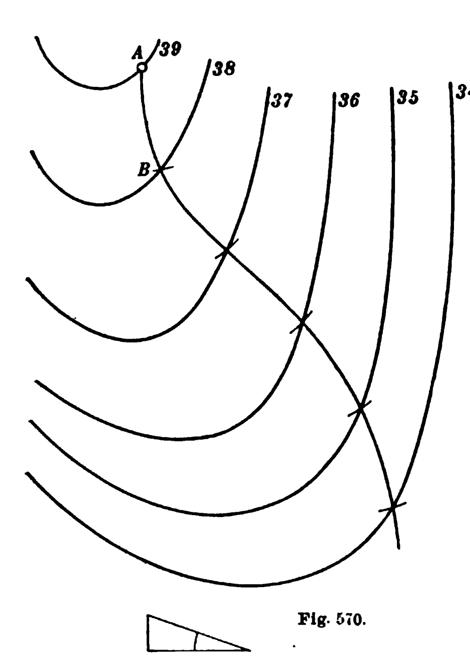


Fig. 570.

veaulinie zu Niveaulinie weiter und verbindet schließlich die so erhaltenen Punkte (Fig. 570).

Eine *Kurve, die alle Niveaulinien senkrecht schneidet,* hat in jedem ihrer Punkte das größtmöglichste Gefälle und ist daher im Gelände eine *Wasserabflußlinie.* Sie heißt *Linie stärksten Falles.*

163. Anlegung eines horizontalen Weges. Die am häufigsten vorkommende Aufgabe bei topographischen Flächen ist die Konstruktion

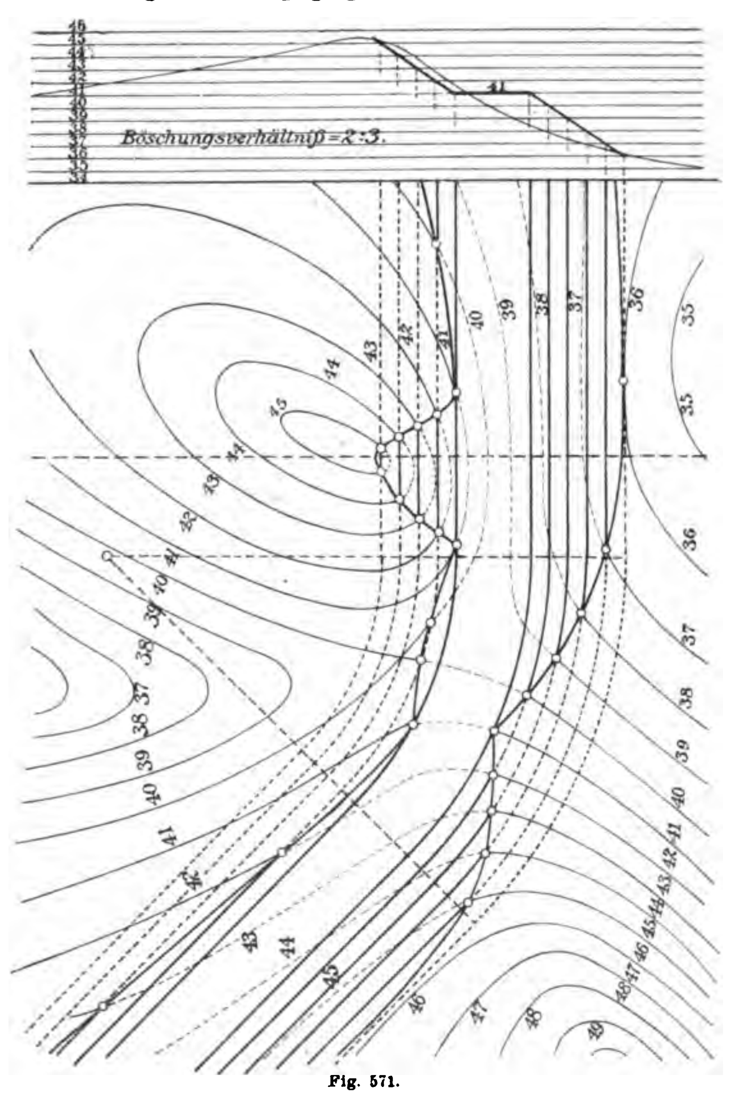


Fig. 571.

eines horizontalen Weges in bestimmter Höhe über dem Meeresspiegel und die Konstruktion der dazu nötigen *Böschungsflächen, die teils durch Aufschütten, teils durch Abtragen entstehen.* Um die Begrenzungslinien der Böschungsflächen zu bestimmen, zeichne man zunächst mit Hilfe eines vertikalen Schnittes, der senkrecht zur Wegrichtung ist, Niveaulinien der Böschungsflächen, parallel den Wegkanten, in denselben Höhen, in denen die in Betracht kommenden Niveaulinien des Geländes gezeichnet sind. Jeder Schnittpunkt einer Geländeniveaulinie mit der gleich hohen Böschungsniveaulinie ist dann ein Punkt der gesuchten Abschlußkurve der Böschung (Fig. 571).

VII. Teil.

Windschiefe Regelflächen.

XX. Kapitel.

Windschiefe Regelflächen im allgemeinen.

164. Erzeugung der windschiefen Regelflächen. Wenn eine gerade Linie sich nach einem bestimmten Gesetze bewegt, so beschreibt sie eine Regelfläche. Im allgemeinen ist dabei jede Lage der Erzeugenden mit der vorangehenden windschief; daher heißen die so erzeugten Flächen auch *windschiefe Regelflächen.* Nur in besonderen Fällen schneiden sich zwei unendlich benachbarte Lagen der Erzeugenden; die Fläche ist dann eine *entwickelbare Regelfläche.* Sie ist als *besonderer Fall der allgemeinen windschiefen Regelflächen* anzusehen. Der unendlich kleine Abstand zweier aufeinander folgender Erzeugenden oder Mantellinien ist bei den entwickelbaren Regelflächen identisch mit Null geworden.

Das Bewegungsgesetz, durch welches eine windschiefe Regelfläche von einer Geraden erzeugt wird, kann von verschiedener Art sein. Das allgemeinste *schreibt einer Geraden vor, sich so zu bewegen, daß sie gleichzeitig an drei Leitkurven entlang gleitet.* Das Rotationshyperboloid kann z. B. dadurch erzeugt werden, daß eine gerade Linie an drei parallelen Kreisen, diese ständig berührend, entlang gleitet, wobei der mittlere Kreis nicht der größte sein darf (Fig. 572).

Durch drei Leitkurven ist im allgemeinen eine windschiefe Regelfläche bestimmt. Diejenige *Mantellinie, welche durch einen bestimmten Punkt A einer der Leitkurven geht,* ist als Schnitt zweier Kegel bestimmt, deren Spitzen

in A liegen, und von denen jeder eine der beiden anderen Leitkurven als Grundkurve besitzt (Fig. 573). Diese beiden Kegel schneiden sich in mehreren Mantellinien, die im allgemeinen nicht derselben Regelfläche angehören, so daß also durch drei Leitkurven im allgemeinen mehrere, aber immer eine bestimmte Zahl von Regelflächen bestimmt sind. —

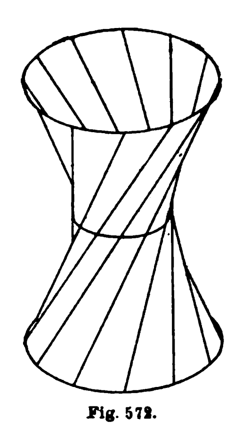


Fig. 572.

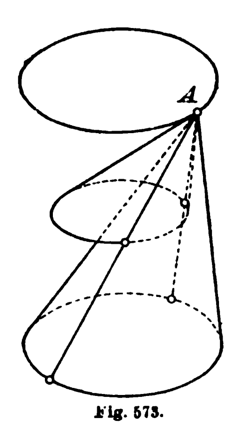


Fig. 573.

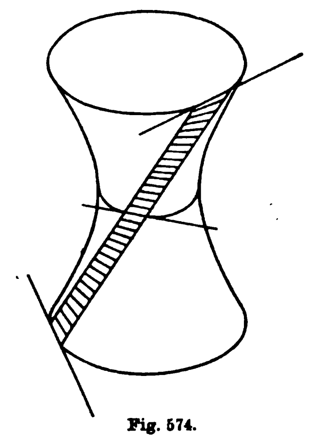


Fig. 574.

Der dem Punkte A benachbarte Punkt als Spitze eines zweiten Paares von Kegeln liefert die zu einer Mantellinie unendlich nahe liegende nächste Mantellinie.

Jede windschiefe Regelfläche kann auf die angegebene Weise erzeugt werden; irgend drei auf ihr liegende Kurven können nachträglich als Leitkurven angesprochen werden.

Daß zwei unendlich nahe Lagen der Erzeugenden windschief sind, ist leicht ersichtlich. Benutzt man nämlich drei ebene parallele Schnittkurven als Leitkurven, und bestimmt an jeder derselben die durch zwei unendlich benachbarte Mantellinien bestimmte Tangente, so sind diese windschief (Fig. 574). Würden die beiden Mantellinien sich schneiden, so müßten die drei Tangenten parallel sein, was in besonderen Fällen allerdings der Fall sein kann; die Fläche ist eben dann eine entwickelbare Regelfläche. Eine solche ist bereits, wie wir gesehen haben, durch zwei Leitkurven bestimmt und wird von einer Ebene, die an den Leitkurven, diese berührend, entlang rollt, umhüllt oder von einer Geraden erzeugt, die so an den Kurven entlang gleitet, daß die zusammengehörigen Tangenten beider Kurven parallel sind. Ein Kegel kann z. B. unter Benutzung zweier Kreise als Leitkurven erzeugt werden (Fig. 575).

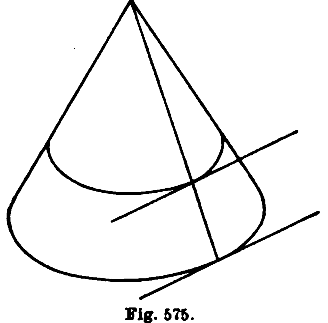


Fig. 575.

Statt der Leitkurven können auch *Leitflächen*, z. B. drei Kugeln, auftreten. Die von der Erzeugenden bestimmten Berührungskurven können dann nachträglich als Leitkurven benutzt werden. Auf die Bestimmung einer gemeinsamen Tangente an drei Flächen soll jedoch nicht weiter eingegangen werden.

165. Allgemeine Eigenschaften der windschiefen Regelflächen. Da die Erzeugende einen unendlich fernen Punkt besitzt, so geht auch *jede Regelfläche ins Unendliche.*

Die Tangentialebene in einem Punkte der Fläche kann bei allen Flächen (Fig. 576) dadurch ermittelt werden, daß man durch den Punkt

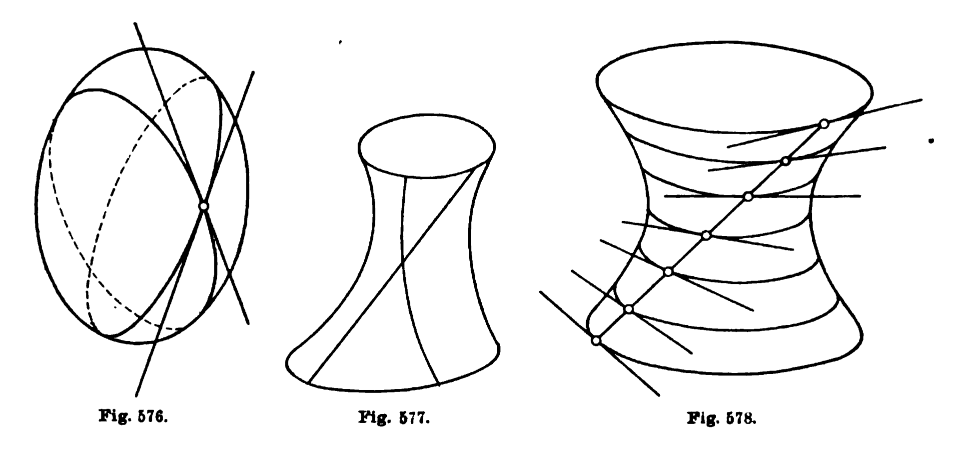


Fig. 576. Fig. 577. Fig. 578.

zwei in der Fläche liegende Kurven bestimmt und an diese die Tangenten legt. Zweckmäßig wählt man bei den Regelflächen als eine dieser Kurven die durch den Punkt gehende Mantellinie.

Da zwei unendlich nahe Mantellinien windschief sind, so ist eine Berührung der Tangentialebene längs einer ganzen Mantellinie nicht möglich. Daher muß die Tangentialebene, die Fläche schneiden, und zwar außer in der Mantellinie noch in einer Kurve (Fig. 577). Die Fläche hat demnach *nur Punkte hyperbolischer Krümmung.*

Legt man durch verschiedene Punkte einer Mantellinie Parallelschnitte durch die Fläche, so sind die Tangenten an die einzelnen Schnittkurven in den betreffenden Punkten der Mantellinie alle zueinander windschief (Fig. 578). Dreht sich also eine durch eine Mantellinie gehende Ebene um diese, so fällt von den Tangenten der parallelen Schnittkurven eine nach der anderen in die Ebene. *Jede beliebige Ebene, die durch eine Mantellinie*

geht, ist somit Tangentialebene. Nur der Berührungspunkt ist für die einzelnen Lagen ein anderer. Jede durch eine Mantellinie gehende Tangentialebene schneidet die Fläche noch in einer anderen Kurve. Um *den Berührungspunkt einer Tangentialebene* zu bestimmen, muß man außer der Mantellinie, durch die sie hindurchgeht, noch diese Schnittkurve bestimmen, indem man die Ebene mit einzelnen weiteren Mantellinien zum Schnitt bringt.

Der Flächenstreifen zwischen zwei unendlich nahen Mantellinien ist *ein windschiefes Flächenelement,* von dessen Verdrehung die Tangenten paralleler Schnittkurven eine Vorstellung geben, und zu dem ein verschränktes straff gespanntes Gummiband als Veranschaulichung dienen kann (Fig. 574).

Der kürzeste Abstand zwischen je zwei unendlich nahen Mantellinien heißt *Mittellinie*; durch diese wird das Flächenelement in zwei Teile geteilt, die kongruent sind, weil man sie durch Drehung des einen um die Mittellinie zur Deckung bringen kann (Fig. 579). Sämtliche Mittellinien bilden auf der Fläche eine Linie, welche *Striktionslinie* heißt. Der Schnittpunkt derselben mit einer Mantellinie heißt *Zentralpunkt* derselben. Die Striktionslinie teilt die Fläche in zwei Teile, welche weder kongruent noch symmetrisch sind. Auch ist die Striktionslinie nicht die kürzeste Linie; denn die Mittellinien sind nicht als Elemente der Kurve aufzufassen; diese setzt sich vielmehr aus den unendlich kleinen Mittellinien zu einer Zickzacklinie zusammen. Die Striktionslinie spielt bei den windschiefen Regelflächen eine ähnliche Rolle, wie die Rückkehrkurve der entwickelbaren. *Geht eine windschiefe Fläche in eine entwickelbare über, so wird die Striktionslinie zur Rückkehrkurve.* Das windschiefe Flächenelement nimmt dabei konische Gestalt an, wenn sich zwei unendlich nahe Mantellinien im Endlichen schneiden — zylindrische, wenn sie parallel sind. *Konische und zylindrische Flächenelemente sind also besondere Fälle des allgemeinen windschiefen Flächenelementes.*

Fig. 579.

166. Die Fundamentalaufgabe der windschiefen Regelflächen.

Die Fundamentalaufgaben sind bei den allgemeinen windschiefen Regelflächen weniger einfach. Schon zur Bestimmung einer *beliebigen Lage der Mantellinie* waren zwei Kegel notwendig. Auch zur Bestimmung der *Tangentialebene* in einem Punkte mußte eine Schnittkurve gezeichnet und eine Tangente daran gelegt werden; und zur Bestimmung des *Berührungspunktes einer beliebigen Ebene durch eine Mantellinie* mußte die Schnittkurve der Ebene mit der Fläche dadurch bestimmt werden,

daß die Schnittpunkte der Tangentialebene mit einer Reihe von Mantellinien aufgesucht wurden.

Um die *Berührungskurve eines Berührungskegels oder -zylinders* zu bestimmen, hat man eine Schar von Ebenen durch die einzelnen Mantellinien zu legen, die durch die Spitze des Kegels, bzw. parallel den Zylindermantellinien gehen. Für jede dieser Ebenen ist der Berührungspunkt zu bestimmen. Die Berührungspunkte bilden in ihrer Gesamtheit die Berührungskurve.

Der *Umriß* der Fläche ist als Umhüllungskurve der einzelnen Mantelinien herzustellen.

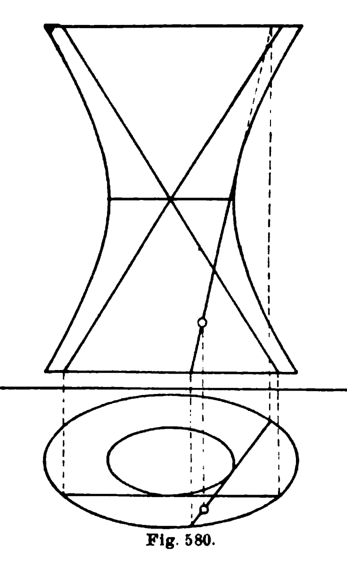
Für die praktische Ausführung der Fundamentalkonstruktionen bringt die spezielle Natur der einzelnen Aufgaben vielfach *Vereinfachungen* mit sich.

Die windschiefen Regelflächen finden in der Technik eine wichtige Anwendung als Leibungsflächen von Gewölben, Brücken, Treppen, Maschinenteilen, Schrauben usw. Im folgenden sollen nur die technisch wichtigsten Formen besprochen werden.

XXI. Kapitel.

Die windschiefen Regelflächen zweiter Ordnung.

167. Das hyperbolische Hyperboloid und Paraboloid als Regelflächen unter Benutzung dreier paralleler Ellipsen, bzw. Parabeln als Leitkurven. Das hyperbolische Hyperboloid und Paraboloid wurden als Rückungsflächen bereits besprochen; dabei wurden bei beiden Flächen zwei Scharen von Mantellinien entdeckt, die beim Paraboloid scharweise parallel einer Richtungsebene waren. Wir wollen jetzt dieselben Flächen als windschiefe Regelflächen erzeugen. Es ist das von besonderer Wichtigkeit, weil *die windschiefen Regelflächen zweiter Ordnung die einfachsten sind, und die Fundamentalaufgaben bei komplizierteren Flächen auf sie zurückgeführt werden können.*


Fig. 580.

Zur Erzeugung des Hyperboloids seien die Kehlellipse und zwei kongruente, der Kehlellipse parallele und ähnliche Ellipsen

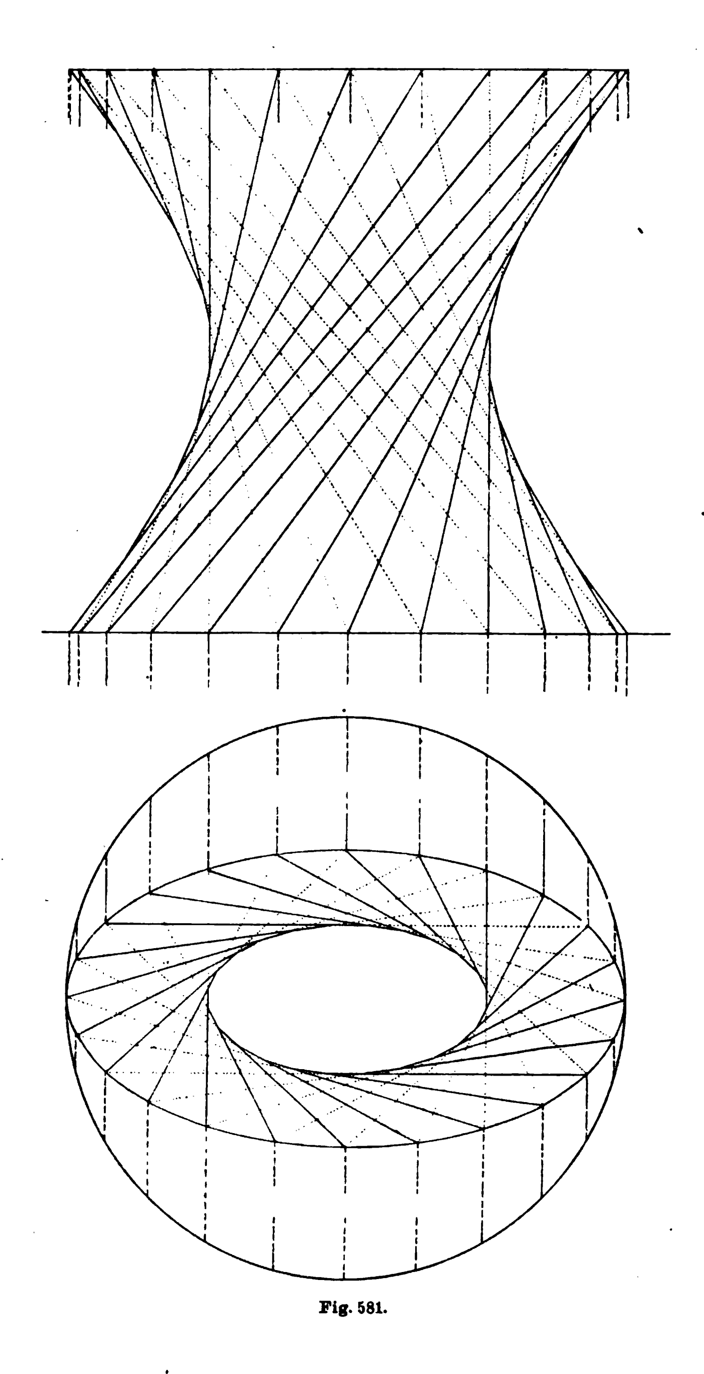


Fig. 581.

in gleichen Abständen von der Kehlellipse als Leitkurven gegeben (Fig. 580). Die *Bestimmung einer beliebigen Mantellinie* bietet dann keine Schwierigkeit; denn da die Kehlellipse in der Horizontalprojektion zugleich Umrißlinie ist, so muß sie von allen Mantellinien berührt werden. — Der vertikale, hyperbolische *Umriß* entsteht durch Umhüllung der einzelnen Mantellinien; die Hyperbel kann aber auch direkt aus ihrer reellen Achse und den Asymptoten konstruiert werden; die letzteren sind die beiden Mantellinien, die parallel der Vertikalebene liegen, in der Horizontalebene also als Tangente an die Kehlellipse, parallel der Projektionsachse, zu zeichnen sind. Diese beiden Mantellinien sind zugleich die Umrißlinien des asymptotischen Kegels (Fig. 580).

Auch in der Horizontalprojektion kann *die Kehlellipse* als Umrißlinie *durch Umhüllung der Mantellinien* bestimmt werden. Man geht dabei zweckmäßig vom Rotationshyperboloid aus und von

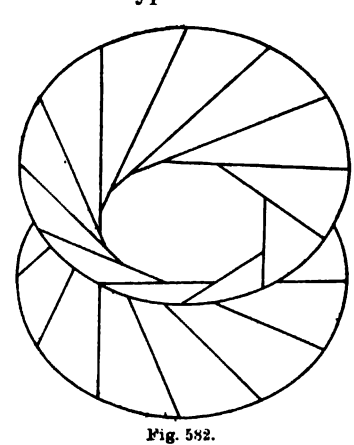


Fig. 582.

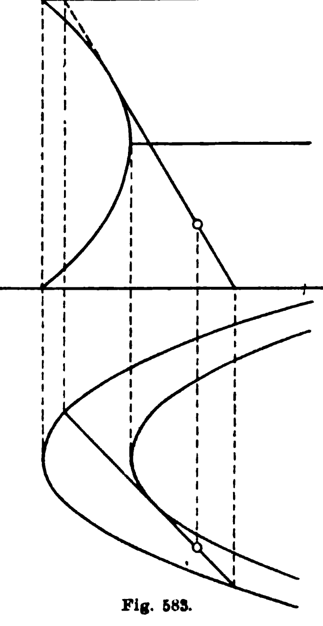


Fig. 583.

diesem durch proportionale Verkürzung der senkrecht zum Grundschnitt verlaufenden Kreisordinaten zum allgemeinen Hyperboloid über (Fig. 581).

Ist in der Horizontalprojektion *ein Punkt der Fläche* gegeben und soll die Vertikalprojektion des Punktes bestimmt werden, so hat man durch die Horizontalprojektion des Punktes eine Mantellinie als Tangente an die Kehlellipse zu legen und auf die Vertikalprojektion der Mantellinie den gegebenen Punkt hinaufzuloten (Fig. 580).

Eine Projektion der Fläche in unsymmetrischer Stellung kann durch Drehung oder Transformation aus der symmetrischen Stellung erhalten werden. *Die Umrißellipse muß dann durch Umhüllung bestimmt werden* und ist mit der Kehlellipse nicht ähnlich (Fig. 582).

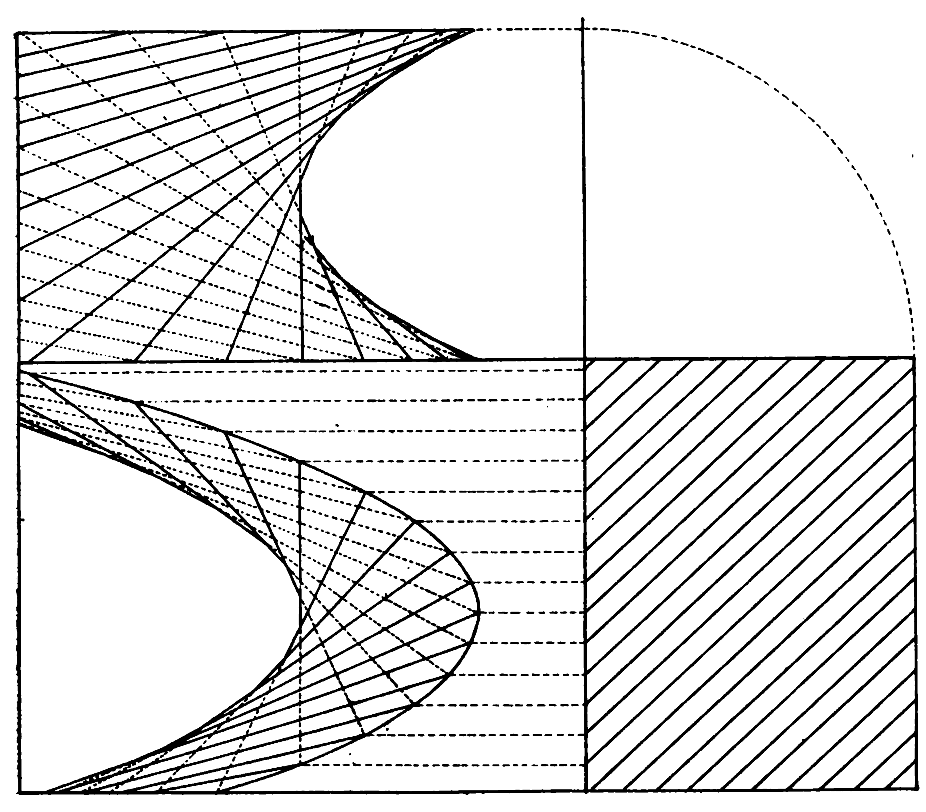


Fig. 584.

Die Behandlung des Paraboloids ist genau dieselbe; nur sind als Leitkurven drei parallele und kongruente Parabeln in gleichen Abständen zu benutzen (Fig. 583 und 584).

168. Die Regelflächen zweiter Ordnung unter Benutzung dreier Mantellinien derselben Schar als Leitkurven, bzw. zweier Mantellinien und einer Richtungsebene. Da jede Mantellinie einer Schar der Regelflächen zweiter Ordnung alle Mantellinien der anderen Schar schneidet, so können irgend drei Mantellinien, die zur selben Schar gehören und infolgedessen unter sich windschief sein müssen, nachträglich als Leitkurven angesehen werden. *Eine Regelfläche zweiter Ordnung kann* also auch *unter Benutzung dreier Geraden als Leitkurven erzeugt werden.* Zwischen diesen besteht keine bestimmte *Beziehung,* außer der, *daß sie unter sich windschief sein müssen.* Das Hyperboloid ist daher die einfachste Gattung der windschiefen Regelflächen.

Legt man durch jede der drei Leitgeraden eine Ebene parallel zu jeder der beiden anderen, so sind dadurch drei Paare paralleler Ebenen bestimmt, die ein *Parallelepiped* bilden (Fig. 585). Drei der Kanten desselben sind die drei Leitlinien; drei andere Kanten werden von der

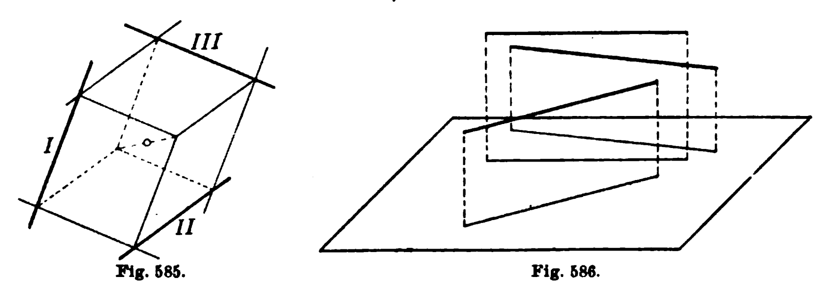


Fig. 585. Fig. 586.

Erzeugenden gebildet, in den drei Lagen, in denen sie je einer der drei Leitgeraden parallel ist. Daher ist die Diagonale des Parallelepipeds, die diese sechs Kanten nicht schneidet, imaginäre Achse des Hyperboloids, und der Mittelpunkt der Diagonale der Mittelpunkt der Fläche. — Ist das Parallelepiped ein Rhomboeder, so ist die Fläche ein Rotationshyperboloid.

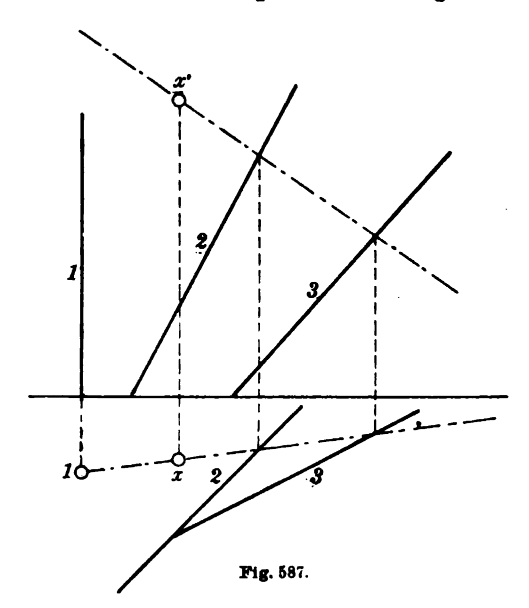


Fig. 587.

Beim Paraboloid sind alle Mantellinien einer Schar parallel einer Richtungsebene. *Sind* daher *die drei Leitgeraden parallel einer und derselben Ebene, so ist die Fläche ein Paraboloid* (Fig. 586). Ein Parallelepiped ist dann nicht möglich. *Eine von den drei Leitgeraden kann dann auch im Unendlichen angenommen und durch die Richtungsebene ersetzt werden.*

Bei der Ausführung der Fundamentalaufgaben für das durch drei Leitgeraden gegebene Hyperboloid, bzw. das durch zwei Leitgeraden und eine Richtungsebene gegebene Paraboloid *ist eine möglichst zweckmäßige Lage der gegebenen Stücke zu den Projektionsebenen* von großer Wichtigkeit.

Beim Hyperboloid sind die Fundamentalkonstruktionen dann am einfachsten, wenn eine der Leitgeraden senkrecht auf einer Projektionsebene,

etwa der Horizontalebene, steht (Fig. 587). Da alle Erzeugenden diese Leitgerade schneiden, so müssen daher bei dieser Lage alle Horizontalprojektionen der Erzeugenden durch einen Punkt gehen. Dadurch ist zu jeder beliebigen Lage derselben die Vertikalprojektion bestimmt; auch kann, wenn von einem Flächenpunkte die Horizontalprojektion gegeben ist, seine Vertikalprojektion dadurch bestimmt werden, daß man den gegebenen Punkt mit der sich als Punkt projizierenden Leitgeraden verbindet und die Schnittpunkte der Verbindungslinie mit den beiden anderen Leitgeraden auf ihre zugehörigen Vertikalprojektionen hinauflotet. Auf der Verbindungslinie der so bestimmten beiden Punkte muß dann die Vertikalprojektion des Flächenpunktes liegen.

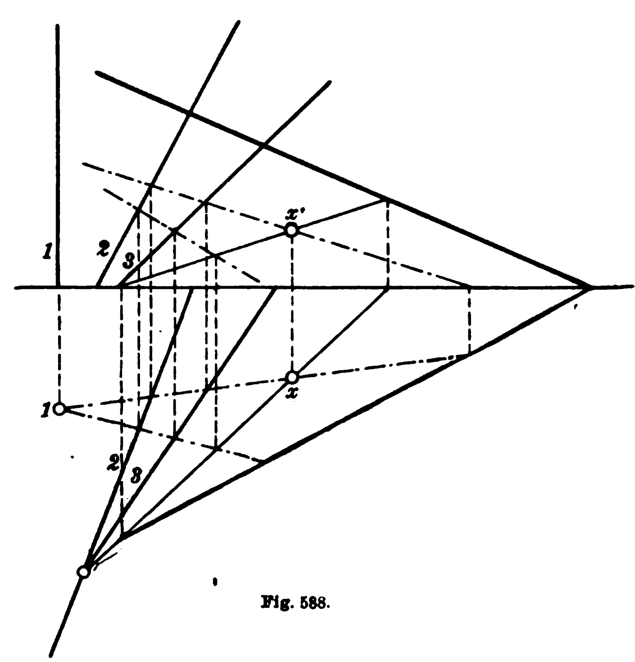


Fig. 588.

Auch *eine beliebige Mantellinie derjenigen Schar, zu der die Leitgeraden gehören*, ist nicht schwer zu ermitteln (Fig. 588). Da zu der auf der Horizontalebene senkrecht stehenden Leitgeraden eine Gerade der erzeugenden Schar parallel ist, so müssen auch die Horizontalprojektionen aller Geraden der leitenden Schar durch einen Punkt gehen, der bereits durch zwei der gegebenen Leitgeraden bestimmt ist. Die Horizontalprojektion der durch einen gegebenen Punkt gehenden Mantellinie der Leitschar, ist daher die Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Schnittpunkt der beiden schiefen gegebenen Leitgeraden. Lotet man die Schnittpunkte dieser Verbindungslinie mit zwei beliebigen vorher bestimmten Mantellinien der erzeugenden Schar hinauf auf die zugehörigen Vertikalprojektionen der letzteren, so ist die Verbindungslinie der dadurch bestimmten beiden Punkte die Vertikalprojektion der durch den gegebenen Punkt gehenden Mantellinie der Leitschar; auf sie ist die Horizontalprojektion des gegebenen Punktes hinaufzuloten.

Durch die Konstruktion der durch einen Flächenpunkt gehenden beiden Mantellinien ist auch die *Tangentialebene* in diesem Punkte bestimmt. Ihre Spuren gehen durch die gleichnamigen Spuren der beiden Mantellinien (Fig. 588).

In der Horizontalprojektion werden auf den beiden schiefen gegebenen Leitgeraden durch die Schnittpunkte der einzelnen Erzeugenden *zwei projektive Punktreihen* bestimmt. Dieselben befinden sich in der Projektion in perspektiver Lage, im Raume sind allerdings die Projektionsstrahlen windschief, die Abschnitte aber zwischen den einzelnen Punkten sind proportional zu ihren Projektionen. Im Raume sind also die beiden Punktreihen proportional zu zwei in perspektiver Lage befindlichen projektiven Punktreihen, also gleichfalls projektiv. Daher *bestimmen die Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier windschiefer projektiver Punktreihen ein Hyperboloid.* In der Ebene wird durch zwei projektive Punktreihen eine Ellipse oder Hyperbel erzeugt, und zwar durch dieselben beiden Punktreihen; nur wird im Falle der Ellipse die eine der Punktreihen von den aufeinander folgenden Punkten in umgekehrter Richtung durchlaufen wie im Falle der Hyperbel. Die eine Lage dieser Punktreihe kann aber in die andere dadurch übergeführt werden, daß man sie aus der Ebene herausdreht und — durch eine windschiefe Lage zur anderen Punktreihe hindurch — in die andere Lage überführt. Dabei *geht die erzeugte Ellipse durch das Hyperboloid hindurch in die Hyperbel über.*

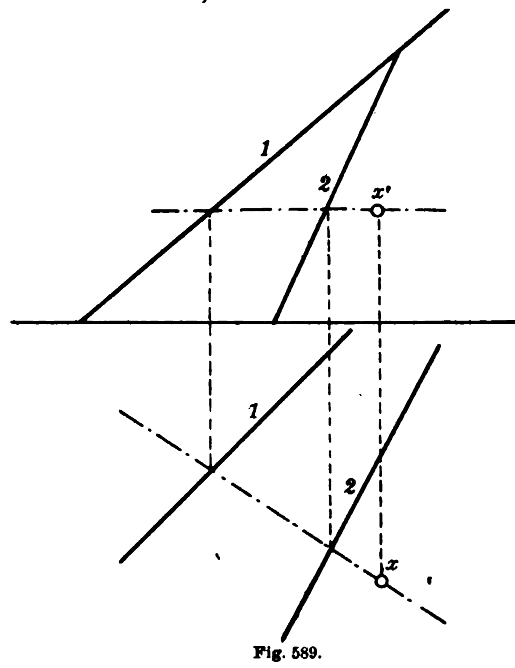


Fig. 589.

Das durch zwei Leitgerade und eine Richtungsebene bestimmte *Paraboloid* befindet sich dann in der zur Ausführung der Fundamentalkonstruktionen zweckmäßigsten Stellung zu den Projektionsebenen, wenn die Richtungsebene parallel einer Projektionsebene, etwa der Horizontalebene, ist. Alle Erzeugenden sind bei dieser Stellung parallel der Horizontalebene, alle ihre Vertikalprojektionen also parallel der Projektions-

achse. Die zusammengehörigen Projektionen eines Flächenpunktes müssen daher auf den Projektionen einer Geraden liegen, die horizontal ist und beide Leitgeraden schneidet (Fig. 589).

Auch *die durch einen gegebenen Punkt gehende Mantellinie der Leitschar* ist leicht zu bestimmen (Fig. 590). Eine von den horizontalen Mantellinien der erzeugenden Schar steht senkrecht auf der Vertikalebene. Da diese von allen Mantellinien der Leitschar geschnitten wird, so müssen die

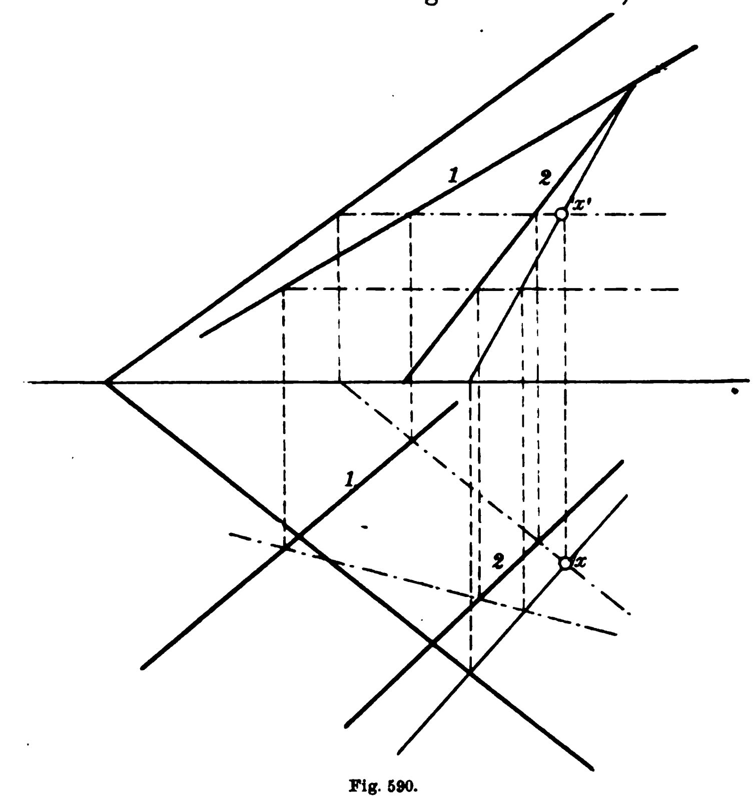


Fig. 590.

Vertikalprojektionen aller Mantellinien der Leitschar durch einen Punkt gehen; dieser ist aber bereits durch den Schnittpunkt der beiden gegebenen Leitgeraden bestimmt. Die Vertikalprojektion der durch einen gegebenen Punkt gehenden Mantellinie der Leitschar ist daher die Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Schnittpunkt der beiden Leitgeraden. Lotet man die Schnittpunkte dieser Verbindungslinie mit zwei beliebigen vorher bestimmten horizontalen Mantellinien der erzeugenden Schar herunter auf die zugehörigen Horizontalprojektionen der letzteren, so ist die Verbindungslinie der dadurch bestimmten beiden Punkte die

Horizontalprojektion der durch den gegebenen Punkt gehenden Mantellinie der Leitschar.

Durch die Projektionen der durch einen Flächenpunkt gehenden beiden Mantellinien ist wiederum die *Tangentialebene* dieses Punktes bestimmt. Ihre Spuren gehen durch die beiden gleichnamigen Spuren der Mantellinien (Fig. 590).

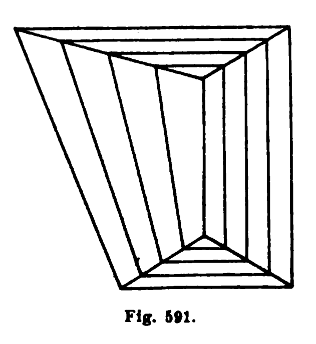


Fig. 591.

Aus der Vertikalprojektion erkennt man, daß die beiden Leitgeraden von den parallelen Erzeugenden in *ähnlichen Punktreihen* geschnitten werden. Daher *bestimmen die Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier windschiefer ähnlicher Punktreihen ein hyperbolisches Paraboloid.* In der Ebene bestimmten zwei ähnliche Punktreihen eine Parabel.

Das durch zwei Leitgeraden und eine Richtungsebene bestimmte Paraboloid findet in der Technik mannigfache *Anwendung* bei windschiefen Dächern — z. B. bei der Konstruktion eines *Walmdaches über*

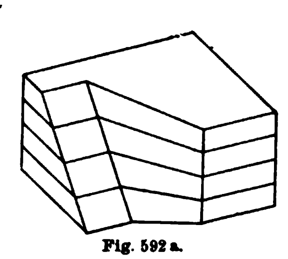


Fig. 592a.

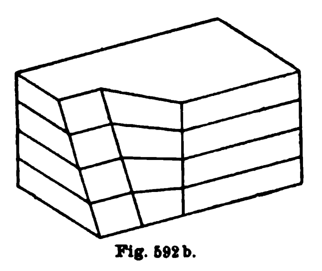


Fig. 592b.

einem Trapez mit horizontaler Firstkante (Fig. 591) —, bei Flügelmauern — z. B. *beim Übergang einer schiefen Böschung zu einer vertikalen Mauer* (Fig. 592) — usw.

169. Das Schmiegungshyperboloid und Paraboloid. Die im vorigen Paragraphen mitgeteilte Konstruktion der Tangentialebene in einem Punkte des hyperbolischen Hyperboloids und Paraboloids ist deshalb von besonderer Wichtigkeit, weil die Konstruktion der Tangentialebene in einem Punkte jeder anderen windschiefen Regelfläche darauf zurückführbar ist. Schneidet man nämlich eine beliebige windschiefe Regelfläche durch drei beliebige Ebenen, so werden die drei Schnittkurven von der durch den Flächenpunkt X gehenden Mantellinie in drei Punkten A, B, C geschnitten (Fig. 593). Die drei Tangenten haben aber mit den Schnittkurven noch die unendlich nahen Punkte A', B', C' gemein. Diese be-

stimmen die zu A, B, C unendlich nahe Mantellinie $A'B'C'$. Betrachtet man also die drei Tangenten AA', BB' und CC' als Leitlinien eines Hyperboloids, so hat dieses mit der gegebenen Fläche zwei unendlich nahe Mantellinien, also das ganze zwischen diesen liegende windschiefe Flächenelement gemein. Das Hyperboloid berührt also die gegebene Fläche längs dieses Flächenelementes und heißt daher ein *Schmiegungshyperboloid.* Hinsichtlich der Berührung besteht zwischen einer nicht entwickelbaren Regelfläche und dem Schmiegungshyperboloid dieselbe Beziehung wie zwischen einer entwickelbaren Fläche und der Tangentialebene. — Jede Ebene durch die gemeinschaftliche Mantellinie der nicht entwickelbaren Fläche und des betreffenden Schmiegungshyperboloids ist gemeinschaftliche Tangentialebene beider Flächen in demselben Punkte der Mantellinie.

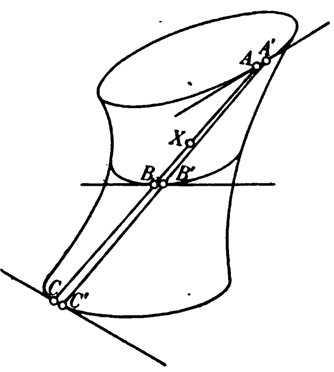


Fig. 593.

Durch jede Mantellinie können unendlich viele Schmiegungshyperboloide an die nicht entwickelbare Regelfläche gelegt werden. Die einzelnen Formen hängen von den drei Leitgeraden, also von den drei Schnittkurven ab. — Legt man die drei Schnittebenen parallel zu einander, so sind die drei Leitgeraden parallel einer Richtungsebene, das Hyperboloid wird daher zum *Schmiegungsparaboloid.* Es gibt auch unendlich viele Schmiegungsparaboloide durch jede Mantellinie.

Die Konstruktion der Tangentialebene in einem Punkte einer beliebigen nicht entwickelbaren Regelfläche ist damit zurückgeführt auf die Konstruktion der Tangentialebene eines Schmiegungshyperboloids oder Paraboloids, das die gegebene Fläche längs der durch den Punkt gehenden Mantellinie berührt.

170. Das Normalenparaboloid. Denkt man sich eine beliebige nicht entwickelbare Regelfläche durch eine Schar paralleler Ebenen geschnitten, die alle senkrecht auf einer Mantellinie stehen, und in den Schnittpunkten der Mantellinie mit den einzelnen Schnittkurven die Normale der betreffenden Kurve bestimmt, so sind diese Kurvennormalen identisch mit den Flächennormalen in den einzelnen Punkten der Mantellinie (Fig. 594). Dreht man alle Normalen gleichzeitig um die Mantellinie als Achse, so bewegt sich dabei jede Normale in der betreffenden Schnittebene und fällt bei einer Drehung um einen rechten Winkel mit der Tangente der Schnittkurve zusammen. Die sämtlichen Tangenten

bilden aber ein Schmiegungsparaboloid der betreffenden Mantellinie. Daher ist auch *die Regelfläche, die von den Normalen einer Mantellinie gebildet wird, ein Paraboloid;* sie heißt das *Normalenparaboloid.*

Das Normalenparaboloid ist für den *Steinschnitt* von Wichtigkeit. Bei einem Gewölbe müssen nämlich aus Stabilitätsrücksichten die Fugen-

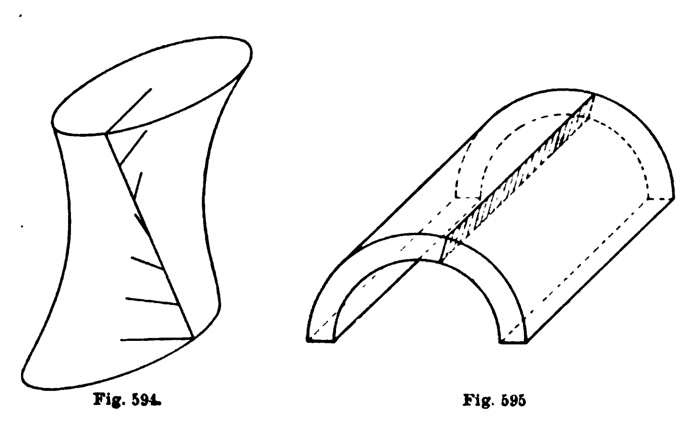


Fig. 594. Fig. 595

flächen, in denen die einzelnen Steine aneinander liegen, senkrecht zur Wölbungsfläche sein. Bei einem zylindrischen Gewölbe fallen die Normalen einer Mantellinie in eine Ebene; daher müssen die Fugenflächen eben sein (Fig. 595). Dieselben gehen aber bei einem Gewölbe, das von einer windschiefen Regelfläche gebildet wird, in paraboloidische Flächen über, wenn die Mantellinien des Gewölbes als Fugenlinien benutzt werden.

171. Kuppelung zweier windschiefer Achsen durch Hyperboloidräder. Die Berührung zweier windschiefer Regelflächen längs einer

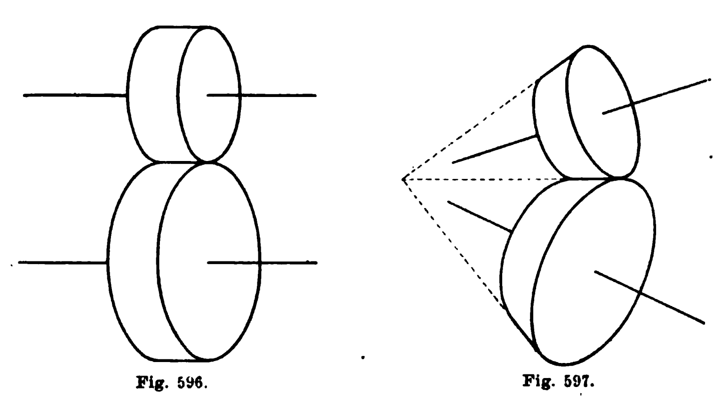


Fig. 596. Fig. 597.

Mantellinie kommt auch zur Anwendung, wenn die Drehung einer Achse auf einer zu ihr windschiefen Achse durch Friktions- oder Zahnräder

in ähnlicher Weise übertragen werden soll, wie das bei zwei parallelen Achsen durch zwei Rotationszylinder (Fig. 596), bei zwei sich schneidenden Achsen durch zwei Rotationskegel (Fig. 597) geschehen kann. *Bei windschiefen Achsen übertragen zwei Rotationshyperboloide, die sich längs eines Flächenelementes berühren, die Drehung der einen Achse auf die andere.* Ist die Reibung zwischen den Zylinder-, Kegel- oder Hyperboloidrädern zu gering, so müssen Zahnräder eingeschnitten werden. In allen drei Fällen sind die einzelnen Zähne längs den Mantellinien zu schneiden.

Es soll zunächst untersucht werden, *welche Beziehung zwischen zwei Rotationshyperboloiden bestehen muß, damit sie sich in eine Lage bringen lassen, in der sie sich gegenseitig berühren.* Diese Beziehung kann zunächst so ausgesprochen werden, daß zwei Flächenelemente beider Hyperboloide zwischen je zwei unendlich nahen Mantellinien zur Deckung gebracht werden können. Ein solches Flächenelement ist aber bestimmt durch die Mittellinie e der beiden unendlich nahen Mantellinien und durch den unendlich kleinen Winkel $d\sigma$, den diese miteinander bilden. Diese beiden Größen müssen in beiden Hyperboloiden gleich sein. Nun ist aber ein Rotationshyperboloid bestimmt durch den Kehlkreisradius r und den Schränkungswinkel α, den eine Mantellinie mit der Achse bildet. Es kommt also darauf an, e und $d\sigma$ auszudrücken durch α und r, zu denen noch der Winkel $d\varphi$ kommt, um den sich r gedreht hat, wenn eine Mantellinie sich bis zu ihrer unendlich nahen Mantellinie weitergedreht hat.

Zur Bestimmung von e beachte man, daß das Dreieck $b'b_1'\beta$ in der Tangentialebene von b' liegt, die parallel der Vertikalebene ist (Fig. 598); dieses Dreieck projiziert sich also in wahrer Gestalt. Daher ist der Winkel $\beta'b'b_1' = \alpha$; $b'b_1'$ aber ist gleich $r \cdot d\varphi$; daher ist

$$e = b'\beta' = b'b_1' \cdot \cos\alpha,$$

oder

$$e = r \cdot d\varphi \cdot \cos\alpha.$$

Zur Bestimmung von $d\sigma$ sei daran erinnert, daß die Mantellinien des asymptotischen Kegels parallel den Mantellinien des Hyperboloids sind (Fig. 599). Die Umrißmantellinie des asymptotischen Kegels bildet also mit der Achse gleichfalls den Winkel α, und der Winkel zweier unendlich naher Kegelmantellinien $\mathfrak{C}\,O\,\mathfrak{C}_1$ ist gleich $d\sigma$. Ist $\mathfrak{r}$ der Grundkreisradius des Kegels, so ist $O\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{r}}{\sin\alpha}$, und es ist die Strecke $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ in dem von dem Grundkreisradius gebildeten Dreieck gleich $\mathfrak{r} \cdot d\varphi$, wäh-

rend sie aus dem von den Mantellinien begrenzten Dreieck gleich $O\mathfrak{C} \cdot d\sigma$, also gleich $\frac{\mathfrak{r}}{\sin\alpha} \cdot d\sigma$ ist. Es ist also:

$$\mathfrak{r}\, d\varphi = \frac{\mathfrak{r}}{\sin\alpha}\, d\sigma,$$

woraus sich ergibt:

$$d\sigma = \sin\alpha \cdot d\varphi.$$

Sollen in den Flächenelementen zweier Rotationshyperboloide mit dem Kehlradius r_1 und r_2 und den Schränkungswinkeln α_1 und α_2 die

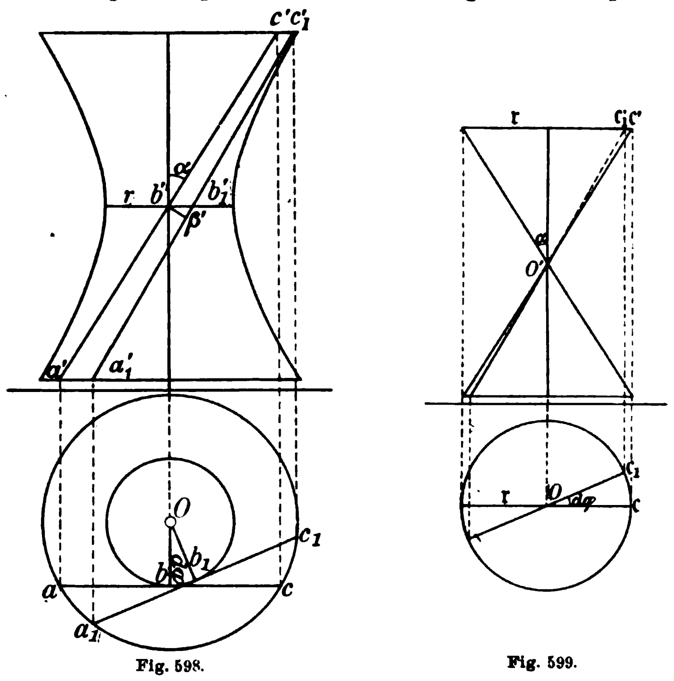


Fig. 598. Fig. 599.

Größen e_1 und e_2 und ebenso $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$ gleich sein, so hat man daher die beiden Gleichungen:

$$r_1 \cdot d\varphi_1 \cdot \cos\alpha_1 = r_2 \cdot d\varphi_2 \cdot \cos\alpha_2$$

und

$$d\varphi_1 \cdot \sin\alpha_1 = d\varphi_2 \cdot \sin\alpha_2,$$

woraus sich durch Division *die Bedingung:*

$$r_1 \operatorname{cotg}\alpha_1 = r_2 \operatorname{cotg}\alpha_2$$

dafür ergibt, daß zwei Rotationshyperboloide in eine Lage gebracht werden können, in der sie sich gegenseitig berühren.

Damit ist auch die Lösung zu folgender Aufgabe gegeben: *Gegeben sind zwei Achsen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ in dem Abstande r voneinander und unter dem Winkel α. Es sollen die beiden Rotationshyperboloide bestimmt werden deren Achsen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ sind, mit der Bedingung, daß die Drehung des*

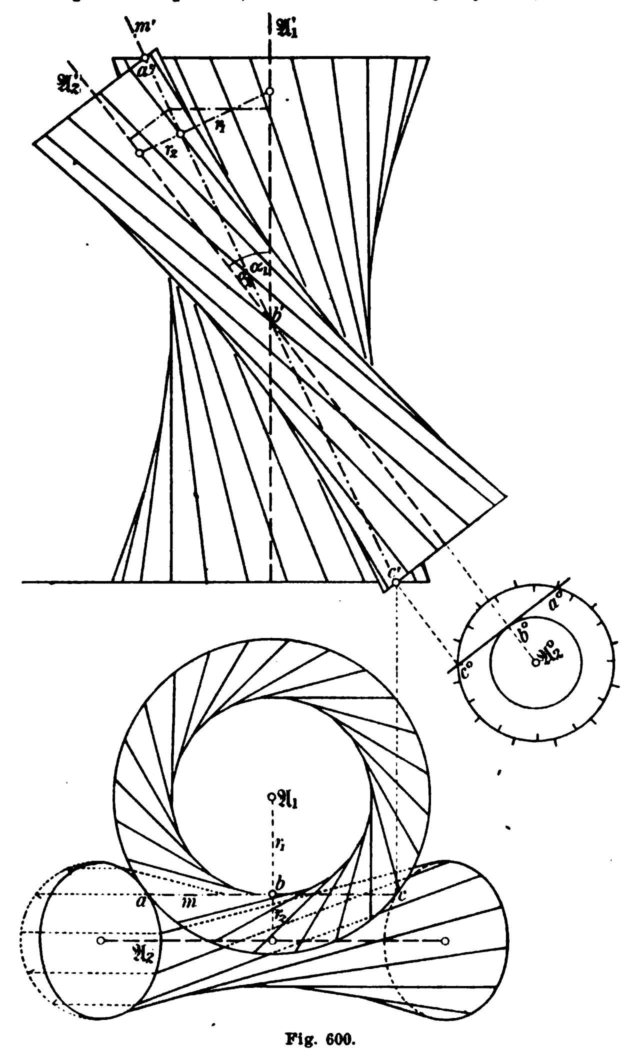


Fig. 600.

einen sich so auf das andere überträgt, daß die Umdrehungsgeschwindigkeiten sich verhalten wie $w_1 : w_2$, woraus sich sofort ergibt, daß

$$d\varphi_1 : d\varphi_2 = w_1 : w_2$$

ist. In Fig. 600 ist $w_1 : w_2 = 1 : 2$ angenommen.

Projiziert man die Achsen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ in solcher Lage, daß $\mathfrak{A}_1$ senkrecht auf der Horizontalebene steht und $\mathfrak{A}_2$ parallel der Vertikalebene ist, so ist auch die Berührungsmantellinie m, die zunächst zu ermitteln ist, parallel der Vertikalebene, und die Winkel α_1 und α_2, die von der Berührungsmantellinie mit den Achsen gebildet werden, projizieren sich auf die Vertikalebene in wahrer Größe. Zur Bestimmung von α_1, α_2, r_1 und r_2 stehen dann die folgenden *vier Gleichungen* zur Verfügung:

(1) $$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha,$$

(2) $$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{w_2}{w_1},$$

(3) $$r_1 + r_2 = a$$

und

(4) $$r_1 \operatorname{cotg} \alpha_1 = r_2 \operatorname{cotg} \alpha_2.$$

Aus ihnen können die gesuchten vier Bestimmungsgrößen folgendermaßen konstruktiv ermittelt werden: Aus Gleichung (1) und (2) können zunächst α_1 und α_2 dadurch bestimmt werden, daß man m' so zwischen $\mathfrak{A}_1'$ und $\mathfrak{A}_2'$ legt, daß die Abstände eines beliebigen Punktes von $\mathfrak{A}_1'$ und $\mathfrak{A}_2'$ sich wie $w_1 : w_2$ verhalten. Aus Gleichung (3) und (4) erhält man r_1 und r_2, wenn man r senkrecht auf m' zwischen $\mathfrak{A}_1'$ und $\mathfrak{A}_2'$ hineinlegt.

Nunmehr können beide Hyperboloide durch eine Reihe von Mantellinien dargestellt werden. Das senkrechte Hyperboloid möge oben und unten durch zwei gleiche Parallelkreise abgeschnitten werden. Von den beiden Punkten a und c aus wird dann in der Horizontalprojektion der Kreis je in etwa 24 gleiche Teile geteilt und die zusammengehörenden Punkte der Reihe nach miteinander verbunden, indem man von ac ausgeht. Endlich werden die einzelnen Mantellinien noch hinaufgelotet auf die Vertikalebene. Die Bestimmung der Mantellinien des schiefen Hyperboloids erfolgt in gleicher Weise unter Benutzung einer Hilfshorizontalebene, die senkrecht auf der Achse $\mathfrak{A}_2$ steht. Da sich $w_1 : w_2$ wie $1 : 2$ verhalten soll, so ist der Grundkreis dieses Hyperboloids nur in 12 gleiche Teile zu teilen.

XXII. Kapitel.

Windschiefe Regelflächen höherer Ordnung.

172. Einfache Beispiele. Die windschiefen Regelflächen zweiter Ordnung sind deshalb die einfachsten, weil alle drei Leitkurven gerade Linien sind. Im allgemeinsten Falle sind die drei Leitlinien krummlinig. In der Praxis kommt dieser Fall freilich kaum vor. Stets ist mindestens eine Leitlinie geradlinig; dieselbe kann auch im Unendlichen liegen und dann durch eine Richtungsebene ersetzt werden. *Die Bestimmung irgendeiner Mantellinie der durch zwei Kurven und eine Gerade*

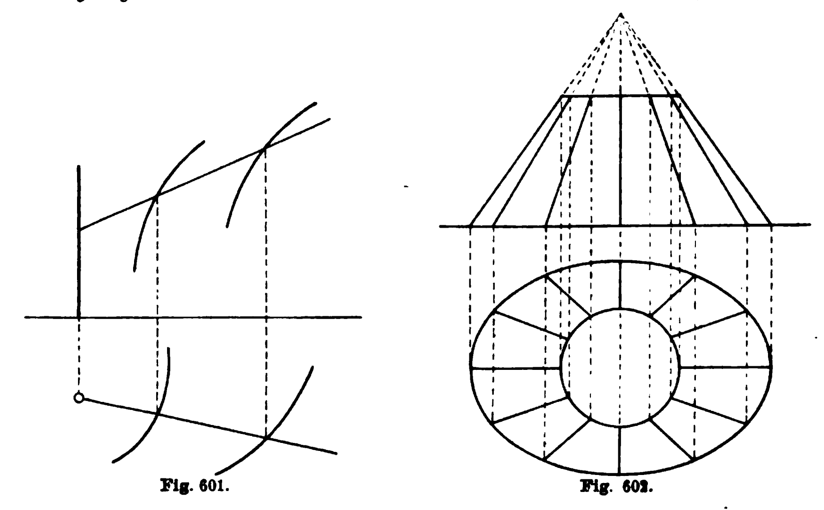
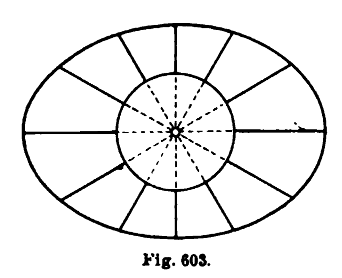


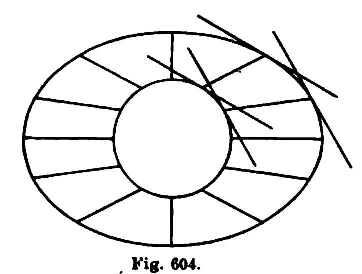
Fig. 601. Fig. 602.

als Leitlinien gegebenen Fläche geschieht dadurch, daß man durch die Leitgerade, bzw. parallel der Richtungsebene eine Ebene legt, deren Schnittpunkte mit den beiden krummlinigen Leitlinien bestimmt und diese verbindet. Am einfachsten ist die Konstruktion dann, wenn die Leitgerade senkrecht auf einer Grundebene steht (Fig. 601), bzw. die Richtungsebene parallel einer solchen ist. Einige *praktische Beispiele* mögen das Gesagte erläutern.

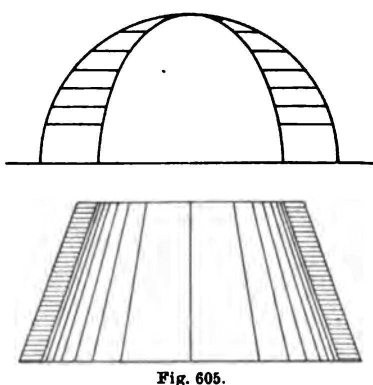
Sind *zwei Kurven, die in parallelen Ebenen liegen, durch eine windschiefe Regelfläche zu überspannen,* z. B. zwei Ellipsen, deren Achsen horizontal und unter sich parallel sind, während der Mittelpunkt der einen senkrecht unter dem der anderen liegt, so kann man als dritte Leitlinie eine Gerade je nach den Umständen wählen. Sollen z. B. die Verbindungslinien der Scheitelpunkte Mantellinien werden und die Fläche

zwei Symmetralebenen besitzen, so kann man entweder die Leitgerade senkrecht auf der Vertikalebene — oder auch Seitenrißebene — annehmen. Alle Mantellinien gehen dann in der Vertikalprojektion — im Seitenriß — durch einen Punkt und sind dadurch bestimmt (Fig. 602). Oder man kann die Leitgerade durch die beiden Mittelpunkte der Ellipsen


Fig. 603.


Fig. 604.

legen; alle Mantellinien gehen dann in der Horizontalprojektion durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt beider Ellipsen (Fig. 603). Endlich können die beiden Kurven auch durch eine entwickelbare Regelfläche überspannt werden; eine Mantellinie ist dann in der Horizontalprojektion durch parallele Tangenten an beide Ellipsen bestimmt (Fig. 604).


Fig. 605.

Statt der dritten Leitkurve kann, wenn zwei parallele Leitkurven gegeben sind, auch eine Richtungsebene parallel einer Grundebene angenommen werden, so daß die Projektionen der Mantellinien in der anderen Grundebene parallel der Projektionsachse sind. Zur Bestimmung der Mantellinien werden die beiden Leitkurven durch eine Schar paralleler Ebenen geschnitten und zusammengehörige Schnittpunkte verbunden. Soll z. B. ein Gewölbe über konvergierenden Widerlagern konstruiert werden, wenn die beiden gleichhohen Stirnflächen gegeben sind, so kann das dadurch geschehen, daß die beiden Stirnkurven durch eine Schar horizontaler Mantellinien miteinander verbunden werden (Fig. 605). Werden die Mantellinien als Fugenlinien benutzt, so müssen die Fugenflächen parabolische Flächen sein.

173. Das Konoid. Kann man die Form einer oder beider Leitkurven auswählen, so bestimmt man sie so, daß die Fläche möglichst einfach wird. Nächst dem Paraboloid und Hyperboloid ist die einfachste

windschiefe Regelfläche *das Konoid*; es wird bestimmt durch eine Leitkurve, eine Leitgerade und eine Richtungsebene. Eine beliebige Mantellinie erhält man dadurch, daß man Leitgerade und -kurve durch eine Ebene parallel der Richtungsebene schneidet und die Schnittpunkte verbindet; die Fläche heißt dann *senkrechtes Kreiskonoid*, wenn die Leitkurve ein Kreis ist, und die Ebene desselben, sowie die Leitgerade senkrecht auf der Richtungsebene stehen (Fig. 606). Es besteht aus zwei sackartigen Mänteln und hat in der Leitgeraden einen Selbstdurchschnitt, der zugleich Striktionslinie ist. Zwei Flächenelemente sind zylindrisch und zwei konisch. Die Fläche hat nichts zu tun mit einem

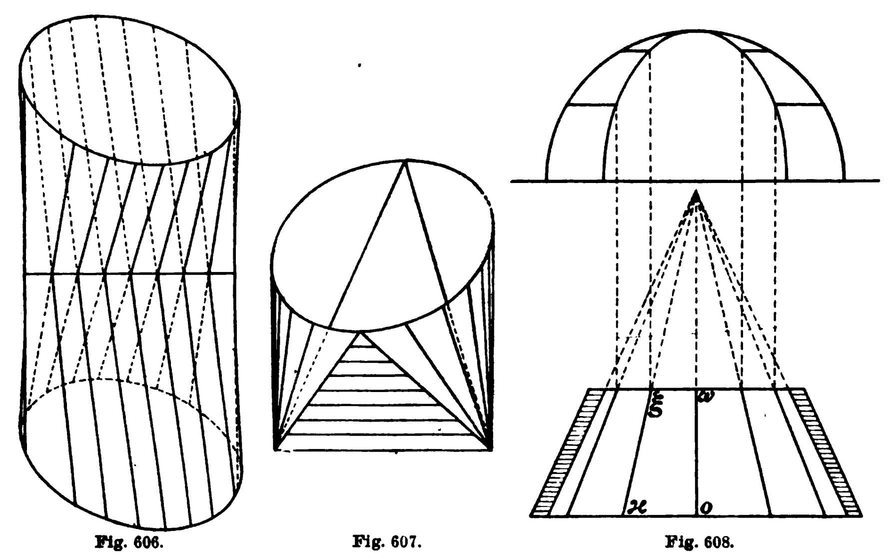


Fig. 606. Fig. 607. Fig. 608.

entwickelbaren Dütensack, der aus zwei Kegelteilen besteht, zwischen die sich zwei ebene Dreiecke hineinlegen (Fig. 607).

Auch das Konoid wird häufig verwendet zur Überwölbung konvergierender Widerlager. Sind z. B. nur die beiden Widerlager und eine kreisförmige Stirnfläche gegeben, und soll ein *Konoid als Gewölbefläche* verwendet werden, so bestimmt man zunächst durch den Schnittpunkt der verlängerten Kämpferfugen die vertikale Leitgerade, durch diese, die Horizontalebene als Richtungsebene und den Stirnkreis ist die Fläche bestimmt. Die zweite Stirnkurve erhält man durch einen parallelen Schnitt der Mantellinien zur gegebenen Stirnfläche. Dieselbe ist eine Ellipse, weil jede Ordinate $\omega\xi$ zu ox in konstantem Verhältnis steht (Fig. 608).

Tritt an Stelle des Leitkreises diejenige Raumkurve, die entsteht, wenn eine Kreisfläche auf einen Rotationszylinder aufgewickelt ist,

so wird aus dem senkrechten Kreiskonoid das sogenannte modifizierte Kreiskonoid. Dasselbe wird häufig als *Wölbungsfläche eines Torbogens* benutzt, *der radial in einen zylindrischen Rundbau führt* (Fig. 609).

Tritt an die Stelle der Leitkurve eine Leitfläche, z. B. eine Kugel, so wird aus dem Konoid ein Flächenkonoid, z. B. ein *Kugelkonoid.* Eine beliebige Mantellinie wird wieder durch einen ebenen Schnitt parallel der Richtungsebene bestimmt (Fig. 610).

174. Das Zylindroid. Wird von einem durch zwei beliebige Schnitte begrenzten Zylinder die eine der Schnittkurven parallel mit sich selbst vertikal verschoben, so werden aus den Zylindermantellinien die Mantellinien einer windschiefen Fläche. Bei der Verschiebung bewegen sich alle Mantellinien in einer vertikalen Ebene; sie sind also auf der entstandenen Fläche bestimmt durch zwei Leitkurven und eine Richtungsebene. Eine solche Fläche heißt *Zylindroid* (Fig. 611).

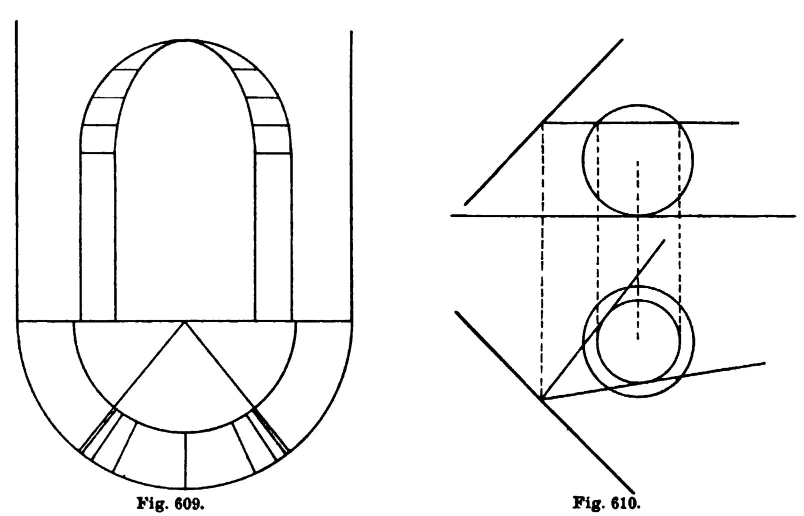


Fig. 609. Fig. 610.

Ein Zylindroid wird beispielsweise als *Leibungsfläche eines Gewölbes* verwendet *zur Unterstützung einer viereckigen Spindeltreppe.* Bei dieser dient eine quadratische Säule als Spindel in der Mitte des quadratischen Treppenhauses. Der vierte Teil eines Gewölbeumgangs wird dann begrenzt von zwei Halbellipsen, die in den Diagonalflächen liegen, und von denen jede folgende um ein konstantes Stück vertikal in die Höhe gerückt ist (Fig. 612).

Die Dimensionen der Ellipse sind derartig, daß sie sich auf die Vertikal- und Seitenrißebene als Kreise projizieren. Die Mantellinien des

Zylindroids sind parallel den vertikalen Treppenhauswänden, ihre Horizontalprojektionen also parallel den Seiten des Grundrißquadrates und können somit leicht eingezeichnet werden. In den Ellipsen hängen die

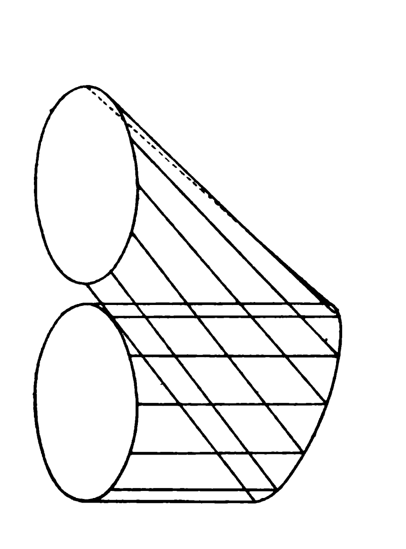


Fig. 611.

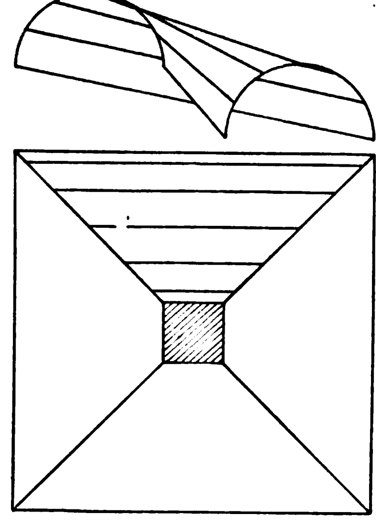


Fig. 612.

Flächenstücke des einen Zylindroids mit Flächenstücken des nächstfolgenden zusammen.

Ein derartiges Gewölbe kann als Modifikation eines schief ansteigenden Tonnengewölbes aufgefaßt werden.

175. Das schiefe Brückengewölbe mit geradlinigen Fugen. Sollen zwei parallele Kurven, z. B. zwei Halbkreise durch ein Gewölbe überspannt werden, wenn die Kämpferlinien nicht senkrecht auf den Stirnflächen stehen, wie es bei *schiefen Brücken oder schiefen Mauerdurchgängen* nicht selten vorkommt, so ist *als Leibungsfläche ein Zylinder dann nicht möglich, wenn die Fugen geradlinig sein sollen.* Denn schneidet man den Zylinder rechtwinklig durch die Ecken des Grundrisses, so hält sich zwar das Mittelstück im Gleichgewicht, weil hier der Druck senkrecht zu den ebenen Fugenflächen wirkt; dagegen üben die beiden Außenstücke einen seitlichen Gewölbeschub aus, dem kein Gegenschub geleistet wird (Fig. 613). Es

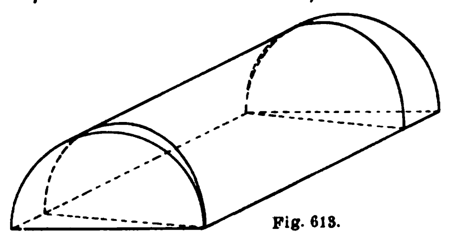


Fig. 613.

müssen daher die Fugen bei Anwendung eines Zylinders krummlinig sein. Wir werden später eine Lösung kennen lernen, bei welcher die Fugenlinien Schraubenlinien und die Fugenflächen Wendelflächen sind.

Das Problem der schiefen Brücke kann aber auch mit geradlinigen Fugen unter Benutzung einer windschiefen Regelfläche gelöst werden. Es kann dann, da zwei Leitkurven durch die beiden Halbkreise gegeben sind, als dritte eine Leitgerade benutzt werden. Diese muß so bestimmt werden, daß die beiden gegebenen Kämpferlinien und die mittlere, zu den Stirnflächen senkrechte Mantellinie, die bekannt ist, durch sie hindurch gehen, und daß der Gewölbedruck nahezu senkrecht zu den Fugenflächen wirkt. Das ist dann der Fall, wenn die Leitgerade senkrecht zu den Stirnflächen durch den Mittelpunkt des Grundrißparallelogramms hindurchgeht. Die mittlere Mantellinie wird von dieser Geraden im Unendlichen geschnitten (Fig. 614).

Die einzelnen Mantellinien sind dann in der Vertikalprojektion leicht zu bestimmen, weil sie alle durch einen Punkt hindurchgehen müssen. Die Fugenflächen sind paraboloidische Flächen.

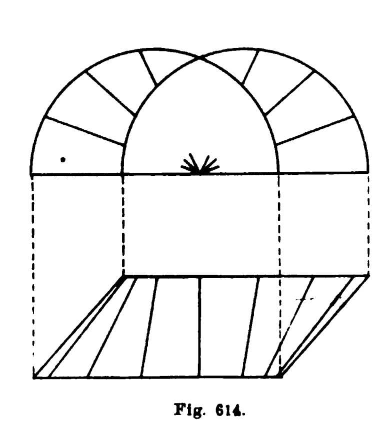


Fig. 614.

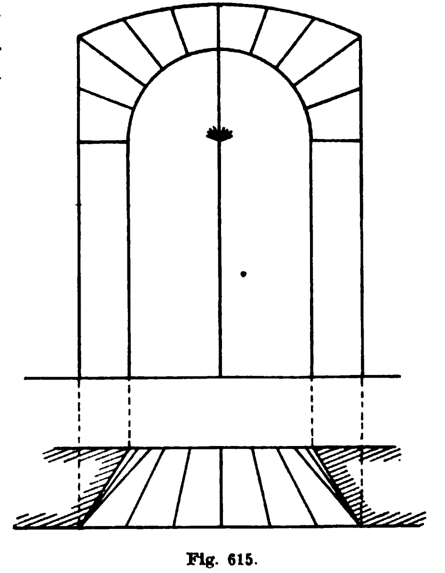


Fig. 615.

176. Der Marseiller Bogen. Beim Marseiller Bogen handelt es sich um einen *Mauereingang mit abgeschrägten Pfeilerwänden,* der hinten durch zwei Flügeltüren mit halbkreisförmigem Kopf so geschlossen ist, daß die Türflügel in den Mauerausschnitt hinein geöffnet werden können. Damit die Türen beim Öffnen in dem Mauerausschnitt Platz haben, muß *die Wölbung sich nach vorne hin erhöhen.* Der vordere Stirnbogen möge ein höher liegender Stichbogen sein; er muß also so hoch liegen, daß das von den Viertels-

kreisen der Türen beschriebene Wulststück darunter Platz hat (Fig. 615). Eine der beiden Leitkurven ist dann ein Halbkreis, die andere eine gebrochene Linie, die aus dem Stichbogen und zwei vertikalen Kanten besteht. Als dritte Leitkurve wählt man am zweckmäßigsten eine Gerade senkrecht zu den Stirnflächen durch den Schnittpunkt der Kämpferlinien. Die Mantellinien sind dann in der Vertikalprojektion leicht zu bestimmen, weil sie alle durch einen Punkt, den Mittelpunkt des Halbkreises, hindurch gehen müssen.

XXIII. Kapitel.

Windschiefe Schraubenflächen.

177. Allgemeine Spiralflächen. Die Spiralflächen werden durch eine Kurve erzeugt, die einer schraubenlinigen Bewegung unterworfen

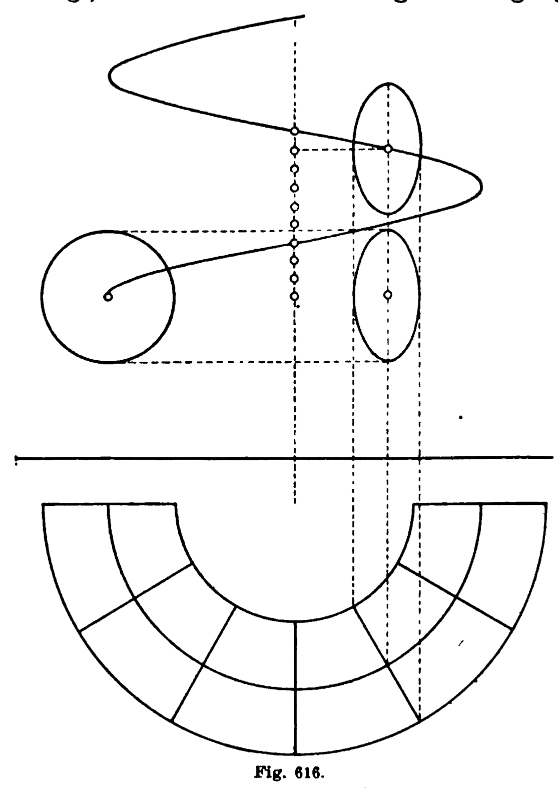


Fig. 616.

wird. Denkt man sich eine Kurve zunächst nur um eine Achse gedreht, so entsteht eine Rotationsfläche; tritt zu der drehenden Bewegung noch gleichzeitig eine fortschreitende, proportional der Drehung und parallel

der Achse, so entsteht eine Spiralfläche. *Zu jeder Spiralfläche gehört also eine Rotationsfläche.* Es ist daher zweckmäßig, wie bei den Rotationsflächen auch bei den Spiralflächen die Achse senkrecht auf der Horizontalebene stehend zu wählen.

Bei der beschriebenen Bewegung *beschreibt jeder Punkt der erzeugenden Kurve eine Schraubenlinie.* Alle Schraubenlinien haben dieselbe Achse und dieselbe Ganghöhe und können daher nicht nur einzeln, sondern auch in ihrer Gesamtheit in sich selbst verschoben werden. Die einzelnen Schraubenlinien unterscheiden sich nur durch ihren Radius.

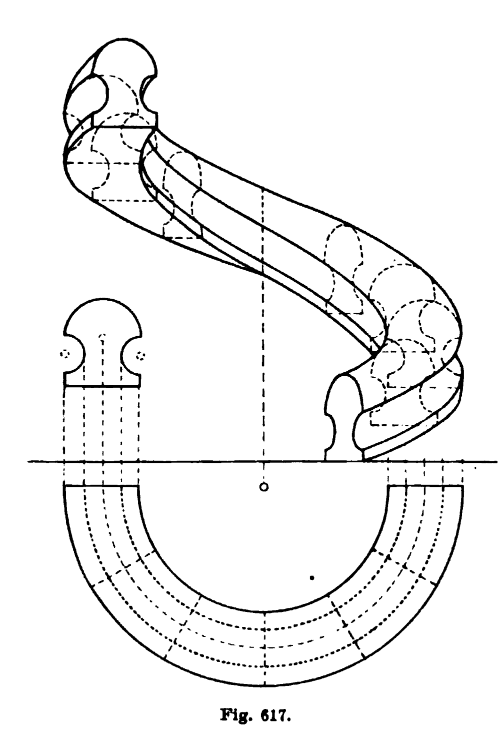


Fig. 617.

Die Kurve, in der die Spiralfläche von einer durch die Achse gehenden Ebene geschnitten wird, heißt *Meridian.* Derjenige Meridian, der parallel der Vertikalebene liegt, heißt *Hauptmeridian*; er projiziert sich in wahrer Gestalt. *Die zu der Spiralfläche gehörende Rotationsfläche hat denselben Meridian wie diese in gleicher Lage zur Achse.* Während aber der Hauptmeridian bei der Rotationsfläche zugleich Umrißlinie ist, ist das bei der Spiralfläche nicht der Fall.

Wie es auf der Rotationsfläche zwei *Systeme von Kurven* — Meridiane und Parallelkreise — gibt, so gibt es auf den Spiralflächen *eine Schar Meridiane und eine Schar Schraubenlinien. Durch jeden Punkt der Fläche geht eine Kurve jeder Schar.*

Soll also in einem Flächenpunkte die *Tangentialebene* bestimmt werden, so legt man durch ihn die Schraubenlinie und den Meridian, an beide Kurven die Tangenten und durch diese die Tangentialebene.

Ist die Meridiankurve die Erzeugende einer Spiralfläche, so gestaltet sich die Darstellung derselben ganz ähnlich wie bei den Rotationsflächen. In der Horizontalprojektion drückt sich die fortschreitende Bewegung längs der Achse, da sich diese als Punkt projiziert, nicht aus. Die Horizontalprojektion der Spiralfläche ist also dieselbe wie diejenige der zugehörigen Rotationsfläche. Soll eine beliebige Lage

der Erzeugenden in der Vertikalprojektion bestimmt werden, so zeichnet man dieselbe zunächst unter Weglassung der fortschreitenden Bewegung, also als Meridian der Rotationsfläche. Erst nachträglich wird derselbe

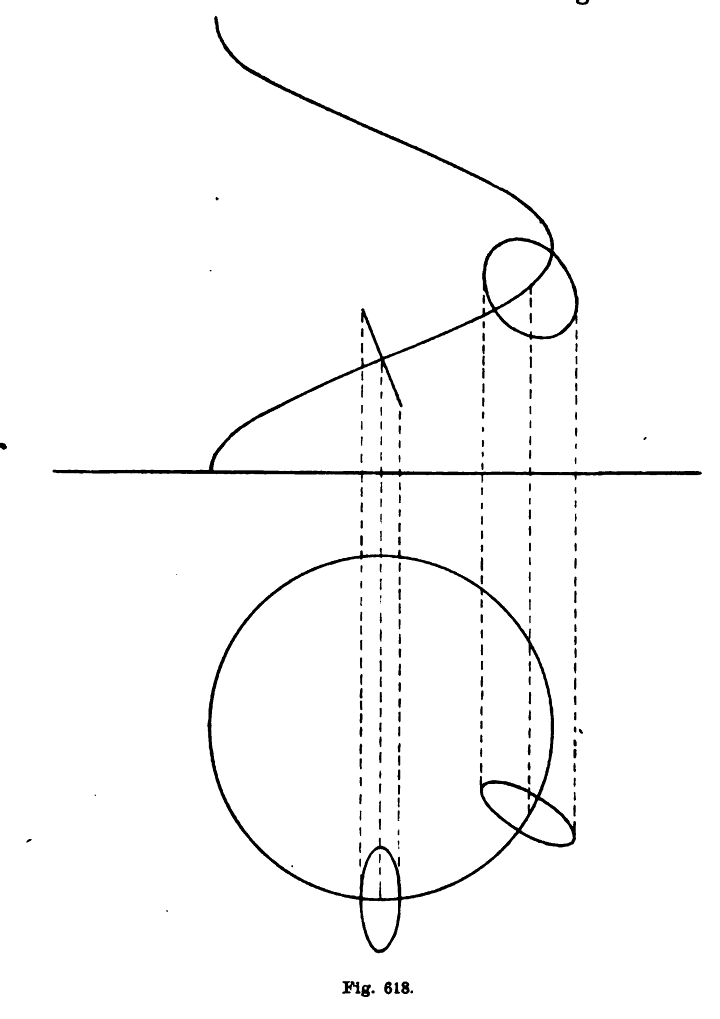


Fig. 618.

vertikal in die Höhe gerückt, und zwar, wenn der Winkel, den er in der Horizontalebene mit dem Hauptmeridian bildet gleich $\frac{m}{n} \cdot 360^0$ ist, um $\frac{m}{n} \cdot h$ (Fig. 616). — Der *Umriß* ist als Umhüllungslinie einzelner Lagen der Erzeugenden zu bestimmen.

Durch den Meridian als Erzeugende bestimmte Spiralflächen kommen bei Schraubengewinden, Treppengeländern (Fig. 617) usw. vor.

Häufig wird statt des Meridians *eine Schnittkurve senkrecht zur Schraubenlinie als Erzeugende* benutzt. Ist dieselbe ein Kreis, so entsteht *die Serpentine* oder das Schlangenrohr (Fig. 618).

Die Horizontalprojektionen des Kreises sind in allen Lagen kongruente

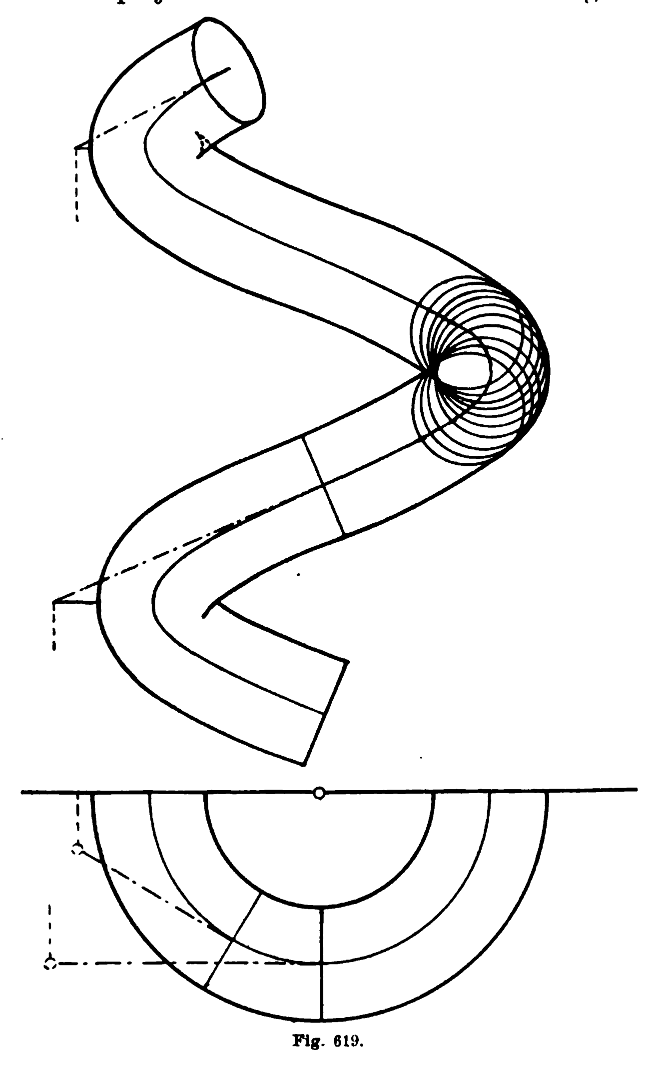
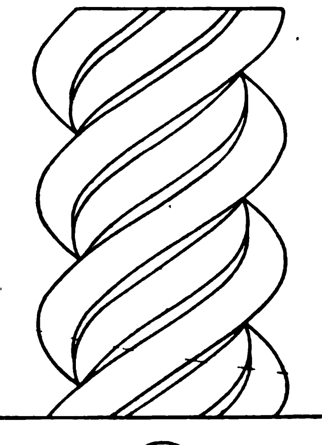


Fig. 619.

Ellipsen, weil alle Kreisebenen denselben Neigungswinkel haben. Bei der Herstellung der Vertikalprojektion einzelner Kreislagen geht man am besten von derjenigen Lage aus, bei welcher die Kreisebene senkrecht auf der Vertikalebene steht, der Kreis sich also als gerade Linie projiziert. Sollen bei einem Umgang zwölf Lagen in gleichen Abständen

gezeichnet werden, so liegt bei der nächsten Lage jeder Punkt um $^1/_{12} \cdot h$ höher.

Der Umriß wird als Umhüllungslinie der einzelnen Lagen bestimmt. Handelt es sich nur um die Bestimmung des Umrisses, so ist dieser einfacher zu erhalten, wenn man dieselbe Fläche dadurch erzeugt, daß man *eine Kugel als Erzeugende* benutzt. Er wird dann als Umhüllung von Kreisen erhalten, deren Mittelpunkte auf der Schraubenlinie liegen, die der Kugelmittelpunkt erzeugt (Fig. 619). Der Umriß zeigt ähnliche Überschneidungen, wie sie bereits bei Rotationsflächen hyperbolischer Krümmung beobachtet wurden. In einem Rückkehrpunkte wird er unsichtbar, um erst nach einem zweiten Rückkehrpunkte, und nachdem er sich selbst geschnitten hat, wieder sichtbar zu werden.



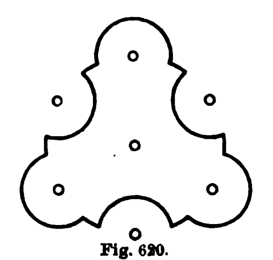


Fig. 620.

In ähnlicher Weise, wie die entwickelbare Schraubenfläche dadurch sich erzeugen ließ, daß ihre Schnittkurve mit einer Ebene senkrecht zur Achse, die Kreisevolvente, einer schraubenlinigen Bewegung unterworfen wurde, können auch alle Spiralflächen erzeugt werden. Die Kurve, in der eine Spiralfläche durch eine Ebene senkrecht zur Achse geschnitten wird, heißt ihre *Basiskurve.* Auch sie kann *als Erzeugende* benutzt werden. Ist dieselbe ein Kreis, so entsteht eine gewundene Säule, wie sie beim Barock häufig zur Anwendung gelangt. Kompliziertere Kurven erzeugen kompliziertere Flächen (Fig. 620).

178. Die geschränkte oder offene Schraubenfläche. Ist die Erzeugende einer Spiralfläche eine gerade Linie, so entsteht eine *windschiefe Schraubenfläche.* Schneidet die Erzeugende die Schraubenachse nicht, so heißt die Fläche *geschränkte oder offene Schraubenfläche.* Schneidet die erzeugende gerade Linie die Achse, so entsteht die *axiale oder geschlossene Schraubenfläche.*

Die geschränkte Schraubenfläche ist bestimmt, wenn der kürzeste Abstand der Erzeugenden von der Achse, der *Kehlhalbmesser,* — der Winkel, den die Erzeugende mit der Achse bildet, *der Anlagewinkel* — und die *Ganghöhe* der Schraube gegeben sind.

Die zugehörige Rotationsfläche ist das hyperbolische Hyperboloid.

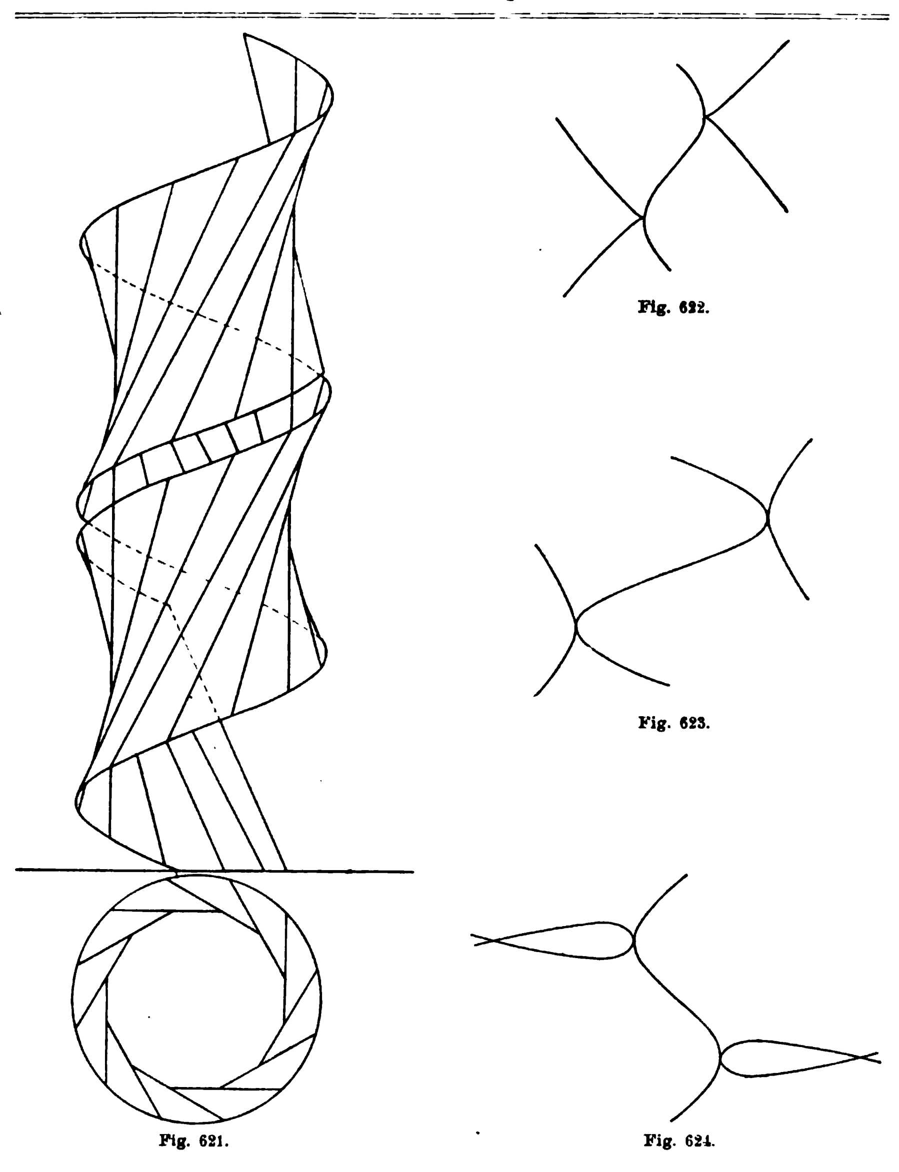


Fig. 621.

Fig. 622.

Fig. 623.

Fig. 624.

Bei der *Konstruktion einzelner Mantellinien* der geschränkten Schraubenfläche geht man daher auch von diesem aus, analog dem Verfahren bei den allgemeinen Spiralflächen, und rückt jede einzelne Mantellinie nachträglich um ein dem zugehörigen Drehungswinkel proportionales Stück in die Höhe. Um *ein plastisches Bild* von der Fläche zu erhalten, begrenzt man ein Stück der Fläche dadurch, daß man von der Kehlschraubenlinie aus, die vom Endpunkt des Kehlhalbmessers beschrieben

wird und Striktionslinie ist, auf allen Mantellinien gleiche Stücke nach beiden Seiten abschneidet. Eine solche Flächenzone kann am einfachsten gezeichnet werden, wenn man zuerst die beiden abschließenden Schraubenlinien konstruiert und zwischen diese die Erzeugende in verschiedenen gleich weit voneinander entfernten Lagen — etwa 12 bei einem Umgang — einzeichnet (Fig. 621).

Denkt man sich *die Fläche in unendlicher Ausdehnung*, so besitzt sie schraubenlinige Selbstdurchschnitte in derselben Weise wie die abwickelbare Schraubenfläche. Soll nur das Stück bis zum ersten Selbstdurchschnitt gezeichnet werden, so geht man wieder am besten von diesem aus und verfährt im übrigen ähnlich wie in Fig. 621.

Die *Meridiankurve* hat je nach der Größe des Anlagewinkels verschiedene Typen. Ist der Anlagewinkel gleich dem Komplement des Steigungswinkels der Kehlschraubenlinie, so fallen die Erzeugenden in jeder Lage mit den Tangenten der Kehlschraubenlinien zusammen. Man hat dann den *speziellen Fall der entwickelbaren Schraubenfläche.* Die Meridiankurve hat in diesem Fall einen *Rückkehrpunkt* (Fig. 622). Ist der Anlagewinkel kleiner, so hat sie einen *Scheitelpunkt* (Fig. 623), ist er größer, eine *Schleife* (Fig. 624). Jeder Kurvenzweig hat zwei *Asymptoten*.

Die *Basiskurve* ist die allgemeine Kreisevolvente, jedoch sind die Tangenten in den einzelnen Punkten nur bei der entwickelbaren Schraubenfläche gleich den rektifizierten Bogenstücken; bei der allgemeinen geschränkten Schraubenfläche sind sie den Bogenstücken nur proportional.

179. Die axiale oder geschlossene Schraubenfläche. *Eine axiale oder geschlossene Schraubenfläche* wird von einer Geraden erzeugt, die einer schraubenförmigen Bewegung unterworfen wird, wenn dieselbe die Achse schneidet. Sie *ist als Spezialfall der geschränkten Schraubenfläche zu betrachten*, und aus dieser dadurch entstanden, daß der Kehlhalbmesser gleich Null geworden ist. Daher *ist* sie *bestimmt* durch die *Ganghöhe* der Schraubenlinie und den Winkel, den die Erzeugende mit der Achse bildet — den *Anlagewinkel.*

Die zugehörige Rotationsfläche ist der Kegel. Bei der *Konstruktion einzelner Mantellinien* geht man daher auch von diesem aus und rückt erst nachträglich jede einzelne Mantellinie um ein dem zugehörigen Drehungswinkel proportionales Stück in die Höhe.

Das Erzeugungsgesetz der geschlossenen Schraubenfläche *kann mannigfaltig ausgedrückt werden.* Bewegt sich z. B. eine Gerade so, daß sie eine Schraubenlinie und ihre Achse ständig schneidet, und zwar die letz-

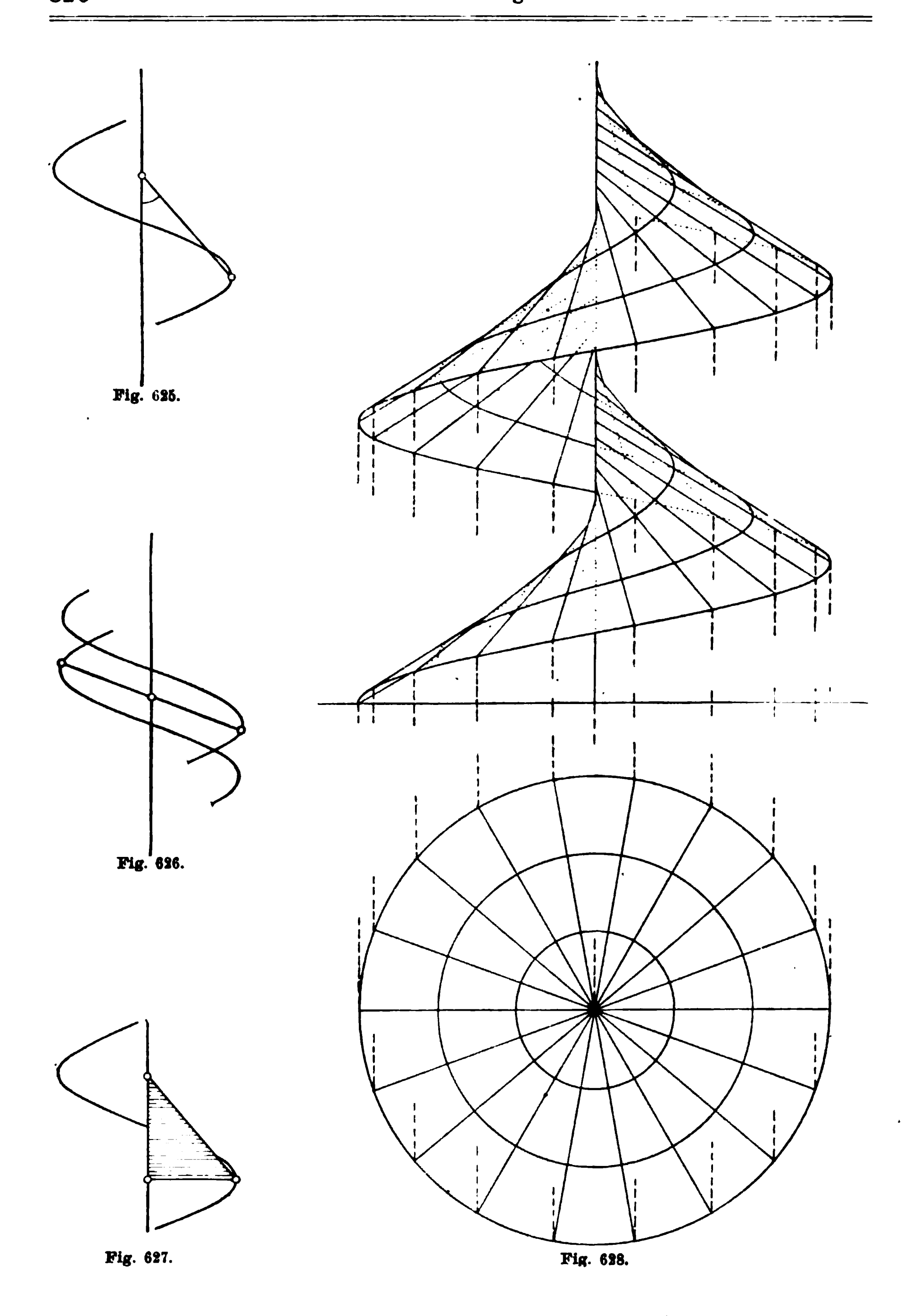


Fig. 625.

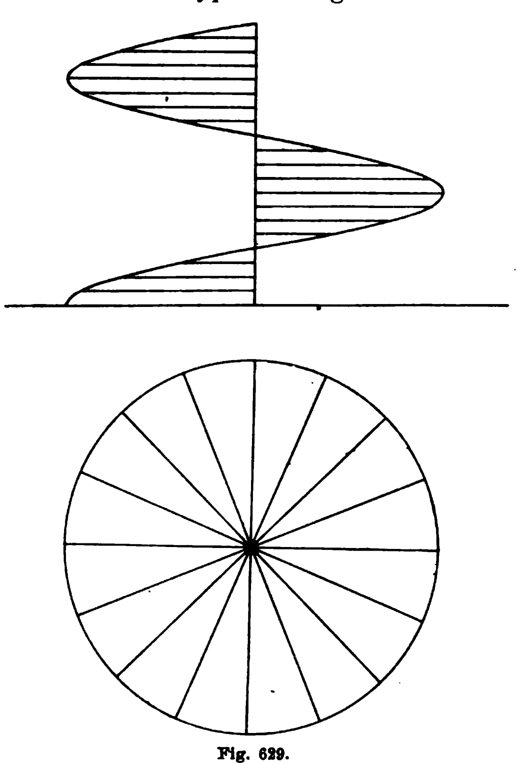
Fig. 626.

Fig. 627.

Fig. 628.

tere unter konstantem Winkel, so beschreibt sie eine axiale Schraubenfläche (Fig. 625). Auch durch zwei konaxiale Schraubenlinien und ihre gemeinsame Achse als Leitlinien einer Geraden, die ständig beide Schraubenlinien und die Achse schneidet, ist eine axiale Schraubenfläche bestimmt (Fig. 626). Dreht sich ein rechtwinkliges Dreieck um eine Kathete als Achse und verschiebt sich diese gleichzeitig längs der Achse, proportional mit der Drehung, so beschreibt die Hypotenuse gleichfalls eine geschlossene Schraubenfläche (Fig. 627). Die zuerst angegebene Erzeugungsweise ist die einfachste.

Um *eine plastische Darstellung* der Fläche zu erhalten, konstruiert man etwa nur das Stück der Fläche, das man erhält, wenn man auf allen Mantellinien von der Achse aus gleiche Stücke abschneidet, oder wenn man das Stück zeichnet, das von zwei auf der Fläche liegenden konaxialen Schraubenlinien begrenzt wird (Fig. 628). Solche Zonen sind es auch, die bei in der Praxis verwendeten Schrauben benutzt werden.


Fig. 629.

Um bei der Konstruktion der einzelnen Mantellinien dieselben Teilpunkte auf der Achse benutzen zu können, die zur Konstruktion der Schraubenlinie erforderlich waren, und um eine hübsche Figur zu erhalten, wählt man den Anlagewinkel so, daß die axiale Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks kommensurabel mit der Ganghöhe ist, und daß, wenn die horizontale Kathete in der Grundebene liegt, die Hypotenuse durch einen Teilpunkt der Achse hindurchgeht. Man hat dann zur Konstruktion der Mantellinien nur die aufeinander folgenden Schraubenlinienpunkte, die von der kreisförmigen Horizontalprojektion aus bestimmt werden, mit den entsprechenden aufeinanderfolgenden Achsenteilpunkten zu verbinden. Bei der Teilung des Kreises ist zu vermeiden, daß ein Teilpunkt in den vordersten oder hintersten Kreispunkt hineinfällt, da sonst die Vertikalprojektion der zugehörigen Mantellinie in die Achse hineinfallen würde, wodurch das plastische Bild der Fläche litte. Der *Umriß* der

Fläche wird als Umhüllungslinie der Mantellinien bestimmt. Ist der Anlagewinkel einer axialen Schraubenfläche gleich 90°, so heißt dieser spezielle Fall derselben axiale Wendelfläche (Fig. 629). Um eine plastische Vorstellung der Fläche zu erhalten, begrenzt man die einzelnen Mantellinien durch eine auf der Fläche liegende Schraubenlinie.

180. Tangentialaufgaben für die axiale Schraubenfläche. Um die *Tangentialebene eines Flächenpunktes* zu bestimmen, legt man durch diesen die Mantellinie und die Schraubenlinie, bestimmt die Tangente an die letztere und legt durch beide Geraden eine Ebene hindurch. Liegt

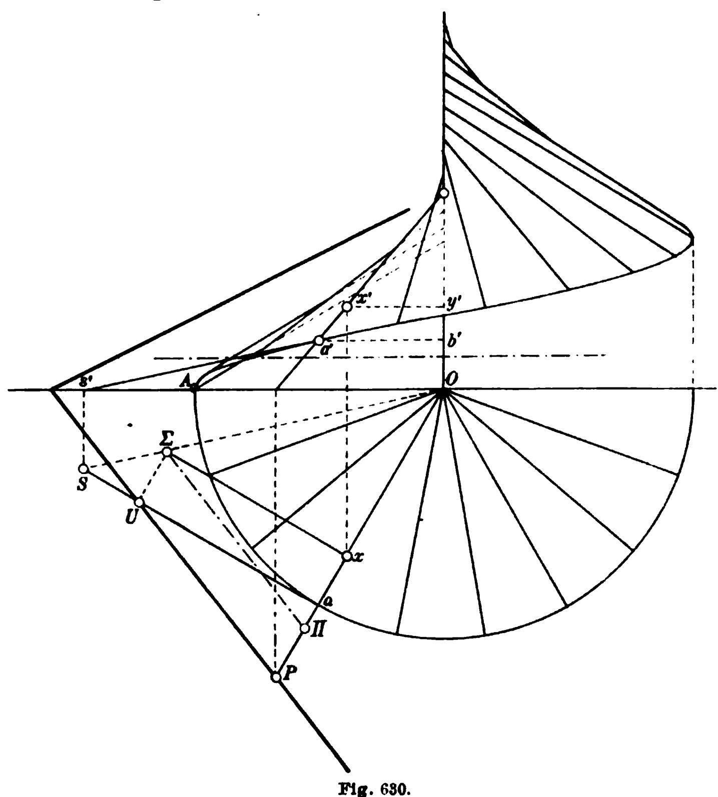


Fig. 630.

der betreffende Punkt auf der schon gezeichneten Leitschraubenlinie, so ist die Konstruktion einfach. Die Spur der Tangentialebene geht dann durch die Spuren P der Mantellinie und S der Tangente (Fig. 630). *Liegt der Flächenpunkt nicht auf der Leitschraubenlinie* und auch nicht auf einer bereits gezeichneten konaxialen Schraubenlinie, so müßte eine solche zunächst konstruiert werden. Doch kann man die Zeichnung der-

selben auch durch folgende Überlegung umgehen. Ist X der Flächenpunkt, in dem die Tangentialebene konstruiert werden soll, und A derjenige Punkt der durch X gehenden Mantellinie, der auf der Leitschraubenlinie liegt, so ziehe man zunächst $x'y'$ und $a'b'$ senkrecht zur Achse. Denkt man sich nun die durch X gehende Schraubenlinie gezeichnet und die Mantellinie OA so weit zurückgeschraubt, bis sie parallel der Vertikalebene liegt, A also nach A_0 fällt, und sei die Horizontalebene durch A_0 gelegt, so liegt der Punkt X um das Stück $b'y'$ über der letzteren. Durch diese Lage von X legt man nunmehr eine Hilfshorizontalebene, deren Höhe also über der ursprünglichen durch das Stück $b'y'$ gegeben ist, und konstruiert zunächst in dieser die Spur der Tangentialebene in X. Die Spur Σ der in X gezogenen Tangente der Schraubenlinie wird in der Hilfshorizontalebene auf OS durch eine Parallele durch x zu aS bestimmt. Die Mantellinienspur Π wird auf OP dadurch ermittelt, daß $P\Pi = ax$ gemacht wird. Dann ist $\Pi\Sigma$ die Spur der Tangentialebene in der Hilfshorizontalebene. Um sie auch in der ursprünglichen zu erhalten, hat man nur noch durch P die Parallele zu $\Pi\Sigma$ zu ziehen. Die Vertikalspur der Tangentialebene geht durch die Vertikalspur der Mantellinie.

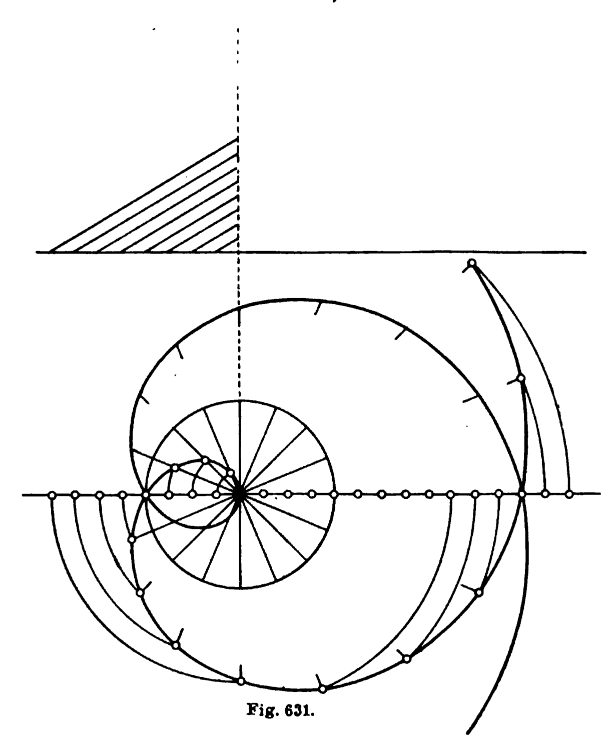
Diese Konstruktion liefert zugleich ein *Mittel, um für eine beliebige durch eine Mantellinie gelegte Tangentialebene, den Berührungspunkt X zu bestimmen.* Da nämlich $P\Pi = ax$ ist, so ist das Dreieck $\Pi\Sigma x$ kongruent dem Dreieck PUa, wenn U der Schnittpunkt von Sa mit der Horizontalspur der Tangentialebene ist; daher ist $U\Sigma$ parallel PO. Um also den Berührungspunkt X einer beliebigen Tangentialebene, die durch die Mantellinie OP geht, deren Spur also beliebig durch P gelegt ist, zu bestimmen, hat man nur die Spur S der Tangente in A zu ermitteln, durch den Schnittpunkt U derselben mit der Tangentialebenenspur eine Parallele zu PO zu ziehen, die OS im Punkte Σ trifft, und durch Σ endlich eine Parallele zu Sa zu zeichnen, die den Punkt x auf OP bestimmt.

Nunmehr läßt sich auch der *Berührungskegel* von einem Punkte aus an die Fläche und der *Berührungszylinder* parallel einer gegebenen Geraden legen. Man hat nur eine Reihe von Ebenen durch den gegebenen Punkt, bzw. parallel der gegebenen Geraden und durch einzelne Mantellinien zu legen. Die nach der letzten Konstruktion zu bestimmenden Berührungspunkte dieser Tangentialebenen bestimmen die Berührungskurve des Kegels, bzw. des Zylinders. *Alle Tangentialebenen in den Punkten einer Schraubenlinie der Fläche haben denselben Horizontalneigungswinkel*; denn läßt man einen Punkt eine Schraubenlinie durchlaufen,

so schraubt sich die von der durch diesen Punkt gehenden Mantellinie und der Tangente gebildeten Ebene mit. Zerlegt man diese Bewegung in eine fortschreitende und drehende, so wird bei der ersteren die Ebene parallel verrückt, bei der letzteren die Ebene um die Schraubenachse gedreht. Beide Male ändert sich aber der Winkel, den die Ebene mit der Achse bildet, nicht. Dieser ist aber das Komplement des Horizontalneigungswinkels der Tangentialebene.

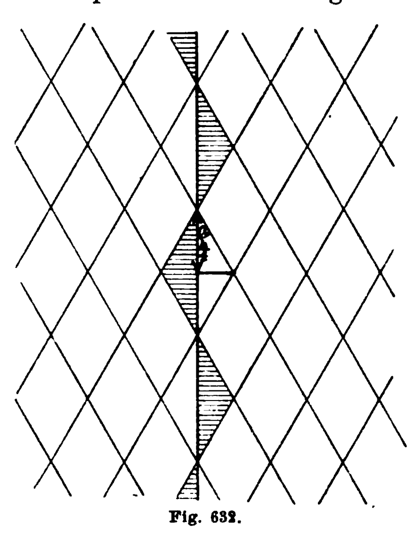
Daher haben auch *alle Flächennormalen längs einer Schraubenlinie gleichen Horizontalneigungswinkel.*

181. Die axiale Schraubenfläche in unendlicher Ausdehnung und die Kernschraube. Verlängert man sämtliche Mantellinien einer axialen Schraubenfläche, bei welcher der Anlagewinkel kleiner als 90° ist, nach abwärts, so erhält man ein Flächengebilde, das sich in unendlich vielen zeltartigen Windungen, eine über die andere geschachtelt, um die Achse herumwindet. Die Horizontalspuren aller Mantellinien bestimmen dabei die *Basiskurve* der Fläche. Dieselbe ist *eine archimedische Spirale,* denn das Wachstum des Radius ist proportional mit der erhebenden Bewegung. Diese aber ist wieder proportional mit der drehenden Bewegung. Es ist also der Radiusvektor proportional dem Argument: $r = c \cdot \varphi$. Zur *Konstruktion der archimedischen Spirale* geht man zweckmäßig von derjenigen Lage der Mantellinie aus, die parallel zur Vertikalebene ist. Zieht man durch die einzelnen Achsenteilpunkte zu dieser Mantellinie Parallelen, so bestimmen diese auf der Projektionsachse die Radienlängen von $^1/_{12}$ zu $^1/_{12}$ Drehung, wenn die Ganghöhe in 12 Teile geteilt ist (Fig. 631).


Fig. 631.

Verlängert man die einzelnen Mantellinien auch nach der anderen Richtung über die Achse hinaus, so erhält man einen nach aufwärts gestülpten *zweiten Mantel der Fläche,* der dem ersten kongruent ist. Die Achse ist für die Gesamtfläche Striktionslinie.

Die beiden Mäntel durchschneiden sich gegenseitig in unendlich vielen Schraubenlinien, deren gegenseitige Lage leicht zu übersehen ist, wenn man den vollständigen Meridian der Kurve herstellt (Fig. 632). Derselbe entsteht dadurch, daß man alle in der Hauptmeridianebene liegenden Mantellinien verlängert. Man erhält dadurch ein rautenförmiges Netz gerader Linien. Denkt man sich dieses Netzwerk einer schraubenlinigen Bewegung unterworfen, so beschreiben die einzelnen Schnittpunkte der Geraden die einzelnen Schnittschraubenlinien, in denen sich die Fläche selbst durchschneidet. Damit ist die Konstruktion der einzelnen Schnittkurven, besonders auch der innersten, gegeben. Es sind konaxiale Schraubenlinien, deren Ganghöhe übereinstimmt mit der Ganghöhe der Leitschraubenlinie, und deren Radius aus dem Anlagewinkel und der Ganghöhe leicht ermittelt werden kann.


Fig. 632.

Der Radius der innersten Schnittschraubenlinie ist gleich der Höhe eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Basis gleich der halben Ganghöhe und dessen Basiswinkel gleich dem Anlagewinkel ist.

Derjenige Teil der Fläche, den man erhält, wenn man dieselbe durch den ersten Selbstdurchschnitt begrenzt, heißt *Kernschraubenfläche* und ist ein korkzieherartiges Gebilde (Fig. 633). Dieselbe wird am einfachsten dadurch dargestellt, daß man ausgeht von der Schnittschraubenlinie und diese als Leitlinie für eine Gerade derart benutzt, daß die Erzeugende die Schraubenlinie zweimal und außerdem die Achse schneidet. *Der Umriß* wird durch Umhüllung der Erzeugenden bestimmt. Er hat die Hauptmeridianlinien zu Asymptoten und *ist in einiger Entfernung von der Achse* nur sehr wenig gekrümmt, ist also dort *von einer Geraden sehr wenig verschieden.* Diese Bemerkung ist für das Zeichnen von in der Praxis vorkommenden Schraubenbolzen von Wichtigkeit (vgl. den nächsten Paragraphen). — *Die Basiskurve* wird von der Schleife einer archimedischen Spirale gebildet. Die Kernschraubenfläche kann also auch,

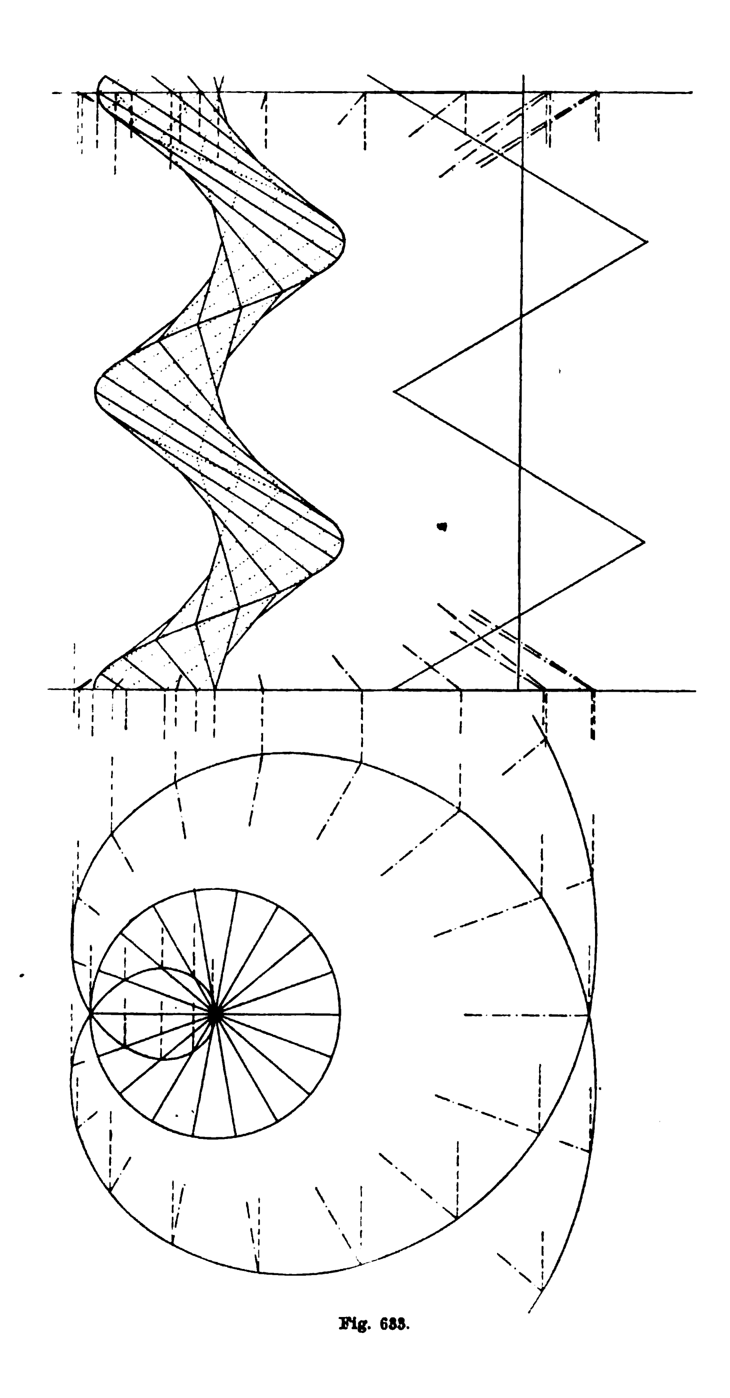
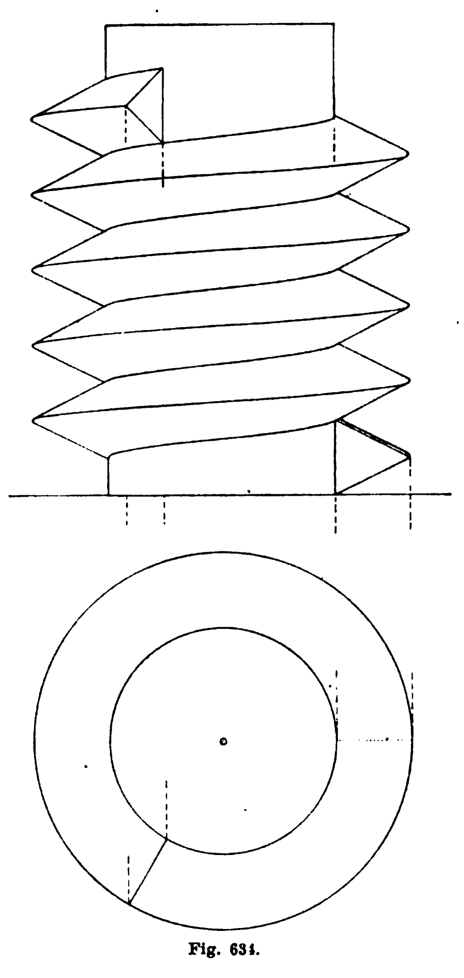


Fig. 683.

wenn man sie als gewundene Säule auffaßt, dadurch erzeugt werden, daß man die Spirale einer schraubenlinigen Bewegung unterwirft.

182. Die scharfgängige Schraube. In der Praxis werden zu Schraubengebilden vorzugsweise axiale Schraubenflächen verwendet.

Denkt man sich ein gleichschenkliges Dreieck, dessen vertikale Grundlinie gleich der Ganghöhe einer Schraubenlinie ist, so einer schraubenlinigen Bewegung unterworfen, daß die Endpunkte der Grundlinie auf der Schraubenlinie entlang gleiten, während die Ebene des Dreiecks ständig durch die Schraubenachse geht, so beschreibt das Dreieck einen *scharfgängigen Schraubenbolzen.* Die Grundlinie des Dreiecks bewegt sich dabei auf einem Zylinder, der die *Spindel des Bolzens* heißt (Fig. 634). Jeder Schenkel des Dreiecks beschreibt *eine Zone einer besonderen axialen Schraubenfläche.* Beide Schraubenflächen schneiden sich in der von der Spitze des Dreiecks beschriebenen Schraubenlinie, deren Ganghöhe gleich der Ganghöhe der Leitschraubenlinie ist.


Fig. 634.

Zur *Konstruktion des scharfgängigen Schraubenbolzens* zeichnet man zunächst die beiden Schraubenlinien. Der Umriß der beiden Schraubenflächen, die den Bolzen bilden, ist eigentlich krummlinig, wie aber am Schluß des vorigen Paragraphen bemerkt wurde, nur wenig von einer geraden Linie verschieden und kann daher durch die gemeinschaftliche Tangente ersetzt werden. An den äußeren Ecken des Umrisses bilden sich daher keine Spitzen aus, wie man es so häufig auf Abbildungen sieht, sondern zwischen zwei dort zusammenlaufenden Tangenten befindet sich ein kleines Bogenstück der äußeren Schraubenlinie. Ebenso setzen an den inneren Ecken die beiden dort zusammenlaufenden geraden Linien

nicht beide eckig auf die Schraubenlinie auf, sondern die eine geht berührend in die Schraubenlinie über und wird von der anderen in einem

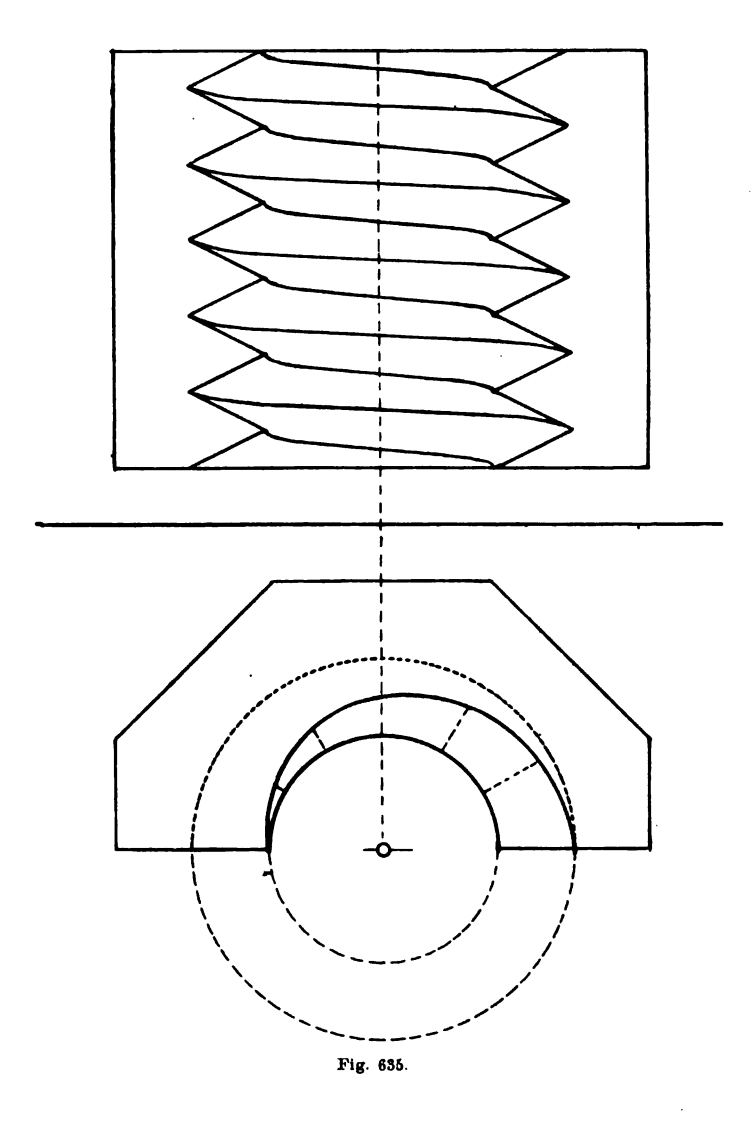


Fig. 635.

Punkte getroffen, der nicht auf dem Umriß der zylindrischen Spindel liegt, sondern etwas außerhalb davon.

Eine *mehrfache Schraube* erhält man, wenn die Grundlinie des erzeugenden Dreiecks gleich $^1/_2$, $^1/_3$ usw. der Ganghöhe ist.

Bei dem in der Praxis gewöhnlich verwendeten *Witwortschen*

Schraubensystem ist der Kantenwinkel gleich 55°. Die einspringenden und ausspringenden Schärfen sind etwas abgerundet.

Dreht man aus einem massiven Körper ein schraubenbolzenförmiges Stück heraus, so heißt der Restkörper *Schraubenmutter*. Er ist also ein körperlicher Abdruck — eine Matrize — des Schraubenbolzens. Ist die Hälfte einer scharfgängigen Schraubenmutter, die durch einen Achsenschnitt erhalten wird, zu zeichnen, so gilt für diese das über die Umrißecken des Bolzens Gesagte natürlich nicht. Hier handelt es sich vielmehr um einen Hauptmeridianschnitt der durch ein Aneinanderreihen des erzeugenden Dreiecks gebildet wird (Fig. 635).

183. Die flachgängige Schraube. Wird ein Rechteck, dessen vertikale Seite gleich der halben Ganghöhe einer Schraubenlinie ist, derartig einer schraubenlinigen Bewegung unterworfen, daß der eine Endpunkt der vertikalen Seite auf der Schraubenlinie entlang gleitet, während die Ebene des Rechtecks ständig durch die Achse geht, so entsteht ein *flachgängiger Schraubenbolzen*. Derselbe besteht aus dem Schraubenzylinder als *Spindel*, zwei Zonen zweier kongruenter *Wendelflächen*, die von den beiden wagrechten Seiten des Rechtecks beschrieben werden, und aus einem Stücke eines konaxialen *Zylinders*, das von der äußeren vertikalen Seite des Rechtecks bestimmt wird (Fig. 636).

Zur *Konstruktion des flachgängigen Schraubenbolzens* zeichnet man die vier von den Ecken des Rechtecks beschriebenen Schraubenlinien, von denen je zwei kongruent und um eine halbe Ganghöhe verschoben sind. Alle vier Schraubenlinien haben gleiche Ganghöhe.

Die durch einen axialen Schnitt erhaltene Hälfte der zugehörigen *Schraubenmutter* bietet ebenfalls keine Schwierigkeit (Fig. 637). Sie kann auch aufgefaßt werden als ein halber Hohlzylinder, in den eine Reihe von *schraubenförmig gewundenen Prismen* hineingelegt sind (Fig. 638).

Zu *Wasserschrauben* benutzt man häufig flachgängige Schraubenbolzen mit einer dünnen Spindel und einem langgestreckten Rechteck als Erzeugende (Fig. 639). Um die Reibung mit dem Wasser zu verringern, werden aus einer solchen Schraube einzelne Stücke von der bekannten Gestalt eines Schraubenflügels herausgeschnitten; die einzelnen Flügel werden außerdem längs der Spindel verrückt, so daß die Mittellinie derselben durch einen Punkt der Achse geht. — Bei der Schiffsschraube werden auch axiale Schraubenflächen benutzt, bei denen der Anlagewinkel kleiner als 90° ist. Es ist dann nur die durch den Wasserdruck beanspruchte Seite des Schraubenflügels eine Schrauben-

fläche, während die andere Seite des Flügels durch geeignete Verstärkung der Schraubenfläche erhalten wird. — Auch leicht gekrümmte Linien werden als Erzeugende von Schiffsschraubenflächen verwendet.

Auch für *Wendeltreppen* ist die Grundform der flachgängige Schrau-

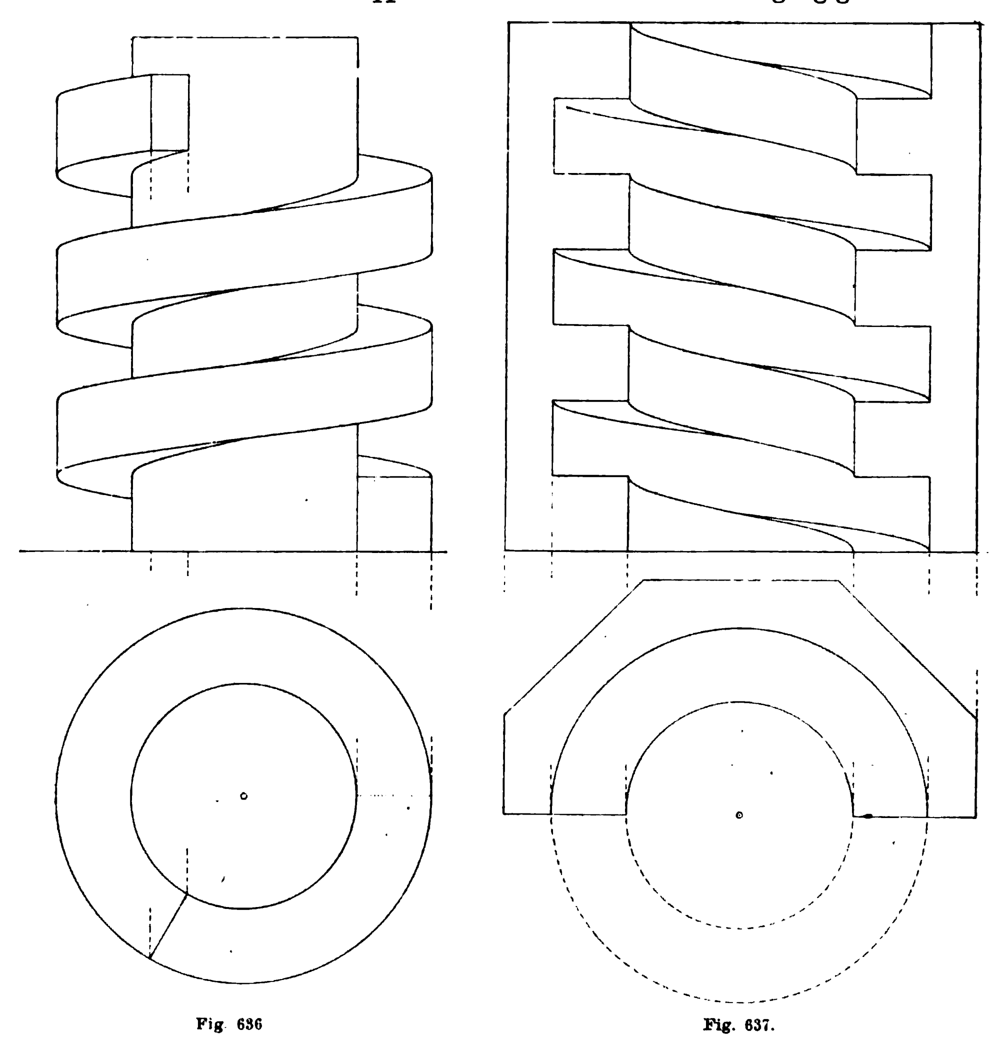


Fig. 636 Fig. 637.

benbolzen. Der äußere Zylinder des Bolzens ist bald frei, bald haftet er an der Innenwand des zylindrischen Treppenhauses. Der innere Zylinder ist bald auf einer Spindel befestigt, bald frei.

Von den wendelflächigen Zonen kommt nur die untere voll zur Anwendung, während die obere durch Einschneiden der Treppen ausge-

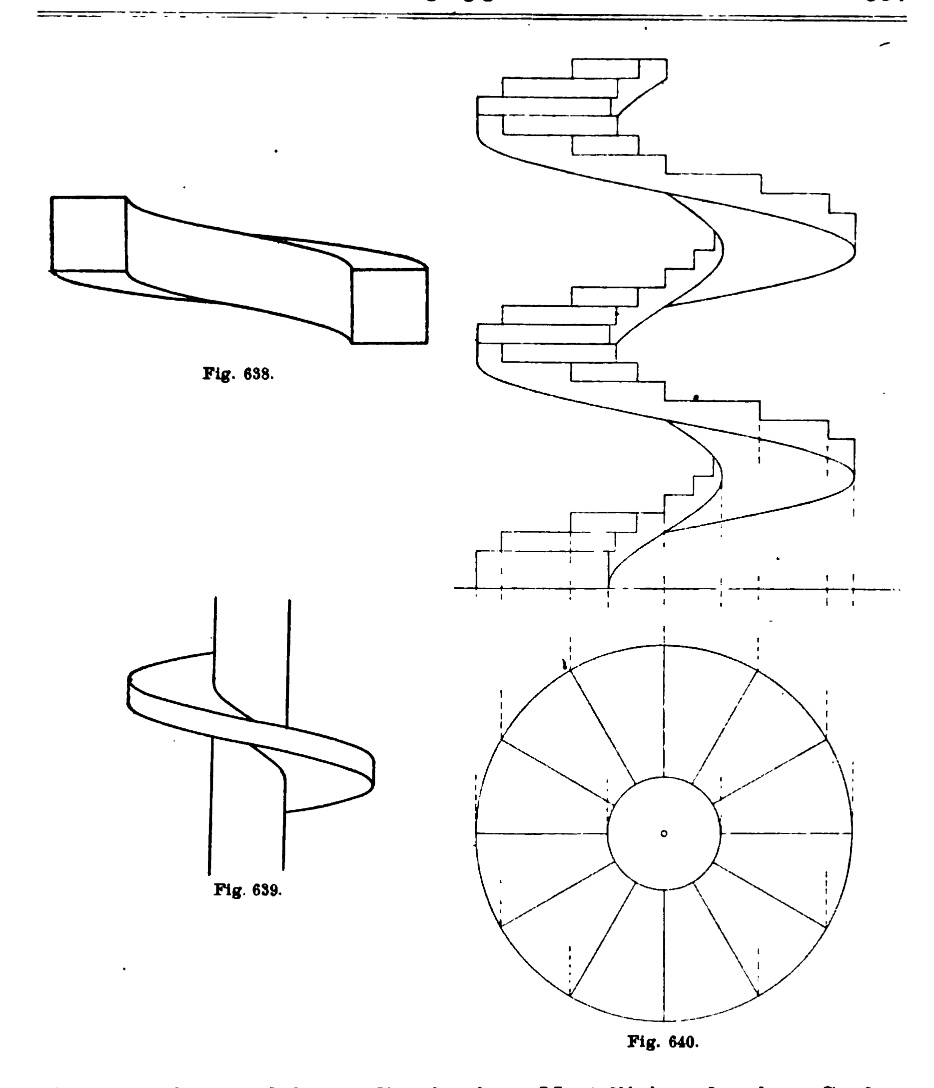


Fig. 638.

Fig. 639.

Fig. 640.

schnitten wird, so daß nur die einzelnen Mantellinien als obere Stufenkanten bleiben. Durch diese gehen die horizontalen und vertikalen Schnitte (Fig. 640).

184. Das schiefe Brückengewölbe mit wendelflächigen Fugenflächen. Das Problem der schiefen Brücke wurde bereits in § 175 durch eine windschiefe Regelfläche mit geradlinigen Fugen gelöst. Die Leibungsfläche einer windschiefen Brücke kann auch als Kreiszylinder ausgebildet werden. Es können jedoch dann die Mantellinien desselben

nicht als Fugen benutzt werden, wie bereits in § 175 gezeigt wurde. Dieselben müssen vielmehr, da sie auf den Stirnkurven aus Stabilitätsgründen annähernd senkrecht stehen sollen, krummlinig sein. Natürlich

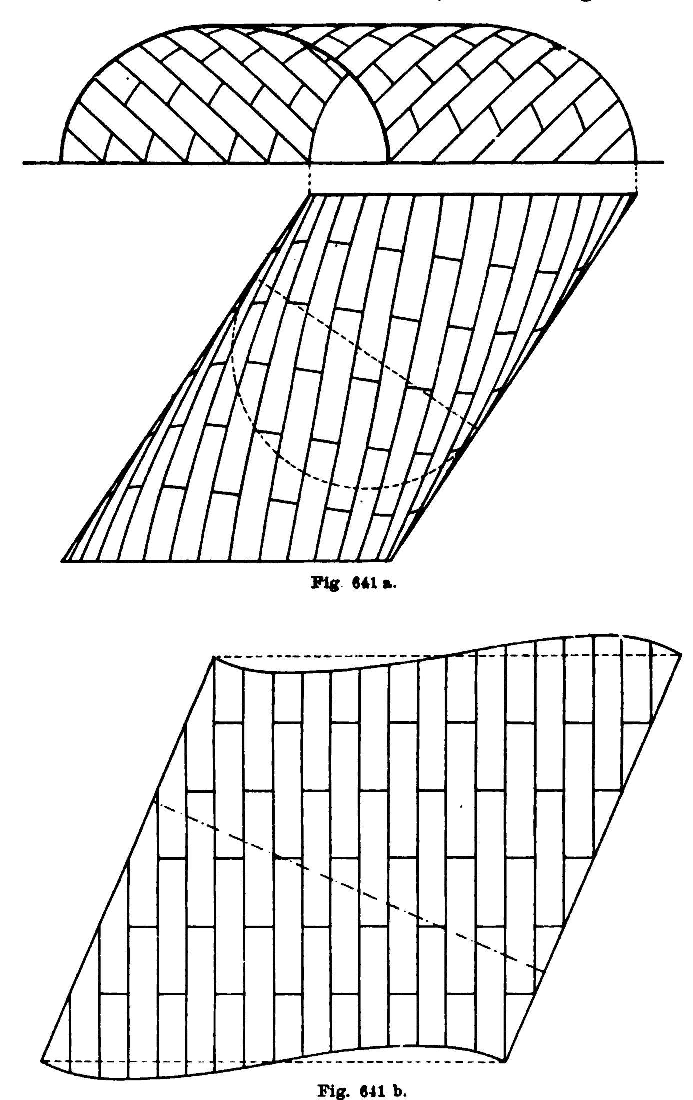


Fig. 641 a.

Fig. 641 b.

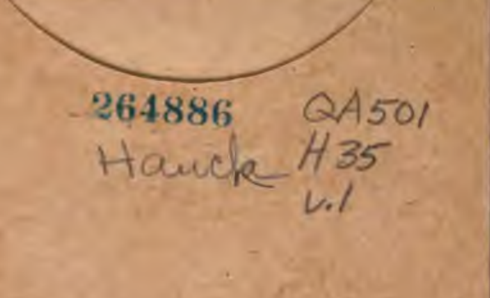
wird man möglichst einfache *Fugenkurven* wählen. Das sind aber vor allem *Schraubenlinien*, weil diese auf dem Zylinder geodätische Linien und daher auf dem abgewickelten Zylindermantel sehr leicht als gerade Linien zu zeichnen sind (Fig. 641).

Die Schraubenlinien sind auf dem Zylindermantel in dessen Abwicklung so einzutragen, daß sie auf den Stirnkurven nahezu senkrecht stehen. Es geschieht das dadurch, daß man die Endpunkte der abgewickelten Stirnkurven, die als schwachgekrümmte Kurven erscheinen, miteinander verbindet und senkrecht zu diesen Verbindungslinien die Lagerfugen geradlinig zieht (Fig. 641). Legt man den Mantel wieder auf das Gewölbe, so werden die geraden Linien zu Schraubenlinien, und die Fugenflächen werden durch die einzelnen Normalen der Schraubenlinie bestimmt. Jede Normale schneidet aber die Zylinderachse und damit auch die Achse aller Schraubenlinien rechtwinklig. Daher bilden alle Normalen eine axiale Wendelfläche. *Die Fugenflächen sind* somit, wenn ein schiefes Gewölbe von einem Kreiszylinder gebildet wird, *als axiale Wendelflächen* zu konstruieren, was bedingt, daß die einzelnen Wölbsteine als gewundene Prismen auszubilden sind, von der Form, wie sie im Innern einer flachgängigen Schraubenmutter beobachtet wurden (vgl. Fig. 638).

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.




Digitized by Google


264886
QA501
Hauck
H35
v.1





